

# INTERAZIONI ELETTRICHE

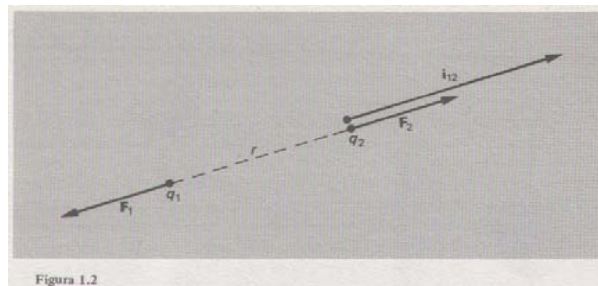
Una bacchetta di ambra, di ebanite, o più semplicemente di plastica, strofinata con un panno di lana o di seta, acquista le proprietà di attirare piccoli pezzi di carta, cenere o altro materiale leggero. L'esperienza qui descritta ha messo in luce aspetti importanti dei fenomeni connessi con l'elettrizzazione dei corpi materiali. Per permettere una descrizione quantitativa occorre introdurre una grandezza fisica, univocamente definita, corrispondente a ciò che viene convenzionalmente denominato **la carica elettrica** posseduta da un corpo elettrizzato. L'interazione tra due cariche elettriche puntiformi fisse nel vuoto, in un sistema di riferimento inerziale, è governata dalla **legge di Coulomb**. In base ad essa, la forza esercitata da una carica sull'altra risulta:

- diretta secondo la retta congiungente le due cariche;
- di intensità proporzionale al prodotto tra le due cariche e inversamente proporzionale al quadrato della distanza interposta tra esse;
- repulsiva per cariche omonime, attrattive per cariche eteronime.

Nello spazio libero, la legge di Coulomb assume la forma:

$$\vec{F}_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} = - \vec{F}_1$$

ove  $\vec{F}_2$  è la forza esercitata dalla carica  $q_1$  sulla  $q_2$ ,  $\vec{F}_1$  quella esercitata dalla  $q_2$  sulla  $q_1$ ,  $r_{12}$  è la distanza tra le due cariche,  $\vec{r}_{12}$  è il vettore congiungente  $q_1$  a  $q_2$  (fig.1.2).



$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

dove  $\epsilon_0$  prende il nome di COSTANTE DIELETTRICA DEL VUOTO e vale:

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3} \text{ S}^2 \text{ C}^2$$

In presenza di più cariche (fig.1.4), la forza agente su ciascuna, risultante dall'interazione con tutte le altre, è pari alla somma vettoriale delle forze che su di essa vengono esercitate, conformemente alla legge di Coulomb, da ogni singola carica.

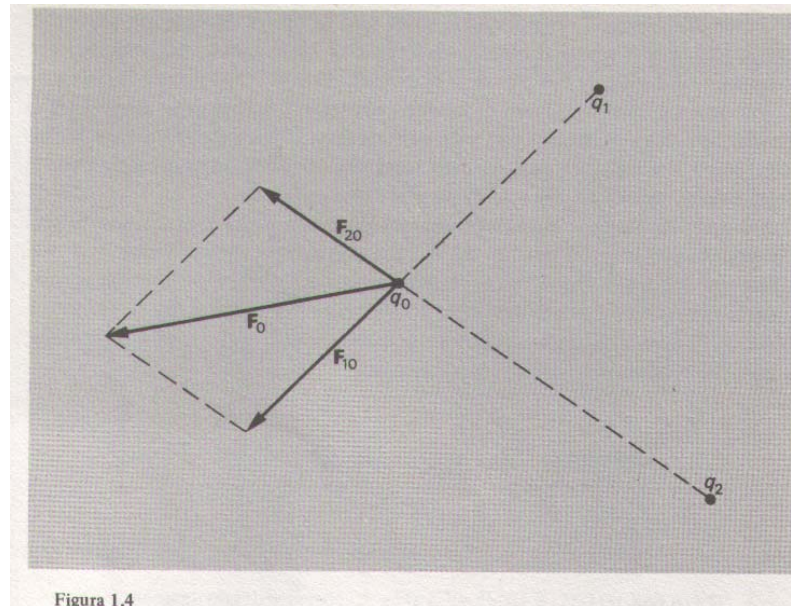


Figura 1.4

Intendendo isolato un sistema fisico che non abbia scambi di materia attraverso la superficie che lo limita, il principio di conservazione della carica totale può enunciarsi dicendo che in un tale sistema la carica totale, pari alla somma algebrica delle cariche in esso contenute, è invariante nel tempo.

# IL CAMPO ELETTROSTATICO

Ritornando all'interazione nello spazio libero tra due cariche puntiformi fisse nelle loro posizioni, immaginiamo di misurare la forza esercitata dalla carica sorgente  $q_1$ , posizionata in Q, su una carica di prova  $q_o$ , posizionata nel generico punto P dello spazio. Ripetendo la misura per tutti i punti dello spazio si determina il campo vettoriale  $\vec{F}_o(P)$ . Si può facilmente verificare come questo campo sia definito in tutto lo spazio e sia un campo centrale. Sostituendo alla  $q_o$  una carica  $q'_o$ , si ottiene, un nuovo campo vettoriale  $\vec{F}'_o(P)$  :

$$\vec{F}'_o(P) = \frac{q'_o}{q_o} \vec{F}_o(P)$$

Indicando con  $\vec{E}(P)$  il campo vettoriale che esprime la forza esercitata dalla carica sorgente  $q_1$  sulla carica di prova unitaria positiva posta nel generico punto P, la forza  $\vec{F}_o(P)$  può essere espressa come:

$$\vec{F}_o(P) = q_o \vec{E}(P)$$
$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{10}^3} \vec{r}_{10}$$

Nell'espressione precedente,  $r_{10}$  è la distanza tra il punto P e il punto Q;  $\vec{r}_{10}$  il vettore congiungente i due punti orientato da Q verso P. Il campo  $\vec{E}(P)$  è il campo elettrico prodotto dalla carica  $q_1$  fissa nel punto Q. Una rappresentazione geometrica è riportata nelle figure seguenti in corrispondenza di  $q_1 > 0$  e  $q_2 < 0$  (fig.2.2)

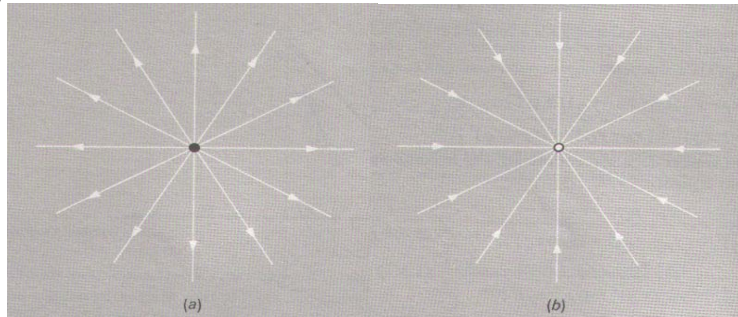


Figura 2.2

Rappresentazione del campo elettrico prodotto da una carica puntiforme.

La nozione di “campo elettrico”, data per il caso di una sola carica-sorgente  $q_1$ , può essere estesa al caso di un numero qualsiasi di cariche-sorgente. Se consideriamo  $N$  cariche  $q_1, \dots, q_N$ , fisse nei punti  $Q_1, \dots, Q_N$ , la forza esercitata da questo insieme di cariche su una carica  $q_0$  (carica di prova) posta in  $P$  risulta:

$$\begin{aligned}\vec{F}_0(P) &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{r_{k0}^3} \cdot \vec{r}_{k0} \\ \vec{F}_0(P) &= q_0 \vec{E}(P) \\ \vec{E}(P) &= \sum_{k=1}^N \vec{E}_k(P) \quad (2)\end{aligned}$$

L'ultima espressione esprime il **principio di sovrapposizione** per i campi elettrici. Se nella data situazione fisica la distribuzione delle cariche-sorgente non è nota a priori,  $\mathbf{E}(P)$  potrebbe essere misurato come:

$$\mathbf{E}(P) = \mathbf{F}_0(P) / q_0 \quad (1),$$

determinando cioè, punto per punto il rapporto tra la forza  $\mathbf{F}_0$  agente sulla carica  $q_0$  e il valore di questa. Se tutte le cariche-sorgente restassero fisse nelle loro posizioni, la definizione (1) fornirebbe il campo  $\mathbf{E}$  indipendente dal valore della carica esploratrice  $q_0$ . Nella realtà, in assenza della carica esploratrice, le sorgenti del campo si trovano in equilibrio statico nei corpi circostanti. Per il principio di azione e reazione, l'introduzione di una carica esploratrice, interagendo con le sorgenti, può modificare la distribuzione di queste fino al raggiungimento di una nuova configurazione di equilibrio. Cosicché la misura del campo mediante la (1) fornisce un valore diverso da quello che si potrebbe calcolare mediante la (2), in assenza di  $q_0$ , una volta nota la distribuzione delle cariche-sorgente. L'azione di disturbo esercitata dalla carica esploratrice  $q_0$  sulle sorgenti del campo cresce con il valore della  $q_0$  stessa: al variare di questo, si modifica la distribuzione delle sorgenti e viene meno la relazione di proporzionalità tra la forza  $\mathbf{F}_0$  e la carica  $q_0$ . Per tutti questi motivi, la definizione operativa del **campo elettrico  $\mathbf{E}$**  viene data come segue:

$$\vec{E}(P) = \lim_{q_o \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(P)}{q_o}$$

Facendo tendere a zero il valore della carica esploratrice si annulla il suo effetto di disturbo sulla distribuzione delle sorgenti.

Il passaggio al limite va inteso in senso macroscopico; è sufficiente cioè far decrescere la carica  $q_o$  fino a valori che risultino di gran lunga minori di quelli delle sorgenti.

Finora abbiamo considerato distribuzioni di cariche concentrate in singoli punti isolati. Tuttavia nella pratica è frequente il caso in cui le cariche-sorgenti sono distribuite con continuità su una regione lineare, superficiale o volumica.

Per iniziare, si consideri il caso in cui le cariche sono distribuite con continuità su una regione  $\gamma$ , in cui una delle dimensioni sia prevalente rispetto alle altre due (ad esempio, un filo).

La **densità di carica lineare**, nell'intorno del punto P di  $\gamma$  si calcola come:  $\lambda(P) = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{q}{\Delta \ell}$

Il campo elettrico è: 
$$\vec{E}(\vec{p}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\gamma} \frac{\lambda(\vec{p}')(\vec{p} - \vec{p}')}{|\vec{p} - \vec{p}'|^3} dl'$$

La carica totale distribuita sulla linea  $\gamma$  è data da: 
$$Q_{\gamma} = \int_{\gamma} \lambda(\vec{p}) dl$$

Consideriamo, ora, il caso di una carica distribuita sulla superficie S.

La **densità di carica superficiale**,  $\sigma$ , nel generico punto  $\vec{P}$  di S è definita come:

$$\sigma (\vec{P}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{q}{\Delta S}$$

$$\vec{E} (\vec{P}) = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma (\vec{P}') (\vec{P} - \vec{P}')}{|\vec{P} - \vec{P}'|^3} d S ,$$

$$Q_s = \iint_S \sigma (\vec{P}) d S$$

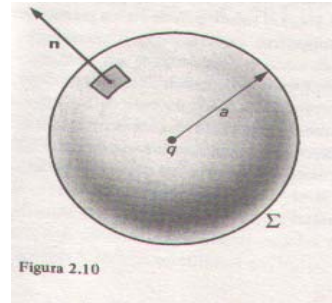
Infine facciamo riferimento alla situazione in cui le cariche elettriche sono distribuite su un dominio tridimensionale,  $\Omega$ . La **densità di carica volumetrica**, nel generico punto  $\vec{P}$  di  $\Omega$  è definita come:

$$\rho (\vec{P}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{q}{\Delta \tau}$$

$$\vec{E} (\vec{P}) = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho (\vec{P}') (\vec{P} - \vec{P}')}{|\vec{P} - \vec{P}'|^3} d \tau ,$$

$$Q_{\Omega} = \iiint_{\Omega} \rho (\vec{P}) d \tau$$

Operando nello spazio libero, si consideri una superficie sferica  $\Sigma$  che circondi una carica puntiforme  $q$  posta nel suo centro:



Orientiamo la normale  $\hat{n}$  a  $\Sigma$  verso l'esterno. Il flusso  $\Phi_{\Sigma}$  del campo elettrico uscente da  $\Sigma$  è dato da:

$$\Phi_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS$$
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \quad \rightarrow \quad \Phi_{\Sigma} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Le relazioni precedenti costituiscono un caso particolare del **TEOREMA DI GAUSS**:

Nello spazio libero, il flusso del campo elettrico uscente da una qualsiasi superficie chiusa che contenga carica puntiforme netta è proporzionale (secondo il fattore  $1/\epsilon_0$ ) al valore  $q$  della carica stessa, indipendentemente dalla forma e dall'area della superficie.

Il flusso di  $\mathbf{E}$  uscente da una qualsiasi superficie chiusa non contenente carica netta è nullo.

Il teorema di Gauss può essere esteso al caso di una distribuzione generica di cariche:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Consideriamo il campo di una carica puntiforme:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{10}^3} \vec{r}_{10}$$

Presenta, come si vede, una struttura di tipo centrale, cioè dotata di simmetria sferica.

I campi di questo tipo godono della proprietà di essere **conservativi**, vale a dire che per una generica linea chiusa  $\gamma$  contenuta nella regione di definizione del campo, risulta:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot \hat{t} dl = 0$$

Particolare attenzione va posta quando la linea passa per il punto dove è collocata la carica puntiforme, laddove il campo diverge. Il significato fisico di questa proprietà è chiaro quando si pensa che l'integrale di linea del campo rappresenta il lavoro compiuto dalle forze del campo sulla carica  $q$  per spostarla lungo la linea  $\gamma$ .

Dalla relazione precedente, discende la seguente affermazione: considerati due punti distinti A e B e due qualsiasi linee  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  di estremi A e B, orientate entrambe da A verso B, risulta

$$\int_{A\gamma_1 B} \vec{E} \cdot \hat{t} dl = \int_{A\gamma_2 B} \vec{E} \cdot \hat{t} dl$$

Poiché il campo  $\mathbf{E}$  è conservativo l'integrale di linea non dipende dal percorso utilizzato per il calcolo, ma soltanto dagli estremi A e B della linea stessa. Tale proprietà si estende facilmente al caso di una distribuzione generica di cariche-sorgente, ed in conclusione risulta che:

*«La circuitazione del campo elettrico associato ad una generica distribuzione di cariche-sorgenti, è nulla qualunque sia la linea chiusa che si consideri per effettuare l'integrale.»*



A partire dalla legge integrale di Gauss si ricava facilmente la corrispondente legge locale :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Consideriamo una situazione in cui le cariche-sorgente siano distribuite con densità di volume  $\rho(P)$  in una regione spaziale  $\Omega$ .

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, d\tau$$

Applichiamo il teorema della divergenza:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{E} \, d\tau$$

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{E} \, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, d\tau$$

è valida per ogni regione  $\Omega$  del campo, per cui:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Il teorema di Gauss in forma locale afferma:

*in ogni punto in cui esiste una carica distribuita con densità di volume  $\rho$  la divergenza del campo  $\mathbf{E}$  è ad essa proporzionale secondo il fattore  $1/\varepsilon_0$ .*

Percorriamo un cammino analogo per ciò che riguarda la proprietà di irrotazionalità.

Consideriamo un generico campo elettrostatico  $\mathbf{E}$ , in esso, una regione in cui non esistano cariche-sorgenti, oppure queste siano distribuite con densità di volume  $\rho$  limitata e continua; sappiamo allora che le componenti di  $\mathbf{E}$  sono continue con derivate prime continue e vale quindi il teorema di Stokes:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot \hat{t} dl = \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

Poiché il campo elettrico  $\mathbf{E}$  è un campo conservativo, risulta:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{t} dl = 0$$

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 0$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$$

Tale relazione esprime in forma locale la proprietà di irrotazionalità.

Consideriamo una superficie elementare (cioè infinitesima e piana)  $S$  sulla quale la carica sia distribuita con densità superficiale  $\sigma$ , oppure una superficie in corrispondenza della quale la densità di volume  $\rho$  si mantenga limitata, ma sia discontinua. Consideriamo una linea chiusa rettangolare  $\gamma$ , tale che la lunghezza  $l$  delle basi sia molto maggiore dell'altezza  $h$  (fig. 2.15) :

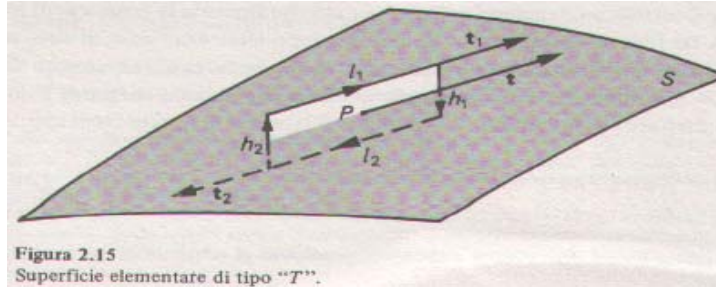


Figura 2.15  
Superficie elementare di tipo "T".

$$\int_{l_1} \vec{E} \cdot \hat{t} dl + \int_{h_1} \vec{E} \cdot \hat{t} dl + \int_{h_2} \vec{E} \cdot \hat{t} dl + \int_{l_2} \vec{E} \cdot \hat{t} dl = 0$$

Se  $l \gg h$  (n.b.  $l$  e  $h$  sono due infinitesimi, ma  $h$  è un infinitesimo di ordine superiore), possiamo trascurare i contributi dell'integrale sui tratti corti e scrivere:

$$\vec{E} \cdot \hat{t}_1 dl + \vec{E} \cdot \hat{t}_2 dl = 0$$

Se indichiamo con  $E_{t1}$  e  $E_{t2}$  le componenti tangenziali di  $\mathbf{E}$ , si ha:

$$\vec{E} \cdot \hat{t}_1 = E_{t1} \quad \vec{E} \cdot \hat{t}_2 = -E_{t2}$$

e quindi:

$$E_{t1} = E_{t2}$$

In corrispondenza dei punti di  $S$  le componenti di  $\mathbf{E}$  tangenziale alla superficie si mantengono continue nel passaggio da un lato all'altro della superficie stessa.

Per quel che riguarda le distribuzioni lineari di carica, la componente tangenziale alla linea  $\gamma$  tende, avvicinandosi a  $\gamma$ , a un andamento del tipo  $(1/2\pi\epsilon_0)\lambda'\log r$  (dove  $\lambda'$  è la derivata di  $\lambda$  lungo  $\gamma$ ).

Si ha quindi:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{E_t}{E_n} = 0$$

avendo indicato con  $E_t$  la componente di  $\mathbf{E}$  lungo la tangente a  $\gamma$  e con  $E_n$  quella normale. Ne consegue che nelle immediate vicinanze di una distribuzione lineare di carica, il campo risulta perpendicolare alla linea stessa.

# IL POTENZIALE ELETTROSTATICO

Consideriamo il caso di una sola carica-sorgente puntiforme. Se il potenziale scalare del campo prodotto dalla carica puntiforme è dato da:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C$$

(avendo indicato con  $r$  la distanza tra il generico punto  $P$  e il punto  $Q$  in cui è localizzata la carica  $q$  e con  $C$  una costante arbitraria), risulta:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{i}_{QP} = -\nabla V(P)$$

Vista l'arbitrarietà della costante  $C$  che appare nella definizione di  $V(P)$ , essa può essere scelta in modo che il potenziale  $V$  assuma valore nullo in un qualsiasi assegnato punto del campo, purchè non coincidente con  $Q$ . Volendo che il potenziale si annulli in corrispondenza di un particolare punto  $P_0$ , basta porre:

$$C = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_0}$$

(avendo indicato con  $r_0$  la distanza di  $P_0$  da  $Q$ ).

Si può notare che tra tutti i potenziali uno solo verifica la condizione di annullamento all'infinito:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$$

esso è quello che corrisponde al valore nullo della costante.

La funzione  $V$  assume lo stesso valore in tutti i punti di una generica superficie sferica centrata in  $Q$ , che è pertanto superficie equipotenziale del campo.

La superficie equipotenziale è sferica per ogni  $r$  (fig. 3.1) :

Le linee vettoriali risultano perpendicolari alle superfici equipotenziali.

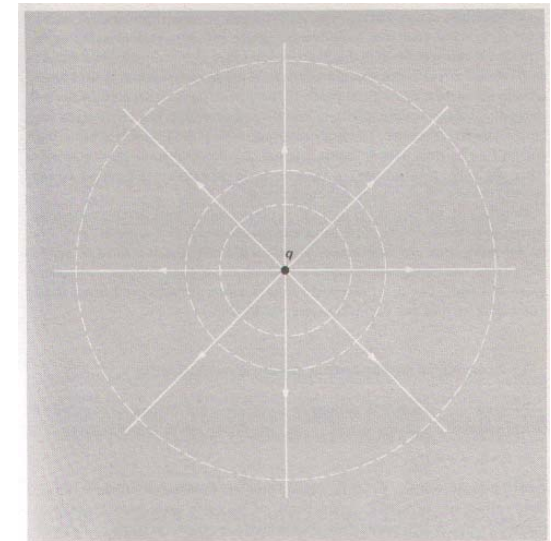


Figura 3.1  
Rappresentazione bidimensionale delle superfici equipotenziali (linee tratteggiate) e delle linee vettoriali per una carica puntiforme.

Il significato fisico del potenziale è:

$$L_{\gamma} = q_0 \int_{\gamma} \vec{E} \cdot \hat{t} dl = -q_0 \int_{\gamma} \nabla V \cdot \hat{t} dl = q_0 [V(P_1) - V(P_2)]$$

*Tra due punti esiste una differenza di potenziale di un volt quando le forze del campo, per spostare una carica positiva pari a 1C da un punto all'altro, compiono il lavoro di 1 joule.*

Date più cariche sorgenti, il campo elettrico in un generico punto dello spazio si può ottenere per sovrapposizione lineare dei singoli contributi. Si dimostra che anche il potenziale elettrico gode della stessa proprietà:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{j=1}^n \vec{E}_j$$

$$\vec{E} = -\nabla V_1 + \dots + (-\nabla V_n)$$

$$E = -\nabla(V_1 + \dots + V_n) = -\nabla V \quad \text{con} \quad V = V_1 + \dots + V_n$$

E dunque,  $n$  cariche puntiformi (con  $n$  limitato) , ammettono potenziale pari a:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \left( \frac{q_k}{r_k} + C_k \right)$$

si può porre  $\sum_{k=1}^n C_k = C = 0$  .

Il potenziale per cariche-sorgenti distribuite con densità volumica  $\rho$  in  $\tau$  è pari a:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}} d\tau$$

Nel caso di distribuzioni superficiali risulta:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\sigma(Q)}{r_{PQ}} dS$$

Infine, nel caso di distribuzioni lineari risulta:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\gamma} \frac{\lambda(Q)}{r_{PQ}} dl$$

Quale forma assumono le equazioni delle leggi dell'elettrostatica in forma locale nello spazio libero, quando si faccia uso della nozione di potenziale?

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

Ponendo  $\vec{E} = -\nabla V$  (dove  $V$  è di classe  $C^2$ ), risulta:

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

**EQUAZIONE DI POISSON**

dove  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$  è l'operatore laplaciano la cui espressione nei vari sistemi di coordinate è riportata nella tabella precedente

Nelle regioni in cui non esistono cariche, l'equazione di Poisson diventa:

$$\nabla^2 V = 0$$

**EQUAZIONE DI LAPLACE**

Per ottenere soluzione unica, occorre aggiungere le condizioni al contorno alle equazioni differenziali precedenti. **Le condizioni al contorno** sono delle equazioni aggiuntive che servono a portare in conto, nella valutazione dei campi incogniti, il contributo delle sorgenti situate al di fuori del dominio del problema. Queste condizioni sono fondamentalmente di due tipi:

- Imposizione del potenziale

$$V = f(P_\Sigma)$$

—————> CONDIZIONE DI DIRICHLET

- Imposizione della derivata normale del potenziale

$$\frac{\partial V}{\partial n} = g(P_\Sigma)$$

—————> CONDIZIONE DI NEUMANN



Presentiamo ora un metodo che consente di calcolare, in maniera approssimata, il potenziale generato da una assegnata distribuzione di cariche. Questo metodo, noto come ESPANSIONE IN SERIE DI MULTIPOLI, permette, tra l'altro, di operare con particolari distribuzioni di cariche (dipoli e multipoli).

Consideriamo una generica distribuzione di carica che occupi una regione limitata dello spazio, sì da poter essere interamente contenuta in una sfera di raggio  $a$  (fig. 3.7). Ci proponiamo di descrivere gli effetti in punti che siano a distanza dell'origine  $O$  molto maggiore di  $a$ .

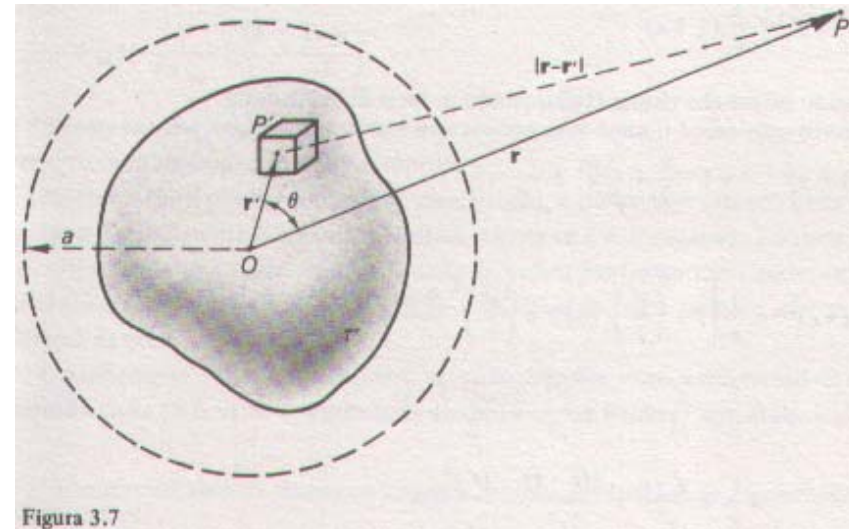


Figura 3.7

Indichiamo con  $\mathbf{r}'$  il raggio vettore dall'origine  $O$  verso il generico punto  $P'$  appartenente alla regione  $\tau'$  occupata dalle cariche, con  $\rho(\mathbf{r}')$  la densità di volume di carica in  $P'$  e con  $\mathbf{r}$  il raggio vettore dall'origine  $O$  al generico punto di osservazione  $P$ . Il potenziale nel punto  $P$  è:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

$$r_{PP'} = |\vec{r} - \vec{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}}$$

Poiché ci limitiamo a considerare i valori assunti dal potenziale in punti lontani dall'origine, possiamo supporre  $r'/r \ll 1$ , e quindi sviluppare l'espressione  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$  in serie di potenze di  $r'/r$  limitata ai primi termini.

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 - 2\frac{r'}{r}\cos\vartheta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} (1 - 2x\cos\vartheta + x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

Applicando lo sviluppo in serie di Maclaurin

$$= \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{2} \left[ (-2\cos\vartheta + 2x)(1 - 2x\cos\vartheta + x^2)^{-\frac{3}{2}} \right]_{x=0} x + \dots \right) \cong$$

$$\cong \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{2} (-2\cos\vartheta)x + \dots \right) = \frac{1}{r} + \frac{\cos\vartheta r'}{r^2} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Otteniamo, quindi:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau'} \rho(\vec{r}') \left( \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} \right) d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \iiint_{\tau'} \rho(\vec{r}') \left( 1 + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} \right) d\tau' \right]$$

Lo sviluppo in serie di Maclaurin evidenzia come, per una distribuzione di carica limitata nello spazio, il potenziale, al tendere della distanza all'infinito, tenda a zero almeno come l'inverso della distanza. Il primo termine dell'espressione fornisce il potenziale che sarebbe prodotto nel punto P se tutta la carica distribuita nella regione  $\tau'$ ,  $Q = \iiint_{\tau'} \rho(\vec{r}') \cdot d\tau'$  fosse concentrata nell'origine O.

Intuitivamente questo termine coincide con buona approssimazione col potenziale percepito da un osservatore molto distante dalla distribuzione di carica. Nel secondo termine compare la grandezza

$$\vec{p} = \iiint_{\tau'} \rho(\vec{r}') \vec{r}' d\tau'$$

che prende il nome di **momento di dipolo**. Quindi:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} \right)$$

i due termini che compaiono prendono il nome rispettivamente di termine di monopolo e termine di dipolo. Il primo termine è nullo quando globalmente la carica positiva bilancia esattamente quella negativa presente nella distribuzione.

Il momento di dipolo di una distribuzione di carica dipende generalmente dall'origine del sistema di riferimento in cui si è scelto di operare. Tuttavia, questa dipendenza svanisce quando la carica totale della distribuzione risulta nulla: in questo caso è una caratteristica intrinseca del sistema.

Per verificare questa affermazione, si ricalcoli il momento di dipolo della distribuzione precedente utilizzando un nuovo sistema di riferimento nel quale l'origine sia stata spostata di un vettore  $\vec{R}$

$$\vec{p}' = \iiint (\vec{r}' - \vec{R}) \rho(\vec{r}') d\tau' = \iiint \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\tau' - Q\vec{R} = \vec{p} - Q\vec{R}$$

Se  $Q=0$  risulta  $\vec{p}' = \vec{p} = q\vec{d}'$

dove  $\vec{d}$  è la distanza vettoriale tra i baricentri delle distribuzioni di carica di differente segno.

Pertanto, per distribuzioni a carica totale nulla, il momento di dipolo non dipende dall'origine.

Per distanze di osservazione grandi rispetto alla dimensione caratteristica della regione in cui è confinata la carica, il potenziale e il campo elettrico sono ricavabili attraverso le seguenti espressioni:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} \quad (Q = 0)$$

$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{p})}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$$