CAPITOLO II
I componenti elettrici ideali e le leggi di Kirchhoff

1. Componenti ideali: l'*N*-Polo

Il più generale dei componenti elettrici ideali prende il nome di N-polo.
Un N-polo, soddisfa a tutte le proprietà di un componenti ideale, e dalla sua superficie limite fuoriescono esattamente N terminali.

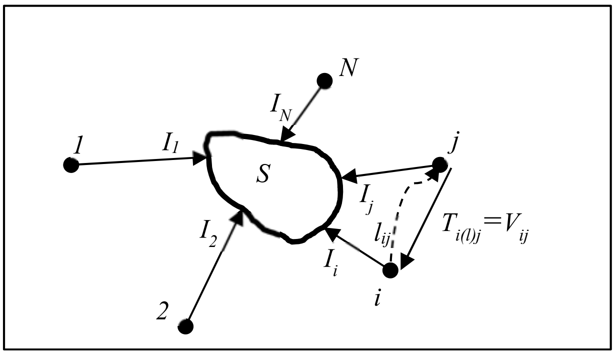

Fig.II.1.1 *Rappresentazione di un N-polo*

In particolare, con riferimento alla simbologia adottata nella fig.*II.1.1*, devono valere le seguenti proprietà:

a) La "tensione elettrica" $T_{i(l)j}$ tra i due generici morsetti i e j valutata lungo una qualunque linea l_{ij} (purchè "di dimensioni ragionevoli" e che si sviluppi interamente all'esterno della superficie limite dell'*N*-polo, *S*) non deve dipendere dal percorso di integrazione ma solo dai terminali i e j e cioè deve essere una "differenza di potenziale" (la chiameremo pertanto V_{ij}, prescindendo da ogni riferimento al percorso di integrazione l_{ij}).
Questa proprietà discende dall'irrotazionalità del campo elettrico nella regione esterna alla superficie limite che racchiude l'N-polo.

b) La sommatoria delle correnti I_j, che circolano sui terminali dell'*N*-polo deve essere nulla (si noti che è stato assunto per tutte le correnti il riferimento entrante nella superficie S che circonda l'*N*-polo e, per questo, nella sommatoria le correnti sono prese tutte con segno positivo): $\sum_{j=1,N} I_j = 0$. Si noti ancora che questa proprietà discende dall'assunzione che nella regione esterna alla superficie S sia esclusa la presenza di correnti di spostamento e che il campo di corrente sia solenoidale.

Per chiarire meglio i concetti esposti si propongono due contro-esempi.

a) Anello toroidale con spire strettamente avvolte.
Per la geometria riportata in figura 6.4 a causa della presenza dell'avvolgimento di corrente, si stabilisce all'interno del toroide un campo di induzione magnetica che varia nel tempo con la stessa dinamica temporale delle correnti.
Se le correnti dell'avvolgimento non sono stazionarie, si stabilirà all'interno del toroide un campo di induzione magnetica (e quindi un flusso magnetico) variabile nel tempo. In questa situazione, per la legge di Lenz, risulta:

$$\int_{A(\gamma)B} \mathbf{E}\cdot\mathbf{t}\,dl + \int_{B(\gamma')A} \mathbf{E}\cdot\mathbf{t}\,dl = \oint_{\gamma\cup\gamma'} \mathbf{E}\cdot\mathbf{t}\,dl = -\frac{d\phi}{dt} \rightarrow T_{A(\gamma)B} = \int_{A(\gamma)B} \mathbf{E}\cdot\mathbf{t}\,dl \neq \int_{A(\gamma')B} \mathbf{E}\cdot\mathbf{t}\,dl = T_{A(\gamma')B}$$

Poiché il campo elettrico non è conservativo e la tensione tra A e B dipende dal percorso di integrazione**, l'oggetto in fig.II.1.2 non è un N-polo**.
Si noti che utilizzando un cilindro come superficie limite per il componente, si inibiscono i percorsi di integrazione che concatenano il toroide, il campo elettrico nella regione esterna alla superficie ritorna irrotazionale e **l'oggetto in fig.II.1.3 può essere considerato un N-polo**.

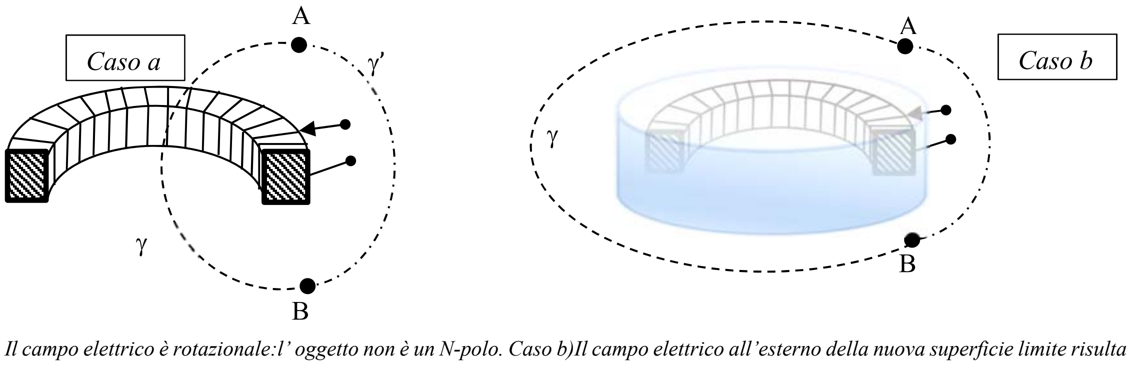

Fig.II.1. *Caso a) Il campo elettrico è rotazionale:l' oggetto non è un N-polo. Caso b)Il campo elettrico all'esterno della nuova superficie limite risulta sempre irrotazionale e l'oggetto soddisfa a tutti i requisiti richiesti per essere considerato un N-polo*

b) **Condensatore collocato nelle adiacenze di una superficie metallica**
Si consideri un condensatore piano le cui armature sono collocate nelle vicinanze di una superficie metallica. Se il segnale elettrico non è stazionario nel condensatore la circolazione della corrente nel circuito è possibile grazie al fatto che nella regione del condensatore si stabilisce una corrente di spostamento tra le armature (come è noto, l'intuizione dell'esistenza delle correnti di spostamento all'interno delle regioni isolanti permise a Maxwell di risolvere la contraddizione dle condensatore piano e di generalizzare la legge di Ampere).
Nel caso riportato in fig. *II.1.4*, tuttavia, solo una parte della corrente di spostamento transita attraverso il condensatore dall'armatura superiore a quella inferiore (linee di campo di colore verde); la parte restante (evidenziata in azzurro) abbandona il condensatore per ritornare nel circuito attraverso la superficie metallica e il conduttore inferiore del circuito elettrico. In questo caso non si può evidentemente assumere che il campo di corrente sia solenoidale al di fuori della superficie limite rossa che avvolge il condensatore. **Pertanto, l'oggetto racchiuso nella superficie rossa non costituisce un N-polo e questo circuito non può essere studiato utilizzando l'approssimazione a parametri concentrati.**

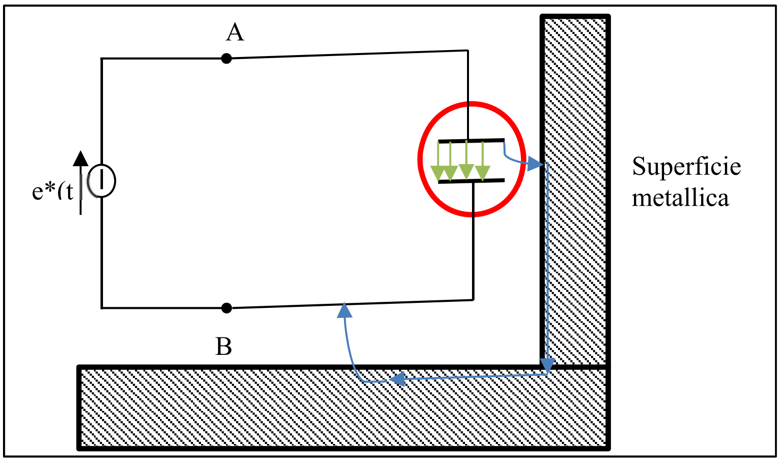

Fig. *II.1.3* *Il campo di corrente all'esterno della regione delimitata dalla superficie rossa non è solenoidale: il condensatore non è un N-polo.*

2. Componenti ideali: l'*N*-Bipolo

Un *N*-bipolo è un *2N*-polo che gode delle seguenti proprietà:

a) ha un numero pari di terminali;
b) soddisfa alle due proprietà degli *N*-poli:
il campo di corrente è solenoidale e il campo elettrico irrotazionale in ogni punto esterno alla superficie limite dell'*N*-bipolo

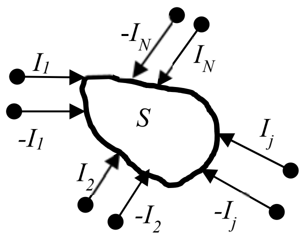

Fig. *II.2.1* *Rappresentazione di un N-bipolo: I terminali del 2N-polo possono essere raggruppati a coppie in modo che per ogni coppia di terminali la somma delle correnti sia nulla.*

c) è possibile raggruppare a coppie i terminali in modo che, avendo assunto riferimenti tutti entranti (nella superficie limite) per le correnti dei terminali, risulti:
$I_j + I'_j=0 \rightarrow I'_j=- I_j \quad \forall j=1:N.$

Ogni coppia di poli è detta "porta". Siccome vale la proprietà "c" è possibile assumere una sola variabile corrente incognita per ciascuna porta. Tale variabile prenderà il nome di "corrente di porta". Allo stesso modo, la tensione tra i due terminali di una generica porta prende il nome di "tensione di porta". Nella caratterizzazione Di un *N*-polo si farà riferimento esclusivamente alle relazioni intercorrenti fra le sue correnti di porte e le sue tensioni di porta. Ai fini della scrittura del modello matematico per la soluzione della rete, non verranno, al contrario, prese in considerazione le tensioni fra terminali appartenenti a porte differenti.

N-bipoli rilevanti ai fini delle applicazioni

a) Bipolo

La configurazione più semplice per un N-bipolo (ma anche la più rilevante ai fini applicativi) è quella in cui N=1 e ci si riferisce ad essa utilizzando il termine di "**bipolo**".
Il bipolo ha una sola porta e, dunque, una sola incognita corrente di porta, *I*, ed una sola incognita tensione di porta, *V*. La caratterizzazione di un bipolo viene effettuata attraverso una relazione funzionale, implicita ($f(V,I)=0$) o esplicita (in questo caso può essere del tipo $I=I(V)$ oppure del tipo $V=V(I)$), che stabilisce per via grafica o analitica il legame tra le due variabili di porta.

b) Doppio Bipolo

Anche il caso con N=2 è particolarmente rilevante ai fini applicativi. In questo caso il componente viene definito "**doppio bipolo**".

Poiché nel doppio bipolo sono presenti due porte le variabili da determinare saranno quattro: due correnti di porta e due tensioni di porta. Per la caratterizzazione del componente sarà necessario specificare due relazioni funzionali nelle quali due delle variabili sono espresse in funzione delle due rimanenti.

c) Convenzioni di porta e scambio energetico per un bipolo

La potenza scambiata dal bipolo di fig.II.2.2 con la rete a cui è collegato vale $P=V\,I$.

Nel caso del doppio bipolo, le potenze scambiate alla prima e alla seconda porta con la rete esterna varranno rispettivamente $P_1=V_1\,I_1$ e $P_2=V_2\,I_2$.

Non è tuttavia chiaro se i componenti stanno cedendo o assorbendo potenza elettrica. Per rispondere al quesito occorrerà fare riferimento alle cosiddette convenzioni associate tra le variabili di porta.

Queste possono essere di due tipi:convenzione dell'utilizzatore (**CU**) e convenzione del generatore (**CG**).

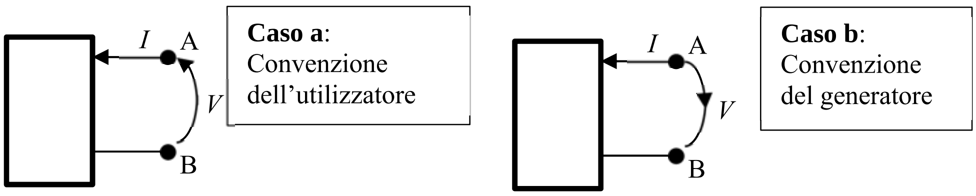

Fig. II.2.3 *Convenzione dell'utilizzatore e del generatore per il bipolo*

Ci si trova sotto la convenzione dell'utilizzatore se le frecce della tensione di porta e della corrente di porta si inseguono reciprocamente, come nel **caso a** di fig II.2.3.

Ci si trova, invece, sotto la convenzione del generatore se le frecce della tensione o della corrente divergono (o convergono) dallo stesso stesso punto come accade nel caso b di fig. II.2.3.

Si noti che invertendo entrambi i riferimenti (quello della corrente e quello della tensione di porta) la convenzione rimane la stessa.

Per determinare se un bipolo stia assorbendo potenza elettrica dalla rete a cui è collegato oppure stia cedendo potenza elettrica si dovrà fare riferimento alla tabella Tab.II.2.1.

	Potenza assorbita (P_a)	Potenza generata (P_g)
Convenzione dell'utilizzatore	$V\,I$	$-V\,I$
Convenzione del generatore	$-V\,I$	$V\,I$

- nel **caso a** di fig.II.2.3 la potenza assorbita dal bipolo vale: $P_a=VI$
- nel **caso a** di fig.II.2.3 la potenza generata dal bipolo vale: $P_g=-VI$
- nel **caso b** di fig.II.2.3 la potenza assorbita dal bipolo vale: $P_a=-VI$
- nel **caso b** di fig.II.2.3 la potenza generata dal bipolo vale: $P_g=VI$

Si noti che la potenza assorbita e la potenza generata sono, come la tensione e la corrente, grandezze algebriche, cioè dotate di segno. Pertanto, indipendentemente dal fatto che si stia operando sotto la convenzione del generatore o dell'utilizzatore il componente assorbirà effettivamente potenza elettrica alla porta se $P_a>0$ ovvero se $P_g<0$.

E' abbastanza semplice convincersi della correttezza di questa affermazione. Con riferimento al caso a di figura II.2.3, si assuma che tensione e corrente di porta siano entrambe positive. In queste condizioni, tanto il campo elettrico quanto il flusso di cariche positive saranno diretti dal terminale A verso il terminale B e, dunque, le forze elettriche compiranno un lavoro contro forze di altra natura: il bipolo converte di potenza elettrica in potenza di natura differente e, pertanto, si comporta come un dissipatore o, se si preferisce, un utilizzatore di potenza elettrica.

Nel caso b di figura II.2.3, se tensione e corrente di porta sono positive, le cariche positive si muoveranno dal terminale A verso il terminale b **risalendo** il campo elettrico. In questo caso, saranno forze di altra natura a compiere lavoro contro il campo elettrico e, pertanto, si avrà conversione di energia di natura differente in energia elettrica: il bipolo si comporta come un generatore di potenza elettrica.

Esempio:II.1 Si calcoli la potenza elettrica assorbita nel pezzetto di rete illustrato in fig. II.2.4

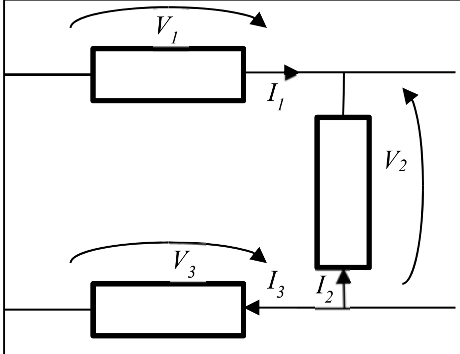

Fig. II.2.4 *Esempio II.1: porzione di rete*

La Potenza elettrica totale assorbita dalla porzione di rete in fig.II.2.4 può essere calcolata come somma delle potenze elettriche assorbite dai singoli bipoli:

1) $P_{a1}=-V_1 I_1$ (CG)
2) $P_{a2}=-V_2 I_2$ (CG)
3) $P_{a3}=V_3 I_3$ (CU)

$P_{a,\,tot}=P_{a1}+P_{a2}+P_{a3}$

Esempio:II.2 Si calcoli la potenza elettrica assorbita dal doppio bipolo di fig. II.2.5

Fig. II.2.5 *Esempio II.2: Potenza assorbita da un doppio bipolo*

La Potenza elettrica totale assorbita dal doppio bipolo in fig.II.2.5 può essere calcolata come somma delle potenze elettriche assorbite alle due porte del doppio bipolo:

1) $P_{a1}=V_1 I_1$ (Prima porta: CU)
2) $P_{a2}=V_2 I_2$ (Seconda porta: CU)

$P_{a,\,tot}=P_{a1}+P_{a2}$

Esempio:II.3 Si calcoli la potenza elettrica assorbita dal tetra-bipolo di fig. II.2.6

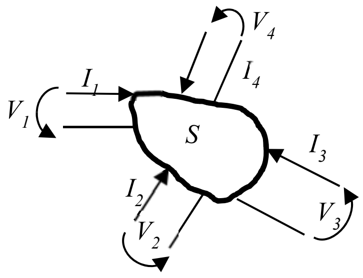

Fig. II.2.6 *Esempio II.3: Potenza assorbita da un tetra-bipolo*

La Potenza elettrica totale assorbita dal tetra-bipolo in fig.II.2.6 viene calcolata come somma delle potenze elettriche assorbite alle quattro porte del componente:

1) $P_{a1}=-V_1 I_1$ (Prima porta: CG)
2) $P_{a2}=-V_2 I_2$ (Seconda porta: CG)
3) $P_{a3}=V_3 I_3$ (Seconda porta: CU)
4) $P_{a4}=V_4 I_4$ (Seconda porta: CU)

$P_{a.\,tot}=P_{a1}+P_{a2}+P_{a3}+P_{a4}$

3. Caratteristica di un bipolo

Tra la tensione e la corrente di porta di un bipolo (sia esso reale o ideale) esiste sempre una relazione funzionale del tipo $f(V, I)=0$ (II.3.1)

Tale funzione può essere espressa in forma grafica, analitica o numerica e viene chiamata “caratteristica del bipolo”.

Si noti che la (II.3.1) esprime in generale una relazione di funzionalità tra le funzioni del tempo *i(t)* e *v(t)*.

Nel caso ci si trovi in regime stazionario (o in condizioni quasi-stazionarie, ovvero di “lenta” variabilità temporale) il legame tra le variabili di porta prende il nome di caratteristica statica; nel seguito, per brevità, se non diversamente precisato, ci si riferirà sempre a quest’ultima caratteristica e si ometterà l’attributo “statica”.

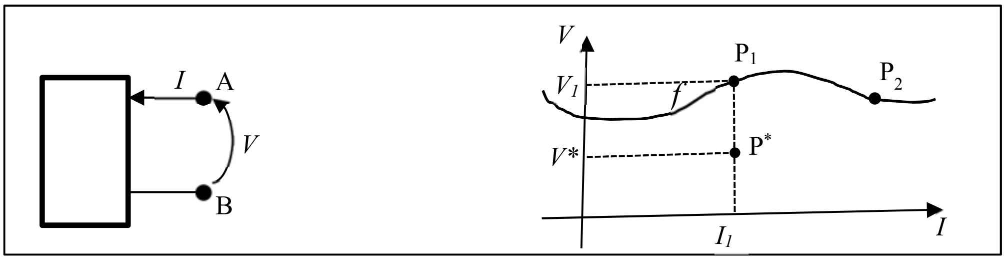

Fig. II.3.1: *Caratteristica di un bipolo: il punto P^*, esterno alla caratteristica, non è un punto di lavoro ammissibile. I punti P_1 e P_2, giacendo sulla curva caratteristica, sono entrambi punti di lavoro ammissibili per il bipolo*

Si supponga ora di studiare un bipolo avente una caratteristica del tipo illustrato in fig. II.3.1:

- La curva *f* rappresenta l'unione di tutti i possibili punti di lavoro del bipolo, vale a dire che solo le coppie (V, I) che giacciono sulla curva *f* sono punti di lavoro ammissibili per il bipolo;
- Il punto $P^*= (I_1, V^*)$, ad esempio, non è un punto di lavoro ammissibile per il bipolo in quanto, in corrispondenza della corrente I_1, l'unico valore ammissibile per la tensione sarà V_1. Pertanto il punto $P_1= (I_1, V_1)$ che appartiene alla caratteristica è un punto di lavoro ammissibile per il bipolo. Anche il punto P_2 che giace sulla curva caratteristica è un punto di lavoro ammissibile per il bipolo.
- Si vuole ora sottolineare che P_1, P_2 e gli altri punti della caratteristica sono tutti punti di lavoro consentiti. In pratica il bipolo funzionerà in corrispondenza di uno solo di questi punti. Il punto di funzionamento effettivo dipenderà, come sarà chiaro nel prosieguo del capitolo, dalla caratteristica della rete esterna a cui il bipolo sarà collegato.
- Infine va sottolineato che al variare della convenzione adottata per le variabili di porta la relazione caratteristica cambia formalmente ma il comportamento del bipolo rimane lo stesso. Per questa ragione, quando si scrive la relazione caratteristica di un componente occorre sempre precisare quali sono i riferimenti adottati per le variabili di porta.

In definitiva si può affermare che la caratteristica di un bipolo rappresenta per esso un vero e proprio "biglietto da visita" e non dipende dalla rete in cui, di volta in volta, il bipolo viene inserito. Il punto di lavoro effettivo del bipolo dipende dalla sua caratteristica e dalla rete in cui viene occasionalmente inserito.

Il grafico della curva caratteristica può essere partizionato in quattro regioni dette quadranti secondo il seguente schema:

1) Primo quadrante: $V>0, I>0$;
2) Secondo quadrante: $V>0, I<0$;
3) Terzo quadrante: $V<0, I<0$;
4) Quarto quadrante: $V<0, I>0$;

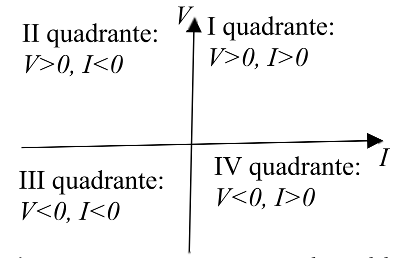

Fig. II.3.2: *partizionamento in quadranti del piano della curva caratteristica*

Si procederà di seguito alla classificazione dei bipoli in base alla forma funzionale della loro caratteristica.

a) Un bipolo verrà definito "**inerte**" se la sua curva caratteristica include il punto di lavoro ($I=0$, $V=0$), ovvero se la sua caratteristica passa per l'origine degli assi del sistema di riferimento.

   Un esempio è costituito dalla comune lampadina elettrica: in assenza di tensione di alimentazione, non sarà attraversata da corrente e non si illuminerà.

   Un secondo esempio è costituito dal bipolo che presenta la caratteristica: $I=kV^2$ (Il punto $I=0$, $V=0$ soddisfa l'equazione e dunque è un possibile punto di lavoro)

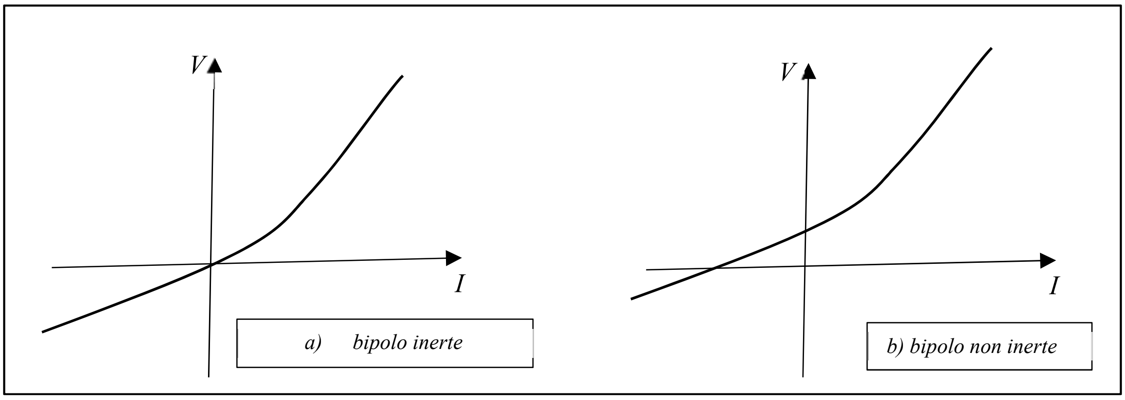

Fig. II.3.3a: *Classificazione dei bipoli: a) bipolo inerte; b) bipolo non inerte*

b) Un bipolo verrà definito "**normale**" se la sua curva caratteristica è una retta, cioè se può essere espressa analiticamente nella forma: $V=a\,I+b$, con a,b costanti reali.

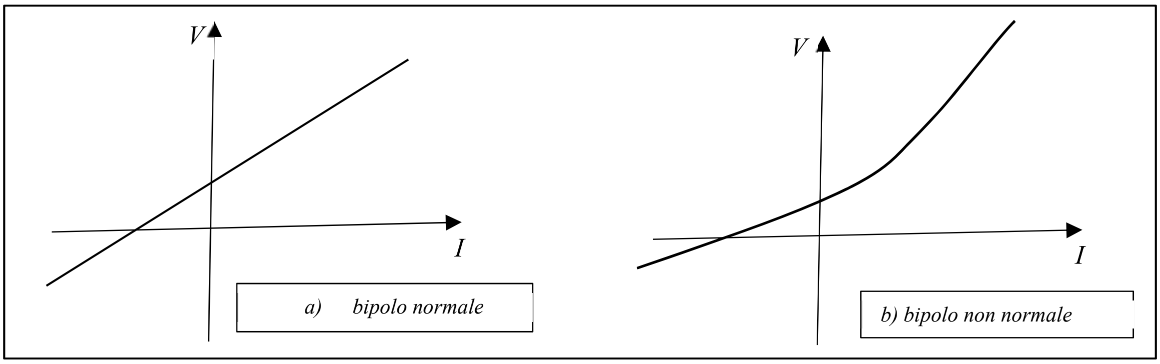

Fig. II.3.3b: *Classificazione dei bipoli: a) bipolo normale; b) bipolo non normale*

c) Un bipolo verrà definito "**lineare**" se è contemporaneamente **normale** ed **inerte**, cioè se la sua curva caratteristica è una retta che passa per l'origine del sistema di riferimento: $V=a\,I$. Si sottolinea che se un bipolo non è lineare è **"non lineare"**. Dunque un bipolo normale ma non inerte è **non lineare**.

Si ricordi che una relazione lineare gode delle proprietà di

i) Additività: $V_1+V_2=v(I_1)+v(I_2)=v(I_1+I_2)$

ii) Omogeneità: $v(k\,I)=k\,v(I)$ $\forall$costante $k\in\mathcal{R}$

Si precisa che nella rappresentazione grafica della caratteristica di un bipolo lineare è prassi consolidata utilizzare l'asse delle ascisse per le correnti e l'asse delle ordinate per le tensioni; nel caso dei bipoli non lineari, al contrario, vengono rappresentate le tensioni sull'asse delle ascisse e le correnti su quello delle ordinate. Fatta eccezione per questo paragrafo, nel seguito ci si atterrà a questa convenzione.

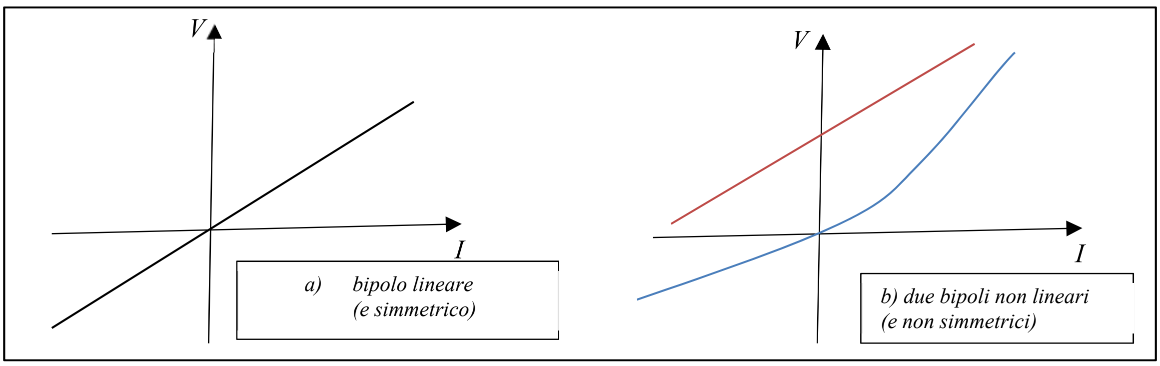

Fig. II.3.3c: *Classificazione dei bipoli: a) bipolo lineare (e simmetrico); b) bipoli non lineari (e non simmetrici)*

d) Un bipolo viene definito "**simmetrico**" se, per ogni punto *(I, V)* appartenente alla curva caratteristica, si ha che anche il punto *(-I, -V)* appartiene alla curva caratteristica. Un bipolo simmetrico ha una curva caratteristica simmetrica rispetto all'origine del piano *I-V* (Vedi ***Fig. II.3.3c.a***). I bipoli di fig. ***II.3.c.b*** sono, invece, non simmetrici. Si noti che, grazie alla sua peculiarità, è indifferente il verso in cui un bipolo "**simmetrico**" viene inserito all'interno di un circuito. Non così per un bipolo "**non simmetrico**" nel quale il terminale convenzionalmente definito positivo risulta sempre contrassegnato da un "+".

e) Un bipolo verrà definito "**controllabile in corrente**" se la sua caratteristica può essere espressa analiticamente come $V=v(I)$. Si può anche dire che un bipolo è controllabile in corrente se ∀ valore di corrente, I, la sua caratteristica ammette uno e un solo valore di tensione, V.
Esempio 1: $V=k\,I^2$ è la caratteristica di un bipolo controllabile in corrente.
Esempio 2: $I-k\,V^2=0$ è la caratteristica di un bipolo nocontrollabile in corrente.

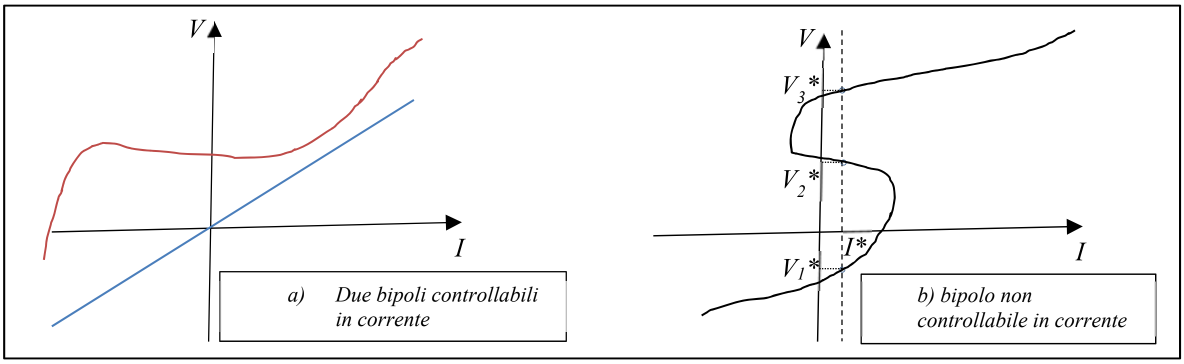

Fig. II.3.3d: *Classificazione dei bipoli: a) due esempi di bipoli controllabili in corrente; b) bipolo non controllabile in corrente: in corrispondenza della corrente I* vi sono tre diverse tensioni ammissibili (V_1*, V_2* e V_3*)*

f) Un bipolo verrà definito "**controllabile in tensione**" se la sua caratteristica può essere espressa analiticamente come $I=i(V)$. Si può anche dire che un bipolo è controllabile in tensione se ∀ valore di tensione, V, la sua caratteristica ammette uno e un solo valore di corrente, I.
Esempio 1: $I=k\,V^2$ è la caratteristica di un bipolo controllabile in tensione (ma non in corrente).
Esempio 2: $V-k\,I^2=0$ è la caratteristica di un bipolo nocontrollabile in tensione.

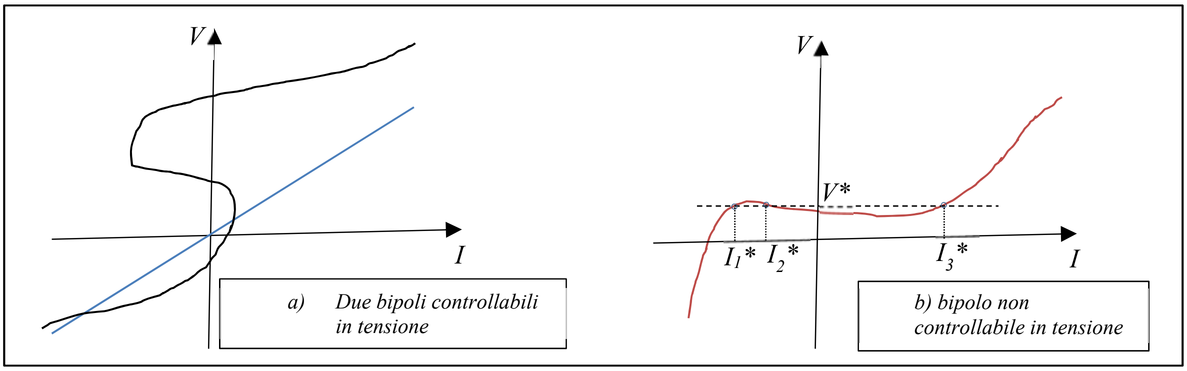

Fig. II.3.3e: *Classificazione dei bipoli: a) due esempi di bipoli controllabili in tensione; b) bipolo non controllabile in tensione: in corrispondenza della tensione V* vi sono tre diverse correnti ammissibili (I_1*, I_2* e I_3*)*

g) Se un bipolo è controllabile contemporaneamente **in tensione** e **in corrente**, la sua caratteristica può essere invertita: cioè se $I=i(V)$ e $V=v(I)$, allora $i(\cdot)=v^{-1}(\cdot)$. Si ricorda che una funzione di una variabile è invertibile se e solo se è monotona.

Esempio 1: $I=k\ V^3$ è la caratteristica di un bipolo controllabile in tensione e in corrente. Questa relazione può, infatti, essere invertita e posta nella forma tipica dei bipoli controllabili in corrente: $V=(I/k)^{1/3}$

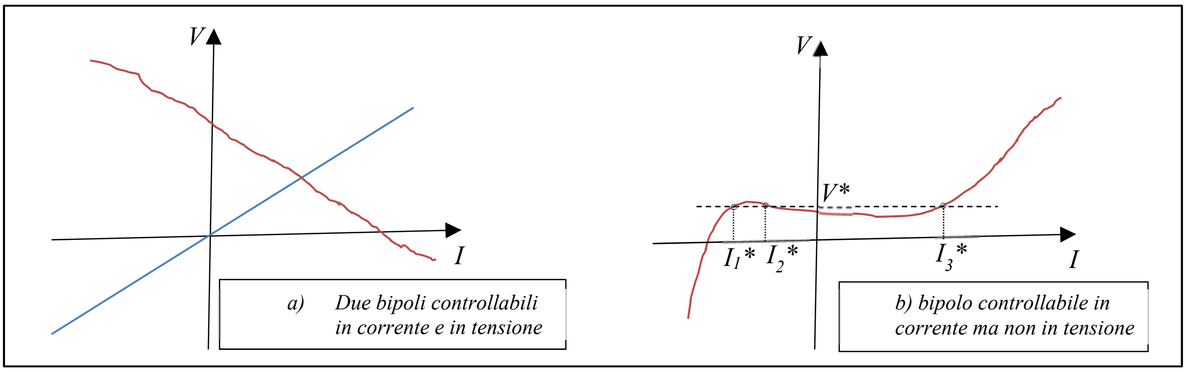

Fig. II.3.3f: *Classificazione dei bipoli: a) due esempi di bipoli controllabili sia in tensione che in corrente: la loro curva caratteristica è invertibile; b) bipolo non monotono controllabile in corrente ma non in tensione: in questo caso la caratteristica non è invertibile*

h) Un bipolo viene definito **passivo** se per ogni punto possibile di lavoro, assorbe una potenza elettrica non negativa (cioè se $P_a \geq 0$ per ogni punto della sua caratteristica).

Si noti che ove si sia adottata la convenzione dell'utilizzatore per le variabili di porta, la precedente diseguaglianza implica che $P_a=VI\geq 0$ e cioè:

- in un bipolo passivo la tensione e la corrente devono avere lo stesso segno (o essere nulle) e la caratteristica deve giacere interamente nel I e nel III quadrante. Ovviamente nel caso si sia adottata la convenzione del generatore, la caratteristica di un bipolo passivo si troverà interamente nel II e nel IV quadrante.
- Se il campo di funzionamento si estende a tutto l'asse reale per la corrente o per la tensione, allora un bipolo passivo deve essere necessariamente inerte. In caso contrario non sarebbe possibile la transizione tra il primo e il terzo quadrante (sotto la CU) senza che una parte (seppur minima) della caratteristica giaccia in uno dei quadranti rimanenti.

Se, operando sotto la CU, esiste almeno un punto di lavoro tale per cui la potenza assorbita risulti strettamente negativa, il bipolo viene definito **attivo**. Dunque un bipolo attivo non deve necessariamente generare potenza elettrica positiva in ogni condizione di funzionamento. È sufficiente che sia in grado di farlo per qualche particolare punto di lavoro, ovvero un bipolo attivo può senz'altro comportarsi come passivo in corrispondenza di qualche punto di lavoro della sua caratteristica.

Un esempio di bipolo attivo è rappresentato dalla comune batteria elettrica di un autoveicolo. Quando viene ricaricata dalla dinamo si comporta come un bipolo passivo mentre, a motore spento, è senz'altro in grado di erogare potenza elettrica positiva. Dal canto opposto, un tipico esempio di bipolo passivo è costituito da una comune lampadina elettrica che percorsa da corrente trasforma inevitabilmente potenza elettrica in potenza di altra natura (luminosa, termica).

Si noti che esistono dei bipoli che assorbono sempre potenza elettrica nulla: $P_a=0$ per ogni punto della caratteristica. In base alla definizione data per un bipolo attivo, questi bipoli vanno considerati senz'altro **passivi**.

Si ritiene opportuno rimarcare che la passività a cui ci si è riferiti in questo paragrafo è quella osservata esclusivamente dal punto di vista elettrico: come è noto, in natura l'energia non sparisce nel nulla ma si trasforma da una forma all'altra. Un componente elettricamente passivo è dunque un componente capace unicamente di convertire energia elettrica in energia di altra natura. Un componente elettricamente attivo è, invece, un componente che, in particolari condizioni di funzionamento, è capace di convertire energia di altra natura in energia elettrica.

Esempio 1 : *$V=k\,I$ con k costante reale positiva* è la caratteristica di un bipolo passivo, infatti: *$P=VI=kI^2\geq 0$ per ogni valore di corrente.*

Esempio 2 : *$V=k$ con k costante reale positiva* è la caratteristica di un bipolo attivo, infatti: *$P=VI=kI<0$ per ogni valore negativo della corrente di porta.*

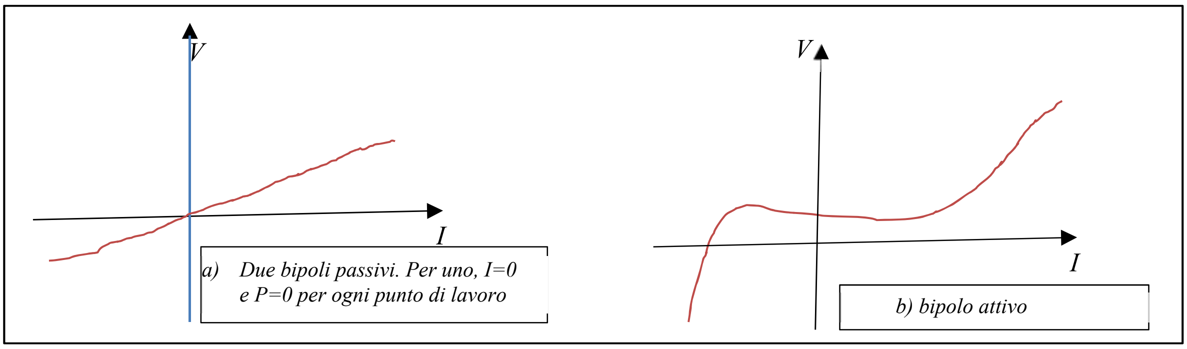

Fig. II.3.3g: *Classificazione dei bipoli: a) due esempi di bipoli passivi:si noti che la caratteristica di uno di questi coincide con l'asse delle ordinate (I=0); b) bipolo attivo: una parte della caratteristica giace nel secondo quadrante.*

i) Un bipolo viene definito **tempo-invariante** se la sua curva caratteristica non dipende dalla variabile temporale. Si noti che la tempo-invarianza non ha nulla a che vedere con la dinamica dei segnali presenti nel circuito ma indica solo che il legame costitutivo tra le variabili di porta non varia nel tempo.

Si considerino i tre esempi seguenti:

1) $V=10\,[\Omega]\,I$; Il legame costitutivo è tempo-invariante e le variabili non dipendono dal tempo (rete in regime stazionario)

2) $v(t)=10\,[\Omega]\,i(t)$; Il legame costitutivo è tempo-invariante e le variabili sono funzioni del tempo (rete dinamica)

3) $v(t)=10[\Omega\, s^{-1}]\;t\,i(t)$; Il legame costitutivo tra le variabili di porta cambia istante per istante e il bipolo è tempo-variante.

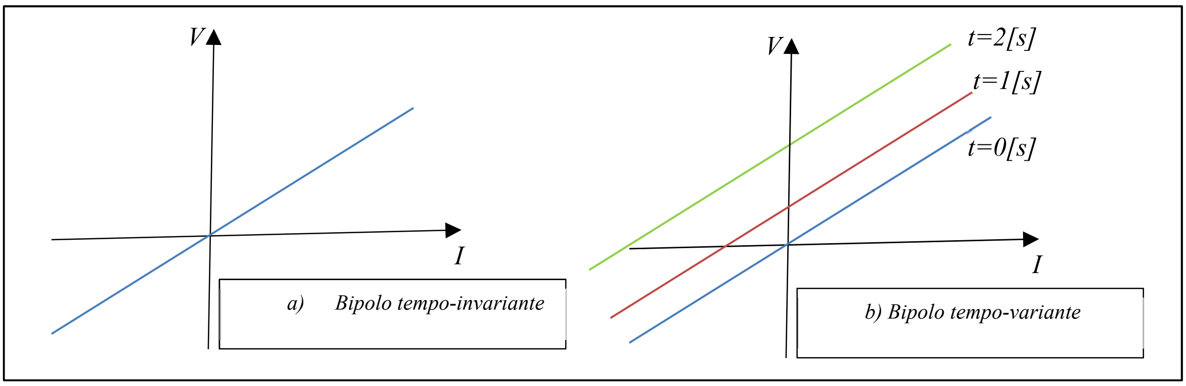

Fig. II.3.3h: *Classificazione dei bipoli: a) bipolo tempo-invariante b) bipolo tempo-variante: il legame tra I e V dipende dal tempo.*

4. I componenti elettrici ideali

Nel presente paragrafo si intende descrivere il comportamento elettrico dei principali componenti elettrici <u>ideali</u> attraverso la cui interconnessione si realizzano i circuiti elettrici ideali. Si noti che i componenti di seguito presentati pur costituendo solo un insieme molto ristretto di quelli presenti nei circuiti utilizzati nella pratica elettronica ed elettrotecnica, sono più che sufficienti per costruire le reti elettriche elementari necessarie a presentare i metodi solutivi generali utilizzati anche per la soluzione dei casi più complessi.

Si intende immediatamente sottolineare che il componente ideale rappresenta un "asintoto" a cui deve tendere il comportamento del corrispondente componente reale.

Nella pratica, i componenti reali sono in grado di riprodurre in maniera abbastanza fedele il comportamento delle loro controparti ideali solo all'interno di intervalli ristretti e ben specificati dal costruttore (data-sheet) dei parametri di funzionamento del circuito elettrico sotto indagine. Tali parametri possono essere legati alle condizioni ambientali (temperatura, umidità, etc.), alla vecchiaia effettiva o operativa dei componenti, alle caratteristiche dei segnali elettrici (intensità, potenza dissipata, frequenza di funzionamento).

In aggiunta, la modellazione accurata di un singolo componente elettrico reale si realizza attraverso uno o più sotto-circuiti elettrici equivalenti (ciascuno costituito da diversi componenti elettrici ideali). Nel caso in cui il costruttore abbia proposto nel data-sheet più modelli equivalenti, la scelta di quello da utilizzare sarà legata alle specifiche condizioni operative del circuito in cui è inserito il componente reale.

Nel caso in cui maggiori informazioni non siano disponibili, è lecito modellare un componente reale attraverso la caratteristica statica associata al suo omologo ideale?

Si è detto nel precedente capitolo che la caratteristica statica rappresenta in senso stretto il comportamento di un componente ideale che operi in regime stazionario ma che può essere ancora utilizzata se le variabili di porta non sono costanti ma variano temporalmente in modo "lento".

Come accennato nel paragrafo I.6, la rapidità di variazione del segnale corrisponde quantitativamente alla frequenza nel caso di segnali sinusoidali, alla massima armonica significativa nel caso di segnali periodici e alla massima frequenza spettrale significativa per i segnali non periodici. Fino a quale valore di frequenza si può ritenere che la caratteristica statica sia ancora valida? La risposta non è univoca ma legata alla geometria e alle caratteristiche materiali del componente fisico modellato dal componente ideale e può essere formulata nei seguenti termini: "Fino a quando il campo elettrico può essere assunto con buona approssimazione irrotazionale e il campo di corrente solenoidale".

In termini quantitativi e per i casi di interesse dal punto di vista delle applicazioni, la caratteristica statica rappresenta bene il comportamento di un componente reale fino a frequenze di alcune centinaia di hertz.

<u>Una nota sulla simbologia</u>.

Anche se, come detto, la caratteristica statica può essere ancora utilizzata nel caso di segnali lentamente variabili nel tempo, in questo capitolo le grandezze elettriche verranno sempre rappresentate utilizzando le lettere maiuscole.

<u>Una nota sul termine "ideale"</u>.

Tutti i componenti di seguito descritti rappresentano delle astrazioni ideali, ovvero un "asintoto" a cui dovrebbe tendere il comportamento dei componenti reali che vengono inseriti nei circuiti utilizzati nella pratica ingegneristica. Per questo motivo, nel seguito, sarà omesso l'aggettivo "ideale" a meno che questo non si renda assolutamente indispensabile (ciò è vero, in particolare, nella definizione dei generatori: il "generatore reale" è, a dispetto del nome, un componente ideale e viene chiamato in questo modo per differenziarlo dal "generatore ideale").

a) Il Resistore

Qualunque componente passivo (e, dunque, inerte) che presenti un legame tra le sue variabili di porta che non abbia natura integro-differenziale può essere classificato, in senso lato, come "resistore".

In senso stretto, col termine compatto di "resistori" si qualificano i soli "resistori ohmici" ovvero i resistori lineari passivi che, sotto la convenzione dell'utilizzatore, soddisfano alla cosiddetta legge di Ohm: $V=RI$ (II.4a.1)

dove il parametro R è un reale positivo che prende il nome di "resistenza" e nel SI si esprime in *[Ohm]* o in *[Ω]*.

Nel seguito, quando si parlerà di resistore ci si riferirà al resistore ohmico a meno di diversa precisazione. In *fig.II.4a.1* è riportata, sotto la convenzione dell'utilizzatore per le variabili di porta, la caratteristica grafica del resistore. Si noti che il valore della resistenza è pari al coefficiente angolare della retta *I-V*. Come evidente dalla caratteristica, Il resistore ohmico è un componente lineare e "simmetrico". Anche la sua passività risulta evidente dal fatto che la caratteristica è interamente compresa nel I e nel III quadrante, ma può essere anche dedotta dall'espressione della potenza assorbita, ricordando che $R>0$ per definizione: $P_a=VI=(RI)I=RI^2\geq 0\ \forall I$

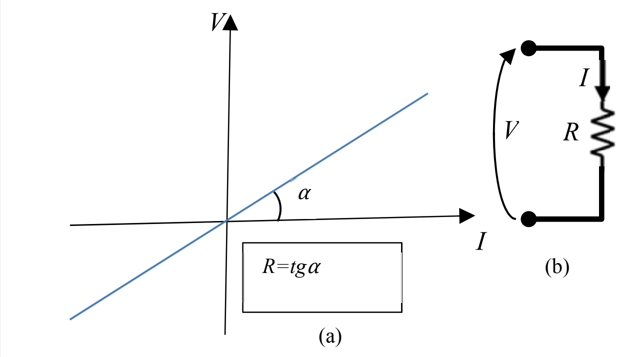

Fig. II.4.1: *(a) Caratteristica del resistore ohmico (CU). (b) Rappresentazione circuitale del resistore*

Il resistore lineare passivo è controllabile in corrente ed in tensione, infatti la sua caratteristica può essere facilmente invertita: $V=RI \rightarrow I=R^{-1}V= GV$, dove il parametro G prende il nome di conduttanza e nel SI si esprime in [Siemens], ovvero in [Ohm^{-1}], ovvero in [Ω^{-1}], ovvero in *[mhO]*.

A causa del fenomeno dell'invecchiamento, la resistenza dei resistori reali cambia nel tempo (cambia la resistività) e dunque tutti i resistori reali sono tempo-varianti. D'altra parte, i tempi in cui le variazioni di resistenza diventano significativi sono lunghissimi rispetto ai normali tempi di osservazione di un circuito, pertanto ai fini pratici si può assumere che il resistore ohmico sia tempo-invariante.

Se si considera un conduttore omogeneo cilindrico filiforme immerso in un materiale isolante che abbia lunghezza l, sezione S e resistività ρ (o, se si preferisce, conducibilità $\sigma=\rho^{-1}$), la sua resistenza è pari a $R= \rho\ l/S$.

In generale il valore della resistività di un materiale conduttore cambia con la temperatura $(\rho(T)= \rho_0(1+\alpha(T-T_0))$, dove T è la temperatura operativa, T_0 la temperatura di riferimento (pari, usualmente, a 20°C), ρ_0 è il valore della resistività alla temperatura di riferimento e α un parametro costante (o più spesso, in dipendenza dal materiale, una funzione della temperatura). Poiché il passaggio di corrente attraverso il resistore provoca la trasformazione di potenza elettrica in potenza di altra natura e, tra queste, compare il termine termico, nelle condizioni operative si ha inevitabilmente il riscaldamento del componente e, dunque, una variazione della resistenza. Il legame funzionale resistenza-corrente implicherebbe la presenza di una non-linearità intrinseca nella modellazione di un resistore reale attraverso la relazione (*II.4a.1)*. In pratica, se il circuito dopo alcuni secondi perviene in uno stato di regime, l'inerzia termica consente alla temperatura del resistore (e, di conseguenza, alla sua resistenza) di stabilizzarsi attorno a un valore poco sensibile alle rapide fluttuazioni della corrente. In questa situazione la relazione *(II.4a.1)* può essere considerata sicuramente lineare.

In *fig.II.4.1a* è riportato il simbolo grafico più utilizzato per rappresentare un resistore in un circuito elettrico.

Si noti che:

- Se $R<0$ (situazione non fisica) il resistore diventa un componente attivo.
- se si utilizza la convenzione del generatore per le variabili di porta (vedi Fig. II.4.1a, cambia la relazione caratteristica ma non la natura passiva del componente, infatti se nella relazione (II.4a.1) si sostituisce alla corrente I, la nuova variabile I' (n.b. $I'=-I$) ci si troverà ad operare sotto la CG. La relazione (II.4a.1) si trasforma nella nuova relazione caratteristica:

$$V=-RI' \quad (II.4a.2)$$

Ricordando l'espressione della potenza assorbita sotto la convenzione del generatore, risulta:

$$P_a=-VI'=-(-RI')I'=RI'^2\geq 0 \ \forall I'$$

Pertanto, come atteso, la convenzione utilizzata per le variabili di porta non cambia la natura passsiva del componente.

Si deduce da questa osservazione un risultato importante e assolutamente generale:

Le convenzioni delle variabili di porta possono essere scelte in maniera assolutamente arbitraria.

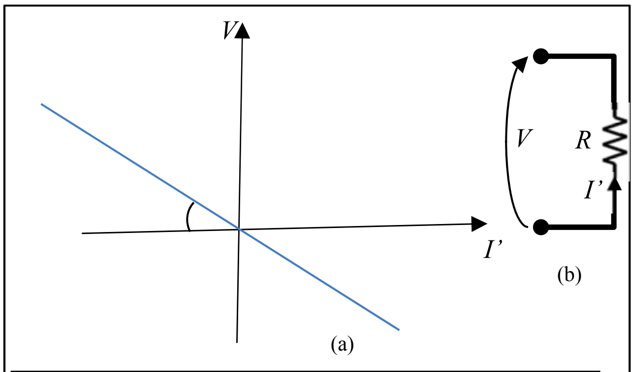

Fig. II.4.1a: *(a) Caratteristica del resistore ohmico (CG).*
(b) Rappr.circuitale del resistore ohmico

b) Il corto circuito

È un bipolo la cui tensione ai terminali risulta costante e pari a zero. (al contrario della corrente di porta il cui valore dipende dalla caratteristica del bipolo esterno a cui il corto circuito è collegato ed è in generale diverso da zero): $V=0; I\neq 0$.

Si noti che questo componente è a tutti gli effetti un resistore di resistenza nulla, $R=0$, e, in quanto tale, la sua caratteristica è una retta che si sovrappone perfettamente con l'asse delle ascisse.

In quanto assimilabile ad un resistore, il corto circuito ideale è un bipolo normale ed inerte (e, dunque, lineare).

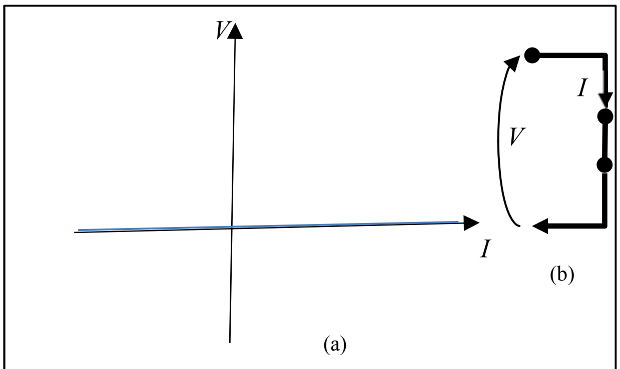

Fig. II.4.1b: *(a) Caratteristica del corto circuito ideale (CU).*
(b) Rappr. circuitale del corto circuito ideale

Poiché la $P_a=V*I=0*I=0\ [W]$ per ogni condizione di funzionamento, il corto circuito è un bipolo passivo.

Si noti che questo componente è controllabile in corrente (infatti, per ogni I, il valore della tensione esiste ed è unico), ma non in tensione (infatti non sono ammissibili punti di lavoro con tensione diversa da zero).

c) Il "Generatore indipendente di tensione" (o "Generatore di Forza Elettro-Motrice" (FEM))

Il generatore indipendente ideale di tensione (o più semplicemente il generatore ideale di tensione") rappresenta una delle possibili sorgenti di alimentazione dei circuiti elettrici.

È un bipolo la cui tensione ai terminali risulta costante (al contrario della corrente che dipende dalla caratteristica del bipolo esterno a cui è collegato): $V=E^*$.

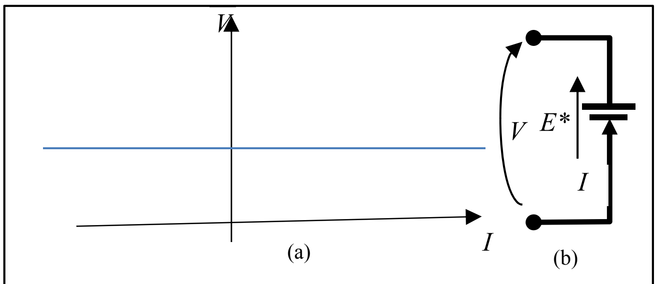

Fig. II.4.1c: *(a) Caratteristica del generatore ideale di tensione (FEM) sotto la convenzione del generatore (CG)*

La quantità E^* è nota (fa parte dei dati di ingresso del problema) e prende il nome di Forza Elettromotrice.

Dal punto di vista fisico, E^* rappresenta il lavoro fatto da forze di natura non elettromagnetica per portare la carica unitaria dal terminale negativo a quello positivo lungo un percorso "ragionevole" generico.

Questo componente presenta una caratteristica normale ma, fatta eccezione per il caso di $E^*=0$, non inerte e dunque non-lineare.

È un componente attivo (cioè in grado, se opera in una certa parte della curva caratteristica, di convertire potenza di altra natura in potenza elettrica). Il suo essere attivo è testimoniato dal fatto che, sotto la CG, una parte della caratteristica giace nel primo quadrante oppure può essere verificata notando che il valore algebrico della potenza generata $P_g=E^*I$ è positivo, negativo o nullo a seconda del particolare valore della corrente (a questo proposito si ribadisce che la corrente non deve obbligatoriamente essere diretta nel verso indicato dalla freccia della FEM)

Nel caso particolare in cui $E^*=0$ la caratteristica si appiattisce sull'asse delle ascisse e diventa identica a quella del bipolo "corto circuito ideale".

Pertanto il corto circuito ideale può essere visto anche come un particolare generatore ideale di tensione.

Questo bipolo, come il corto circuito ideale, è controllabile in corrente ma non in tensione (infatti alla sua curva caratteristica appartengono i soli punti di lavoro che hanno un valore della tensione uguale a quello della FEM imposta).

d) Il circuito aperto

È un bipolo che ammette corrente di porta nulla per ogni possibile punto di lavoro

Si noti che la tensione di porta in generale non è nulla e il suo valore dipende dalla caratteristica del bipolo esterno a cui il circuito aperto è collegato:

$$I=0;\ V\neq 0.$$

Si noti che questo componente è a tutti gli effetti un resistore di conduttanza nulla, $G=0$, e, in quanto tale, la sua caratteristica è una retta che si sovrappone perfettamente con l'asse delle ordinate.

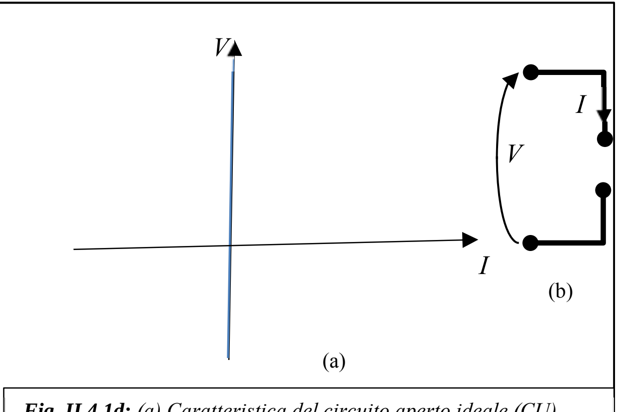

Fig. II.4.1d: *(a) Caratteristica del circuito aperto ideale (CU). (b) Rappr. circuitale del circuito aperto ideale*

In quanto assimilabile ad un resistore, il corto circuito ideale è un bipolo normale ed inerte (e, dunque, lineare).

Poiché la $P_a=V^*I=V^*0=0\ [W]$ per ogni condizione di funzionamento, il corto circuito è un bipolo passivo.

Si noti che questo componente è controllabile in tensione (infatti, per ogni V, il valore della corrente esiste ed è unico), ma non in corrente (infatti non sono ammissibili punti di lavoro con corrente diversa da zero).

e) Il "Generatore indipendente ideale" di corrente

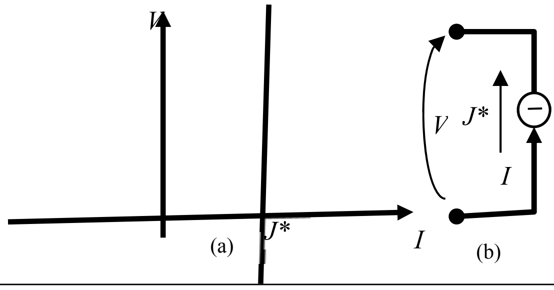

Fig. II.4.1e: *(a) Caratteristica del generatore ideale di corrente sotto la convenzione del generatore (CG)*

Il generatore indipendente ideale di corrente (o più semplicemente, il generatore ideale di corrente) rappresenta un secondo possibile tipo di sorgente di alimentazione nei circuiti elettrici ideali.

È un bipolo la cui corrente di porta risulta costante (al contrario della tensione che dipende dalla caratteristica del bipolo esterno a cui il generatore di corrente è collegato): $I=J^*$.

La quantità J^* è nota (fa parte dei dati di ingresso del problema) e prende il nome di Corrente impressa.

Questo componente è normale ma, fatta eccezione per il caso di $J^*=0$, non inerte e dunque non-lineare.

È un componente attivo (cioè in grado, se opera in una certa parte della curva caratteristica, di convertire potenza di altra natura in potenza elettrica). Il suo essere attivo è testimoniato dal fatto che, sotto la CG, una parte della caratteristica giace nel primo quadrante oppure può essere verificata notando che il valore algebrico della potenza generata $P_g=J^*V$ è positivo, negativo o nullo a seconda del particolare valore della corrente (a questo proposito si ribadisce che la tensione, orientata nel verso della corrente impressa (come in fig. II.4.1e), non deve obbligatoriamente essere positiva).

Nel caso particolare in cui $J^*=0$ la caratteristica si appiattisce sull'asse delle ordinate e diventa identica a quella di un "circuito aperto ideale".

Pertanto il circuito aperto ideale può essere visto anche come un particolare generatore ideale di corrente.

Questo bipolo, come il circuito aperto ideale, è controllabile in tensione ma non in corrente (infatti alla sua curva caratteristica appartengono i soli punti di lavoro che hanno un valore della corrente uguale a quello della corrente impressa).

f) L'induttore lineare passivo

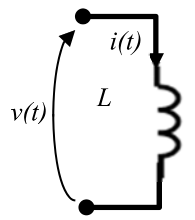

Fig. II.4.1f: *Rappresentazione circuitale dell'induttore passivo*

L'induttore lineare passivo è un componente dinamico, vale a dire che la sua relazione caratteristica non è di tipo algebrico ma integro-differenziale e, sotto la convenzione dell'utilizzatore, assume la seguente espressione:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}\forall t > t_0;\ i(t_0) = I_0 \qquad \text{(II.4.1f)}$$

dove il parametro caratteristico L, strettamente positivo per gli induttori passivi, prende il nome di induttanza e nel SI si esprime in Henry. In ossequio al teorema di Cauchy-Lipschitz, è stato precisato il valore assunto dalla variabile corrente nell'istante iniziale t_0 per garantire l'unicità della soluzione.

La relazione può essere invertita esprimendo la corrente in funzione della tensione di porta:

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t')dt' \quad \text{(II.4.2f)}$$

L'induttore, a differenza del resistore, è un componente conservativo, cioè non è in grado di dissipare potenza elettrica (ovvero di trasformare energia elettromagnetica in energia di altra natura).

Negli istanti in cui la potenza elettrica assorbita dal componente risulta essere positiva, $p_a(t)=v(t)i(t)>0$, l'induttore accresce il suo stato energetico, immagazzinando energia magnetica. Viceversa, negli istanti in cui la potenza elettrica risulta essere negativa, il componente cede energia al resto della rete riducendo il suo stato energetico. In ogni istante di tempo, t, l'energia magnetica immagazzinata può essere calcolata a partire dalla corrente che circola nel componente attraverso la relazione algebrica:

$$W_m(t) = \frac{1}{2} L\, i(t)^2 \quad (\mathrm{II}.4.3\mathrm{f})$$

Poiché lo stato energetico dell'induttore dipende dalla sola corrente che lo attraversa, si dice che la corrente che passa attraverso un induttore è una "**variabile di stato**".

Dall'esame della relazione (II.4.3.f) è possibile pervenire alle seguenti conclusioni:

1) L'energia magnetica immagazzinata non può mai assumere valori negativi: ovvero, il componente è in grado di rilasciare alla rete esterna, al massimo, la quantità di energia che la rete esterna gli aveva ceduto negli intervalli di tempo precedenti.
2) Il componente raggiunge il suo livello energetico minimo (e pari a zero) solo quando è a riposo, cioè non è percorso da corrente elettrica.

Si noti che nel caso in cui l'induttore sia inserito in una rete che opera in regime stazionario (*I,V*= costanti nel tempo), la relazione caratteristica (II.4.1f) si trasforma nella relazione caratteristica di un corto circuito ideale: v(t)=0.

Pertanto a tutti i fini pratici, **nelle reti in regime stazionario**, l'induttore può essere sostituito con un corto-circuito ideale

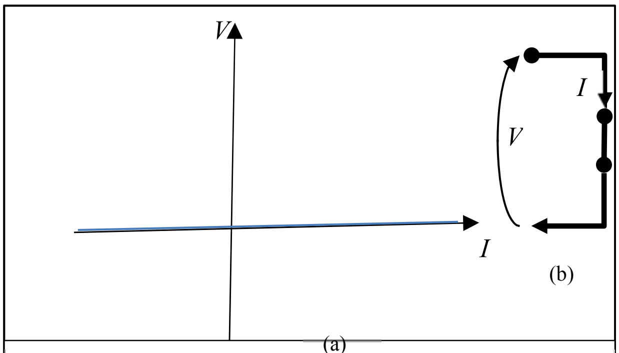

Fig. II.4.1f2: *(a) Caratteristica e b) rappresentazione circuitale dell'induttore quando viene inserito in una rete che opera in regime stazionario*

g) Il condensatore lineare passivo

Il condensatore lineare passivo è il componente dinamico duale dell'induttore[1], pertanto a sua relazione caratteristica, anch'essa integro-differenziale, sotto la convenzione dell'utilizzatore, assume la seguente espressione:

$$i(t) = c\frac{dv(t)}{dt} \forall t > t_0;\; v(t_0) = V_0 \qquad (\mathrm{II}.4.1\mathrm{g})$$

dove il parametro caratteristico C, strettamente positivo per i condensatori passivi, prende il nome di capacità e nel SI si esprime in Farad. Come nel caso dell'induttore occorre precisare il valore assunto dalla variabile indipendente (la tensione, nel nostro caso) all'istante iniziale t_0 per garantire l'unicità della soluzione.

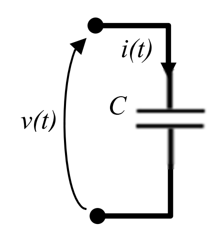

Fig. II.4.1g: *Rappresentazione circuitale del condensatore passivo*

La relazione può essere invertita esprimendo la tensione in funzione della corrente di porta:

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')dt' \quad (\mathrm{II}.4.2\mathrm{g})$$

Il condensatore, come l'induttore, è un componente conservativo, cioè non è in grado di dissipare potenza elettrica (ovvero di trasformare energia elettromagnetica in energia di altra natura).

[1] Due componenti elettrici si dicono duali se la relazione caratteristica dell'uno si ricava da quella dell'altro operando le seguenti sostituzioni $i \leftrightarrow v;\; L \leftrightarrow C;\; R \leftrightarrow G; serie \leftrightarrow parallelo$

Negli istanti in cui la potenza elettrica assorbita dal componente risulta essere positiva, $p_a(t)=v(t)i(t)>0$, il condensatore accresce il suo stato energetico, immagazzinando energia elettrostatica. Viceversa, negli istanti in cui la potenza elettrica risulta essere negativa, il componente cede energia al resto della rete riducendo il suo stato energetico. In ogni istante di tempo, t, l'energia elettrica immagazzinata può essere calcolata a partire dalla tensione che circola nel componente attraverso la relazione algebrica:

$$W_m(t) = \frac{1}{2} C\, v(t)^2 \quad \text{(II.4.3g)}$$

Poiché lo stato energetico del condensatore dipende dalla sola tensione che lo attraversa, si dice che la tensione che si misura ai capi di un condensatore è una "**variabile di stato**".

Dall'esame della relazione (II.4.3.g) è possibile pervenire alle seguenti conclusioni:

3) L'energia elettrica immagazzinata non può mai assumere valori negativi: ovvero, il componente è in grado di rilasciare alla rete esterna, al massimo, la quantità di energia che la rete esterna gli aveva ceduto negli intervalli di tempo precedenti.
4) Il componente raggiunge il suo livello energetico minimo (e pari a zero) solo quando è a riposo, cioè la tensione ai morsetti è nulla.

Si noti che nel caso in cui il condensatore sia inserito in una rete che opera in regime stazionario (I, V= costanti nel tempo), la relazione caratteristica (II.4.1G) si trasforma nella relazione caratteristica di un circuito aperto ideale: i(t)=0.

Pertanto a tutti i fini pratici, **nelle reti in regime stazionario**, il condensatore può essere sostituito con un circuito aperto ideale

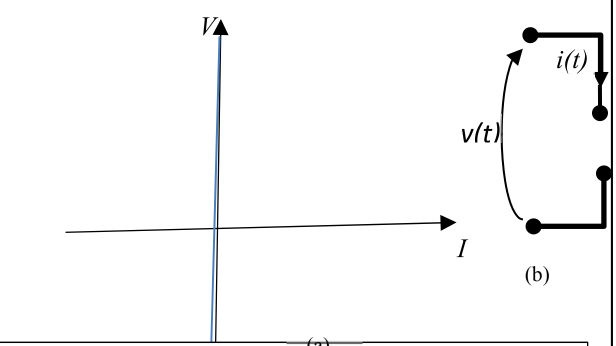

Fig. II.4.1g2: *(a) Caratteristica e b) rappresentazione circuitale del condensatore quando viene inserito in una rete che opera in regime stazionario*

5. Le leggi di Kirchhoff

Le due equazioni presentate nel corrente paragrafo rappresentano i pilastri fondamentali su cui si basa la teoria dei circuiti a parametri concentrati e vengono adoperate per la definizione del modello matematico associato alla soluzione di un generico circuito elettrico.

Quando parliamo di "**generico** circuito elettrico" intendiamo dire che il circuito può funzionare in condizioni di regime (stazionario, sinusoidale o periodico) oppure essere soggetto ad un comportamento di tipo aperiodico (quale, ad esempio, un'evoluzione transitoria). Inoltre nel circuito possono essere presenti componenti tempo-varianti e/o non-lineari. L'unica limitazione è che valgano le ipotesi per la validità dell'approssimazione a parametri concentrati:

con buona approssimazione (dal punto di vista ingegneristico) sia possibile assumere che il campo elettrico sia irrotazionale e che il campo di corrente sia solenoidale in tutti i punti esterni alle superfici limite che circondano i componenti ideali che costituiscono il circuito.

Le leggi di Kirchhoff rappresentano dei vincoli topologici sulle variabili elettriche della rete, vale a dire che queste equazioni ***non dipendono dalla natura dei componenti della rete ma "solo dal modo in cui i componenti sono interconnessi fra loro"***. Pertanto per applicare queste leggi alla generica rete e definire le equazioni che regolano il comportamento delle sue variabili di porta è irrilevante specificare la natura dei componenti costituenti la rete in esame.

Per questa regione nel presente paragrafo i componenti della rete saranno genericamente rappresentati attraverso un rettangolo.

a) La legge di Kirchhoff alle correnti (LKC)

In figura II.5.1 è rappresentata una parte di un circuito a parametri concentrati per il quale si intendono scrivere le LKC. Allo scopo si definisca una generica superficie chiusa, *S*, in modo che questa non invada in nessun caso le superfici limite associate ai componenti (le scatole rettangolari) e tagli un numero di lati della rete diverso da zero. Si assegnino dei riferimenti arbitrari a tutte le correnti dei terminali tagliati dalla superficie.

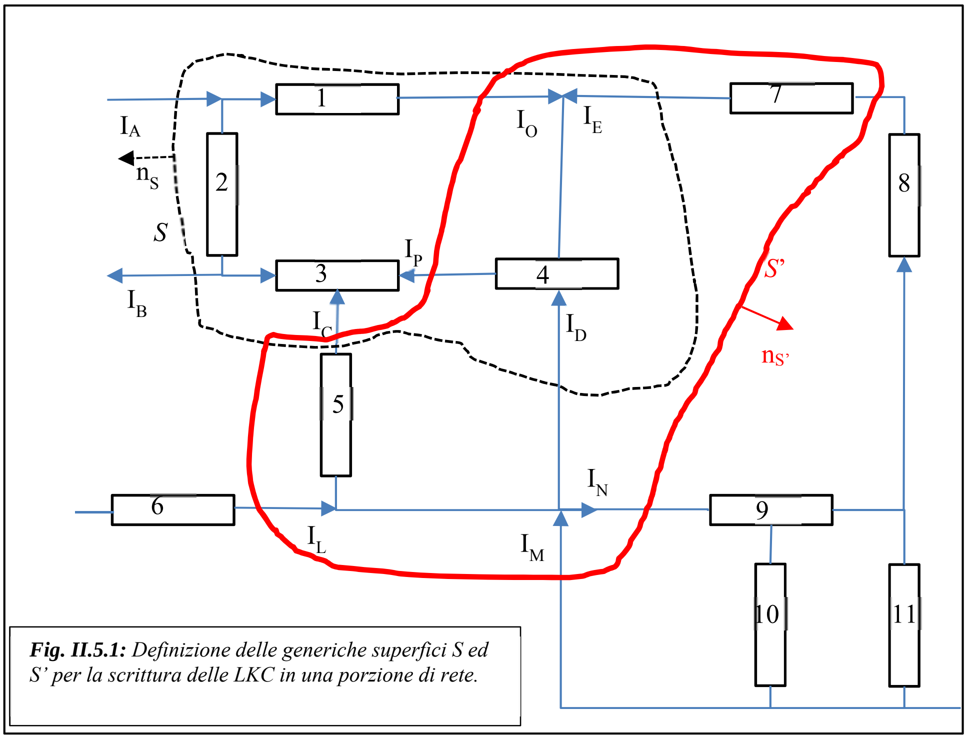

Fig. II.5.1: *Definizione delle generiche superfici S ed S' per la scrittura delle LKC in una porzione di rete.*

La legge di Kirchhoff alle correnti afferma che ***le correnti che circolano nei terminali intersecati dalla superficie S sono vincolati tra loro in modo tale che una loro particolare combinazione lineare risulti nulla***. Per determinarla, si attribuisca un orientamento alla normale, $\mathbf{n}_S$, alla superficie (ad esempio quello uscente, come in figura II.5.1).

Il coefficiente da attribuire a ciascuna corrente associata ai terminali che intersecano *S* sarà pari a:

- +1 se l'orientamento della corrente intersecante la superficie è coerente col verso assunto per la normale.
- -1 se il verso della corrente e quello assunto per la normale alla superficie sono discordi.

Nel caso riportato in figura si assegnerà il coefficiente -1 a tutte le correnti il cui orientamento punta verso la superficie (cioè alle correnti che "entrano" nella superficie) e il coefficiente +1 a tutte le correnti che "escono" dalla superficie.

La legge di Kirchhoff alle correnti per la superficie *S* assume pertanto la seguente forma:

$$-I_A+I_B-I_C-I_D-I_E=0 \quad \textbf{\textit{LKC alle correnti per la superficie S}} \qquad \text{(II.5a.1)}$$

Come secondo esempio, si scriva la LKC alla superficie *S'*. Anche in questo caso l'orientamento assunto per la normale è quello uscente dalla superficie. Si ha pertanto:

$$-I_O+I_P+I_C-I_L-I_M+I_N-I_E=0 \quad \textbf{\textit{LKC alle correnti per la superficie S'}} \qquad \text{(II.5a.2)}$$

Si noti che se, lasciando immutato il verso delle correnti, si fosse assunto per le normali ad S e S' l'orientamento opposto (dall'esterno all'interno delle superfici ovvero "entrante" nelle superfici) le equazioni precedenti avrebbero assunto la forma:

$$I_A-I_B+I_C+I_D+I_E=0 \quad \textbf{\textit{LKC alle correnti per la superficie S}} \qquad \text{(II.5a.1')}$$

$$I_O-I_P-I_C+I_L+I_M-I_N+I_E=0 \quad \textbf{\textit{LKC alle correnti per la superficie S'}} \qquad \text{(II.5a.2')}$$

Si noti che l'eq. II.5a.1' (risp. l'eq. II.5a.2') si ricava dall'eq. II.5a.1 (risp. dall'eq. II.5a.2) moltiplicando il primo e secondo membro per il coefficiente costante k=-1. Questo significa che l'eq. II.5a.1' è linearmente dipendente dall'eq. II.5a.1 e, sostanzialmente, è la stessa equazione. Da questa osservazione si perviene alla seguente importante conclusione di validità assolutamente generale:

"La scelta dei riferimenti per le normali alle superfici alle quali si scrivono le LKC, come pure la scelta dei versi di riferimento delle correnti nei lati del circuito modificano solo formalmente il modello matematico associato alla soluzione ma, nella sostanza, non cambiano la soluzione del circuito".

In altre parole, **gli orientamenti per le correnti dei lati del circuito e gli orientamenti delle superfici gaussiane utilizzate per scrivere le LKC possono essere scelti in maniera totalmente arbitraria** e qualunque sia la scelta effettuata si perviene sempre alla soluzione corretta per il circuito.

Va tuttavia immediatamente sottolineato che, una volta scelti, gli orientamenti delle correnti non possono essere più mutati nel corso della ricerca della soluzione.

Si noti ancora che il pezzo di rete contenuto all'interno della superficie gaussiana S (idem dicasi per S') è a tutti gli effetti un N-polo e pertanto la LKC può essere interpretata anche come una immediata conseguenza della definizione di N-polo (si ricordi che una delle proprietà è che la sommatoria delle correnti entranti nell'N-polo deve essere nulla). Infine, in base alla LKC, nei circuiti a parametri concentrati tutti i componenti devono mantenersi elettricamente neutri. Come evidente dall'esempio selezionato, le LKC valgono per tutte le reti a parametri concentrati. Tuttavia all'interno del nostro corso ci limiteremo a studiare esclusivamente reti costituita da bipoli o, al più da doppi bipoli lasciando a corsi più avanzati la trattazione di circuiti contenenti N-poli generici (quali il transistore, il FET oppure il Mosfet). Con questa precisazione, possiamo ora affermare che risolvere le reti elettriche che vi verranno proposte di volta in volta significherà calcolare le condizioni di funzionamento di ogni componente (bipolo o doppio bipolo) della rete, cioè l'andamento temporale di tutte le variabili di porta della rete: correnti e tensioni.

b) La legge di Kirchhoff alle tensioni (LKT)

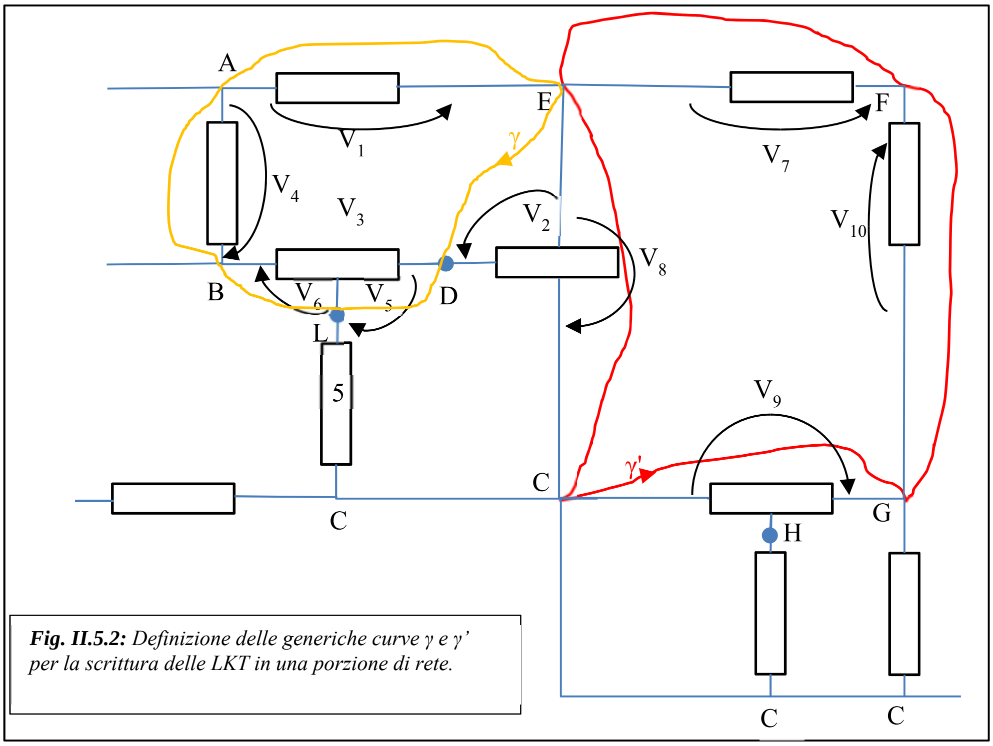

Fig. II.5.2: *Definizione delle generiche curve γ e γ' per la scrittura delle LKT in una porzione di rete.*

In analogia al caso precedente è possibile, attraverso le LKT, stabilire delle relazioni lineari tra le tensioni che insistono ai capi dei componenti della rete.
Denotiamo **provvisoriamente** col termine "nodi" i punti della rete in cui confluiscono almeno due terminali appartenenti a due componenti diversi. Considereremo, tuttavia, un unico nodo tutti punti della rete collegati tra loro mediante corto-circuiti ideali (ad esempio, il nodo C di Fig.5.2).
Ogni nodo del circuito in fig. II.5.2 è stato identificato con una lettera.
Si definisca una generica linea chiusa orientata γ col vincolo che questa non tagli le superfici limite dei componenti ed intersechi la rete esclusivamente in corrispondenza dei nodi.
Ricordando l'ipotesi di irrotazionalità del campo elettrico nelle regioni dello spazio esterne alle superfici che limitano i componenti, risulta:

$$0 = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot \hat{t}dl = \int_{A}^{E} \vec{E} \cdot \hat{t}dl + \int_{E}^{D} \vec{E} \cdot \hat{t}dl + \int_{D}^{L} \vec{E} \cdot \hat{t}dl + \int_{L}^{B} \vec{E} \cdot \hat{t}dl + \int_{B}^{A} \vec{E} \cdot \hat{t}dl = V_{AE} + V_{ED} + V_{DL} + V_{LB} + V_{BA}$$

Si definiscano, come in fig. II.5.2, in maniera arbitraria gli orientamenti per le tensioni di porta dei bipoli e per le tensioni fra i terminali di ciascun N-polo presente.
È abbastanza semplice a questo punto riscrivere l'equazione precedente sostituendo alle tensioni tra i nodi, le tensioni di porta dei bipoli e quelle tra i terminali degli N-poli:

$$0 = V_{AE} + V_{ED} + V_{DL} + V_{LB} + V_{BA} = -V_1 - V_2 - V_5 - V_6 + V_4 \qquad \text{(II.5b.1)}$$

Si noti che allo stesso risultato si poteva giungere più semplicemente percorrendo la curva γ e sommando algebricamente le tensioni che cadono ai capi dei componenti interessati dal percorso di γ con la convenzione di moltiplicare per il coefficiente "+1" le tensioni orientate secondo il verso di γ e moltiplicare per il coefficiente "-1" le tensioni orientate col verso opposto.
Usando questa convenzione per la curva chiusa γ, si perviene all'equazione:

$$0 = V_1 + V_2 + V_5 + V_6 - V_4 \qquad \text{(II.5b.1')}$$

che coincide con la (II.5b.1) a patto di moltiplicare per -1 il primo e il secondo membro.
Come secondo esempio si scriva la LKT per la curva γ':

$$0 = V_9 + V_{10} - V_7 + V_8$$

A riprova che questa equazione è conseguenza del fatto che la circuitazione del campo elettrico è pari a zero lungo un percorso chiuso, suddividiamo γ' nei quattro tratti compresi tra i nodi toccati in successione e calcoliamo l'integrale di linea tra ciascun tratto. Si otterrà che la somma delle differenze di potenziale tra i nodi consecutivi risulta pari a zero. Facendo sempre riferimento alle tensioni tra i nodi, riscriviamo l'espressione tenendo conto degli orientamenti scelti per le tensioni che cadono ai capi dei componenti interessati dal percorso. Infine sostituiamo direttamente alle tensioni tra i nodi le tensioni ai capi dei componenti.

$$0 = V_{CG} + V_{GF} + V_{FE} + V_{EC} = -V_{GC} - V_{FG} + V_{FE} - V_{CE} = -V_9 - V_{10} + V_7 - V_8$$

Moltiplicando per -1 il primo e il secondo membro, si è pervenuti alla stessa equazione determinata in precedenza.

Le leggi di Kirchhoff alle tensioni e alle correnti sono leggi a carattere topologico. Vale a dire che esse dipendono soltanto dal modo in cui sono interconnessi tra loro i componenti del circuito e non dalla loro curva caratteristica. In altre parole le LKT e le LKC possono essere scritte senza preoccuparsi del fatto che il componente presente su un certo lato del circuito assegnato sia un resistore piuttosto che un generatore di tensione o di corrente.

6. Collegamenti di bipoli e bipoli equivalenti.

a) Bipoli equivalenti

Si consideri una generica porzione di rete costituita per semplicità da soli bipoli, quale ad esempio quella illustrata in fig. II.6.1. Si supponga che questa “sotto-rete” comunichi col resto del circuito attraverso la coppia di terminali A e B. La sotto-rete, nel suo complesso, costituisce un bipolo. Il legame tra le sue variabili di porta V_{AB} e I_{AB} sia espresso attraverso la relazione funzionale: $V_{AB} = f(I_{AB})$. Si noti che tale legame dipende sia dalle curve caratteristiche dei bipoli che costituiscono la sottorete sia dal modo in cui questi bipoli sono interconnessi fra loro.

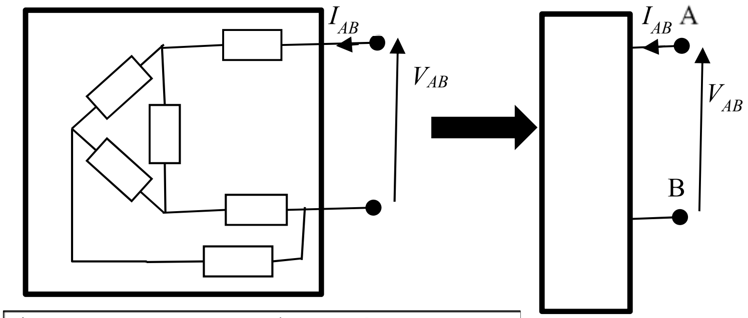

Fig. II.6.1: una rete complessa può essere sostituita con un bipolo equivalente

È facilmente intuibile che, dal punto di vista della rete esterna collegata ai morsetti A-B, nulla cambia se la sottorete complessa viene sostituita da un unico bipolo **che ammette il medesimo legame funzionale**, $V_{AB} = f(I_{AB})$, **tra le sue variabili di porta**. Il bipolo che sostituisce la rete di partenza viene detto “equivalente”.

Dunque: **Due bipoli sono detti equivalenti se ammettono la stessa relazione caratteristica.**

Si ritiene opportuno sottolineare quanto segue:

1) Quando si parla di bipoli equivalenti ad una rete (o ad una parte o sezione di rete) è indispensabile precisare i due terminali dai quali si guarda la rete (o la sezione di rete) oggetto della sostituzione.
2) A seguito della sostituzione, nulla cambia ai fini della soluzione per la rete esterna al bipolo sostituito col suo equivalente. Tuttavia il bipolo equivalente non può essere in alcun modo utilizzato per ottenere informazioni sul comportamento della sezione di rete che ha sostituito.
3) È quasi pleonastico sottolineare che due bipoli equivalenti non sono uguali: hanno la stessa relazione funzionale tra le variabili di porta ma generalmente differiscono quanto a forma, dimensioni, etc.

b) Serie di bipoli

Due bipoli si dicono collegati in serie se uno ed un solo terminale del primo bipolo è collegato ad uno ed un solo terminale del secondo bipolo e, inoltre, nel punto di connessione non convergono terminali di altri bipoli. Una definizione alternativa è la seguente: ***due bipoli si dicono collegati in serie se sono attraversati dalla stessa corrente*** (vedi fig.II.6.2). Si assuma che i due bipoli collegati in serie siano entrambi controllabili in corrente: $\begin{cases} V_1 = f_1(I) \\ V_2 = f_2(I) \end{cases}$

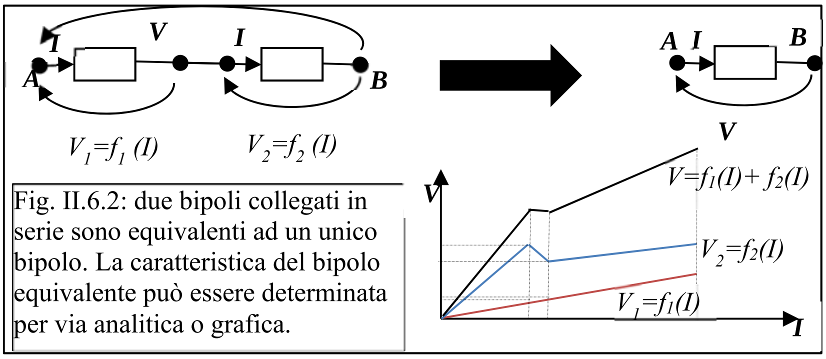

Fig. II.6.2: due bipoli collegati in serie sono equivalenti ad un unico bipolo. La caratteristica del bipolo equivalente può essere determinata per via analitica o grafica.

Applicando la LKT, la tensione totale ai capi dei due componenti collegati in serie risulta pari a:

$$V = V_1 + V_2 = f_1(I) + f_2(I) = f(I)$$

Dove $V = f(I)$ è la relazione caratteristica del bipolo equivalente ai due collegati in serie.

In ossequio alla definizione di equivalenza se ai due bipoli collegati in serie si sostituisce il bipolo equivalente la rete esterna non si accorgerà della differenza. Si ricordi tuttavia che l’equivalenza vale solo ai fini esterni.

Si noti che le considerazioni precedenti si estendono facilmente al caso di N-bipoli di serie:

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_j + ... + V_N = f_1(I) + f_2(I) + ... + f_j(I) + ... f_N(I) = f(I)$$

Casi particolari (serie di ***bipoli lineari*** elementari)

1. **Serie di due resistori**

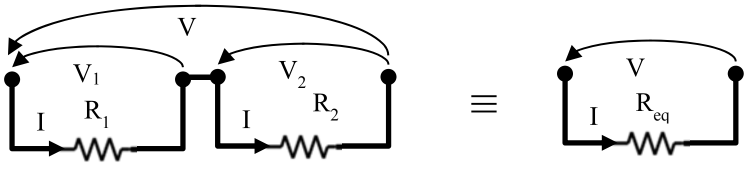

Fig. II.6.3: *Collegamento in serie di due resistori*

Due resistori di resistenza pari risp. a R_1 e R_2 collegati in serie sono equivalenti ad un resistore di resistenza $R_{eq}=R_1+R_2$.

Difatti risulta $\begin{cases} V_1 = R_1\ I \\ V_2 = R_2\ I \end{cases} \quad \rightarrow \quad V = V_1 + V_2 = R_1\ I + R_2\ I = \left(R_1 + R_2\right)\ I;$

e pertanto: $V_1 = V\dfrac{R_1}{R_1 + R_2}; V_2 = V\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$

Questa configurazione viene chiamata anche “partitore di tensione” in quanto la tensione totale V che cade ai capi dei due resistori collegati in serie viene ripartita tra i resistori in maniera proporzionale alle loro resistenze.

Nel caso generale di N-resistori collegati in serie le equazioni precedenti diventano:

$$V_j = R_j\ I, j = 1:N \rightarrow \quad V = V_1 + ... + V_j + ... + V_N = \left(R_1 + ... + R_j + ... + R_N\right)\ I;$$

e pertanto: $V_j = V\dfrac{R_j}{R_{eq}}; R_{eq} = \sum_{j=1,N} R_j$

N.b. <u>Se tra i resistori collegati in serie compare un circuito aperto, il bipolo equivalente è un circuito aperto. Si noti che in questo caso tutta la tensione cade ai capi del circuito aperto, mentre la tensione ai capi degli altri resistori risulta nulla.</u>

2. **Serie di due generatori indipendenti di tensione**

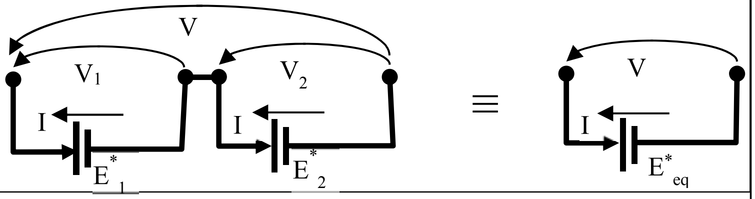

Fig. II.6.4: *Collegamento in serie di due generatori FEM*

Due generatori ind. di tensione la cui FEM è pari rispettivamente a E^*_1 e E^*_2 sono equivalenti ad unico generatore la cui FEM risulta pari a $E^*_{eq}= E^*_1 + E^*_2$. Si noti che ove le FEM dei singoli generatori siano orientate in senso discorde la somma va intesa in senso algebrico. Anche in questo caso è valida ed intuitiva l’estensione al caso di N-generatori indipendenti di tensione collegati in serie.

3. Serie di un generatore indipendente di tensione e di un generatore indipendente di corrente

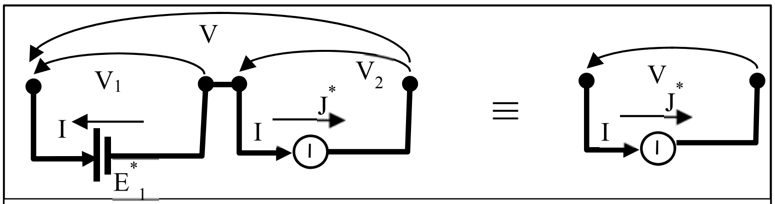

Fig. II.6.5: *Collegamento in serie di un gen. FEM e di un gen. ind. di corrente*

La serie di un generatore indipendente di tensione che impone la FEM E^* e di un generatore indipendente di corrente che impone la corrente J^* è equivalente ad un generatore di corrente che impone la corrente imposta dal generatore indipendente di corrente J^*. Si noti che la tensione V_{J*eq}, che si misura ai capi del generatore equivalente di corrente, non è uguale alla tensione V_{J*}, che insisteva ai capi del generatore di corrente originario:

$$V_{J*eq}= E^*+ V_{J*}$$

N.b. <u>Il collegamento serie tra un circuito aperto e un generatore indipendente di tensione ricade in questo caso. Il bipolo equivalente è un circuito aperto.</u>

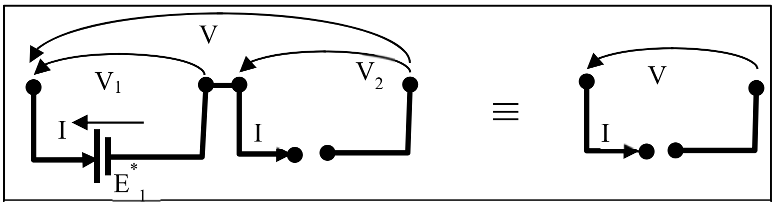

Fig. II.6.6: *Collegamento serie di un generatore FEM e di un circuito aperto*

4. Serie di due generatori indipendenti di corrente (Generalmente rappresenta una situazione degenere)

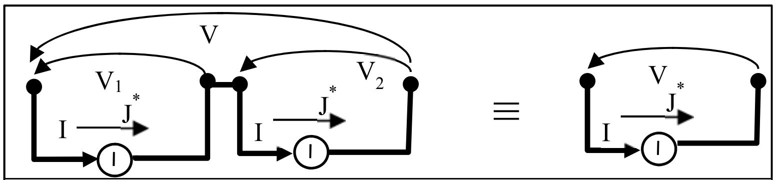

Fig. II.6.7: *Collegamento in serie di due gen. ind. di corrente (possibile solo se imprimono la stessa corrente)*

Nell'ambito della teoria dei circuiti a parametri concentrati non è generalmente possibile collegare in serie due generatori indipendenti di corrente che impongono rispettivamente le correnti J^*_1 e J^*_2 .

Infatti l'insieme costituito dalle tre equazioni indipendenti $I=J^*_1 = J^*_2$ non ammette soluzione.

Fa eccezione il caso in cui i due generatori indipendenti di corrente impongono la stessa corrente $J^*_1 = J^*_2 =J^*$ e sono orientati nella stessa direzione. In questo caso il bipolo equivalente è, ancora un generatore indipendente che impone la stessa corrente imposta da uno solo dei due generatori indipendenti: $J^*_{eq} =J^*_1$. In questo caso, pur non essendo formalmente obbligatorio dal punto di vista matematico, si assume usualmente dal punto di vista operativo che la tensione che cade ai capi di ciascuno dei due generatori indipendenti di corrente, originariamente presenti nel circuito, sia pari alla metà della tensione calcolata ai capi del generatore di corrente equivalente:

$$V_{J*1}= V_{J*2}=V_{J*eq} / 2$$

N.b. <u>Il collegamento serie tra un circuito aperto e un generatore indipendente di corrente rappresenta una situazione degenere.</u>

c) Parallelo di bipoli

Due bipoli si dicono collegati in parallelo quando ciascun terminale di un bipolo è collegato a un terminale dell'altro bipolo, cioè i terminali di un bipolo coincidono elettricamente coi terminali dell'altro.

Una definizione alternativa è la seguente: ***due bipoli si dicono collegati in parallelo se sono sottoposti alla stessa tensione*** (vedi fig.II.6.8).

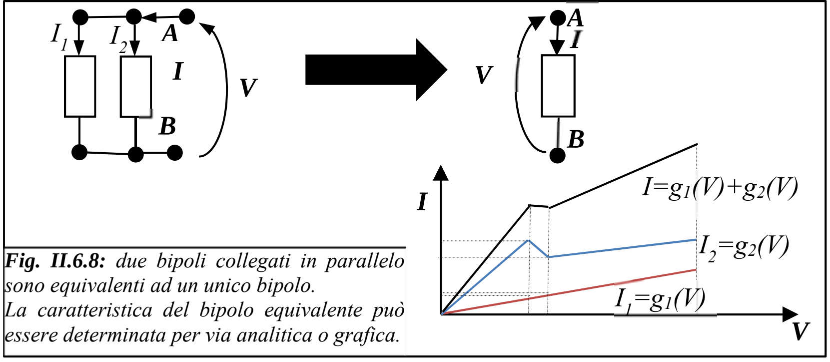

Fig. II.6.8: *due bipoli collegati in parallelo sono equivalenti ad un unico bipolo. La caratteristica del bipolo equivalente può essere determinata per via analitica o grafica.*

Si assuma che i due bipoli collegati in parallelo siano entrambi controllabili in tensione:

$$\begin{cases} I_1 = g_1(V) \\ I_2 = g_2(V) \end{cases}$$

Applicando la LKC, la corrente totale che interessa i due componenti collegati in parallelo risulta pari a:

$$I = I_1 + I_2 = g_1(V) + g_2(V) = g(V)$$

Dove $I = g(V)$ è la relazione caratteristica del bipolo equivalente ai due collegati in parallelo.

In ossequio alla definizione di equivalenza se ai due bipoli collegati in parallelo si sostituisce il bipolo equivalente la rete esterna non si accorgerà della differenza. Si ricordi tuttavia che l'equivalenza vale solo ai fini esterni.

Si noti che le considerazioni precedenti si estendono facilmente al caso di N-bipoli di parallelo:

$$I = I_1 + I_2 + ... + I_j + ... + I_N = g_1(V) + g_2(V) + ... + g_j(V) + ... g_N(V) = g(V)$$

Casi particolari (parallelo di *bipoli lineari* elementari)

1. Parallelo di due resistori

Due resistori di resistenza pari rispettivamente a R_1 e R_2 collegati in parallelo sono equivalenti ad un unico resistore, R_{eq}, la cui resistenza può essere calcolata attraverso un nuovo operatore (detto "parallelo"), tipico della teoria dei circuiti, rappresentato attraverso il simbolo "//" e definito nel seguente modo:

$$R_{eq} = R_1 // R_2 = R_1 R_2 / (R_1 + R_2).$$

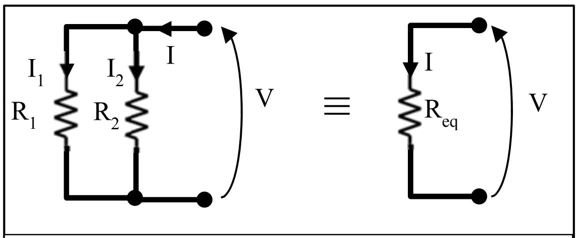

Fig. II.6.9: *Collegamento in parallelo di due resistori*

Si noti che l'operatore di parallelo ha lo stesso grado di priorità dell'operatore di moltiplicazione per cui nella sequenza $R_1 + R_2//R_3 = R_1 + (R_2//R_3)$;

(bisogna calcolare prima il parallelo tra R_2 e R_3 e, successivamente, sommare il risultato ottenuto a R_1).

Si sottolinea che questa espressione è valida esclusivamente nel caso di due resistori collegati in parallelo e non è generalizzabile al caso di parallelo di N resistori (con N>2).

Si noti che, utilizzando le conduttanze anziché le resistenze per caratterizzare i resistori di partenza è possibile pervenire alla determinazione della conduttanza del resistore equivalente attraverso una espressione alternativa e duale rispetto a quella utilizzata nel caso di due resistori collegati in serie: $G_{eq} = G_1 + G_2$

Questa configurazione viene anche chiamata "partitore di corrente" in quanto la corrente totale I che interessa i due resistori collegati in parallelo viene ripartita tra i resistori in maniera proporzionale al valore delle loro conduttanze.

Difatti risulta $\begin{cases} I_1 = G_1 \ \mathrm{V} \\ I_2 = G_2 \ \mathrm{V} \end{cases} \rightarrow \quad I = I_1 + I_2 = G_1 \ \mathrm{V} + G_2 \ \mathrm{V} = (G_1 + G_2) \ \mathrm{V};$

e pertanto $$I_1 = I\frac{G_1}{G_1+G_2}; \quad I_2 = I\frac{G_2}{G_1+G_2}$$

Nel caso si preferisca calcolare le correnti nei rami del partitore utilizzando le resistenze anziché le conduttanze, sostituendo le prime alle seconde nell’espressione precedentemente calcolata si ottiene:

$$I_1 = I\frac{R_2}{R_1+R_2}; \quad I_2 = I\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

Ovvero***: la corrente che passa in un ramo di un partitore a due vie è uguale al prodotto della corrente che interessa l’intero partitore per la resistenza del lato del partitore dove <u>non mi interessa</u> calcolare la corrente diviso la somma delle resistenze dei due lati del partitore.***

Questa espressione è applicabile solo per due resistori collegati in parallelo e non è generalizzabile al caso di parallelo di N resistori con N>2.

Nel caso generale di N-resistori collegati in parallelo conviene lavorare utilizzando le espressioni basate sulle conduttanze:

$$I_j = G_j\ V, j = 1:N \rightarrow \quad I = I_1 + ... + I_j + ... + I_N = \left(G_1 + ... + G_j + ... + G_N\right)\ V;$$

e pertanto: $$I_j = I\frac{G_j}{G_{eq}}; \quad G_{eq} = \sum_{j=1,N} G_j$$

Come si è sottolineato in precedenza nel caso di N-resistori (N>2) bisogna stare attenti al modo in cui si applica la formula per calcolare la resistenza del resistore equivalente e quella per calcolare la corrente in un ramo del partitore quando si intende utilizzare il parametro resistenza anziché quello di conduttanza nella caratterizzazione dei resistori. Se proprio si intende lavorare con le resistenze, occorre <u>sempre</u> ridursi al caso di partitore a due vie con un trucco operativo. A titolo di esempio, si consideri il caso di <u>tre</u> resistori collegati in parallelo le cui resistenze valgono rispettivamente R_1, R_2 e R_3. Risulta:

$$R_{eq} = R_1 \parallel R_2 \parallel R_3 = \left(R_1 \parallel R_2\right) \parallel R_3 = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\right) \parallel R_3 = \frac{\dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2} R_3}{\dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2} + R_3} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_1 = I\frac{R_2 \parallel R_3}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = I\frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}\frac{1}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2+R_3}} = I\frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Come si vede, anche nel caso più semplice di N=3, le espressioni diventano alquanto involute.

N.b.<u> Se tra i resistori collegati in parallelo compare un corto circuito, il bipolo equivalente è un corto circuito. In questa situazione tutta la corrente passa nel corto-circuito e i resistori assorbono corrente nulla.</u>

2. Parallelo di due generatori indipendenti di corrente

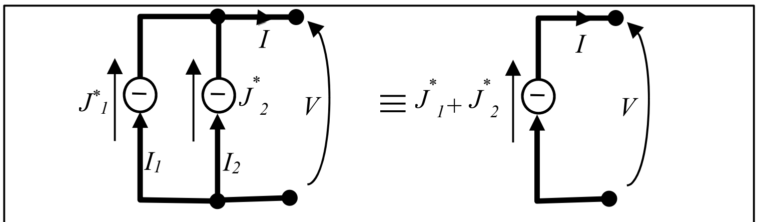

Fig. II.6.10: *Collegamento in parallelo di due generatori indipendenti di corrente*

Due generatori indipendenti di corrente che imprimono rispettivamente le correnti J^*_1 e J^*_2 sono equivalenti ad unico generatore di corrente la cui corrente impressa risulta pari a $J^*_{eq} = J^*_1 + J^*_2$. Si noti che ove le correnti impresse dai singoli generatori siano orientate in senso discorde la somma va intesa in senso algebrico. Anche in questo caso è valida ed intuitiva l'estensione al caso di N-generatori indipendenti di corrente collegati in parallelo.

3. Parallelo di un generatore indipendente di tensione e di un generatore indipendente di corrente

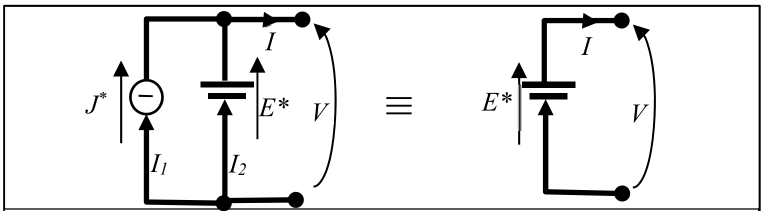

Fig. II.6.11: *Collegamento in parallelo di un gen. FEM e un gen. ind. di corrente*

Il parallelo di un generatore indipendente di tensione che impone la FEM E^* e di un generatore indipendente di corrente che imprime la corrente J^* è equivalente ad un generatore di tensione che impone la stessa FEM imposta dal generatore di tensione originario, E^*. Si noti che la corrente I_{E^*eq}, che attraversa il generatore equivalente di tensione, non è uguale alla corrente I_{E^*}, che attraversava il generatore di tensione originario:

$$I_{E^*eq} = J^* + I_{E^*}$$

N.b. <u>Il collegamento parallelo tra un corto-circuito e un generatore indipendente di corrente ricade in questo caso. Il bipolo equivalente è un corto-circuito.</u>

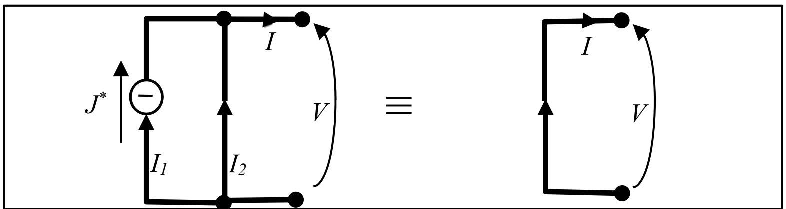

Fig. II.6.11: *Collegamento in parallelo di un corto-circuito e un gen. ind. di corrente*

4. Parallelo di due generatori indipendenti di tensione (Generalmente rappresenta una situazione degenere)

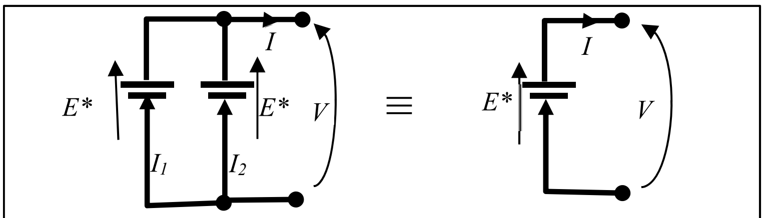

Fig. II.6.12: *Collegamento in parallelo di due generatori FEM (possibile solo se impongono la stessa FEM)*

Nell'ambito della teoria dei circuiti a parametri concentrati non è generalmente possibile collegare in parallelo due generatori indipendenti di tensione che impongono rispettivamente le FEM E^*_1 e E^*_2.

Infatti l'insieme costituito dalle tre equazioni indipendenti $V = E^*_1 = E^*_2$ non ammette soluzione.

Fa eccezione il caso in cui i due generatori indipendenti di tensione impongono la stessa FEM $E^*_1 = E^*_2 = E^*$ e sono orientati nella stessa direzione. In questo caso il bipolo equivalente è, ancora un generatore indipendente di tensione che impone la stessa tensione imposta da uno solo dei due generatori indipendenti di tensione originari: $E^*_{eq} = E^*_1$. In questo caso, pur non essendo formalmente obbligatorio dal punto di vista matematico, si assume usualmente, dal punto di vista operativo, che la corrente che attraversa ciascuno dei due generatori indipendenti di tensione, presenti nel circuito originario, sia pari alla metà della corrente che passa attraverso il generatore di tensione equivalente:

$$I_{E^*1} = I_{E^*2} = I_{E^*eq} / 2$$

N.b. <u>Il collegamento parallelo tra un corto-circuito e un generatore indipendente di tensione rappresenta una situazione degenere.</u>

7. Il generatore reale di tensione e il generatore reale di corrente

Consideriamo i seguenti due bipoli:

<u>Generatore reale di tensione</u>

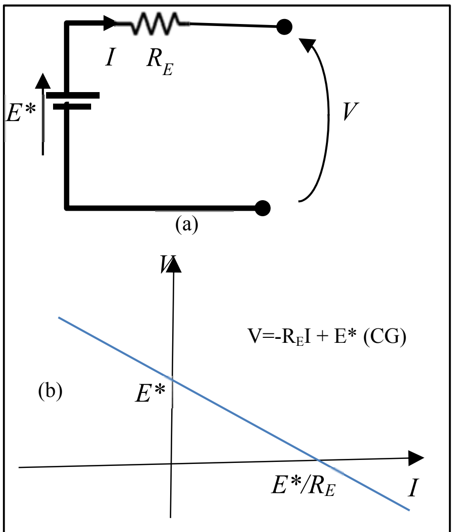

Fig. II.7.1 : *a) Generatore reale di tensione*
b) Relazione caratteristica

<u>Generatore reale di corrente</u>

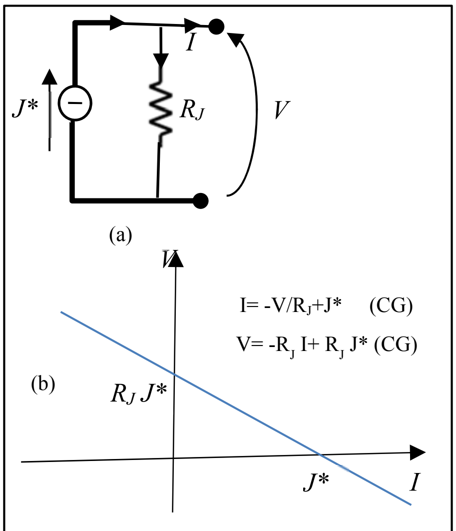

Fig. II.7.2: *a) Generatore reale di corrente*
b) Relazione caratteristica

Per V=0 → $I = E^*/R_E$
Per I=0 → $V = E^*$

Per V=0 → $I = J^*$
Per I=0 → $V = R_J J^*$

I due bipoli rappresentati in Fig. II.7.1 e in Fig.II.7.2 sono ovviamente differenti.

Il primo (Fig.II.7.1) è costituito dalla serie di un resistore lineare passivo, R_E, e di un generatore ideale di tensione, E*, e prende il nome di "generatore reale di tensione".

Il secondo (Fig.II.7.2) è ottenuto collegando in parallelo un resistore lineare passivo, R_J, e un generatore ideale di corrente e prende il nome di "generatore reale di corrente".

L'attribuito "reale" assegnato ai due bipoli è dovuto al fatto che questi componenti approssimano meglio il comportamento dei corrispondenti generatori fisici di quanto possano fare il gen. ideale di tensione e il gen. ideale di corrente.

Osservando le relazioni caratteristiche dei due componenti ci si rende conto che esse possono essere rese identiche imponendo il vincolo che le due rette taglino gli assi delle ascisse e delle ordinate negli stessi punti. Allo scopo devono essere soddisfatte le due equazioni lineari: $J^* = E^*/R_E$; $E^* = R_J J^*$.

In altre parole un generatore reale di tensione e un generatore reale di corrente sono <u>equivalenti</u> (ovvero interscambiabili) se sono soddisfatti i vincoli $R_E = R_J$; $J^* = E^*/R_E$.

8. N-poli lineari resistivi: configurazione equivalenti a stella e a poligono completo

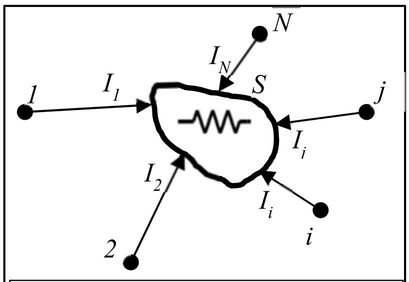

Fig. II.8.1: N-polo lineare resistivo

Un N-polo lineare resistivo (fig.II.8.1) è una porzione di rete costituita da soli resistori e delimitata da una superficie gaussiana S dalla quale fuoriescono un numero di terminali pari a N, con N>2.

Diremo che l’N-polo presenta una **topologia stellare** se

1) è costituito esattamente da N resistori;
2) per ciascun resistore, uno dei terminali e collegato ad un punto interno, detto centro-stella, ”O”, e l’altro terminale taglia la superficie gaussiana S dando origine ad uno dei terminali dell’N-polo.

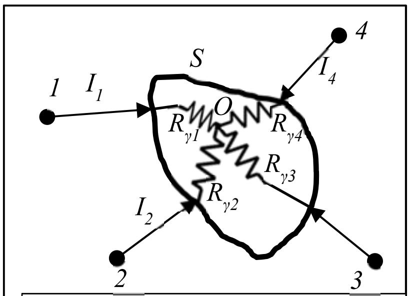

Fig. II.8.2 quadrupolo lineare resistivo in topologia stellare

In fig.II.8.2 è riportato un esempio di N-polo stellare con N=4 (quadrupolo). Si denoti con $R_{\gamma i}$ la resistenza che si appoggia al centro stella, O, e all’i-mo terminale del quadrupolo.

Diremo che l’N-polo presenta una **topologia poligonale completa** se

1) è costituito esattamente da N*(N-1)/2 resistori;
2) ciascun resistore si appoggia su una coppia differente di terminali dell’N-polo.

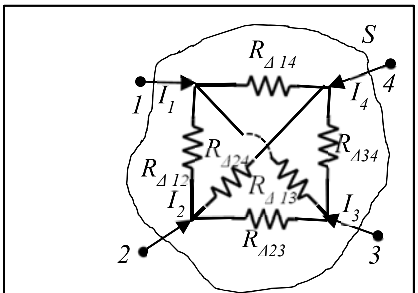

Fig. II.8.3 quadrupolo lineare resistivo in topologia poligonale

In fig.II.8.3 è riportato un esempio di N-polo poligonale con N=4 (quadrupolo). Si denoti con $R_{\Delta ij}$ la resistenza che si appoggia all’i-mo e al j-mo terminale del quadrupolo.

Poiché un N-polo a stella è costituito da N resistori ed un N-polo poligonale completo da N*(N-1)/2 resistori,

a) se N=3, gli N-poli nelle due configurazioni hanno entrambi N=3 resistori
b) se N>3 l’N-polo poligonale completo ha un numero di resistori maggiore dell’N-polo stellare.

Da questa osservazione consegue che

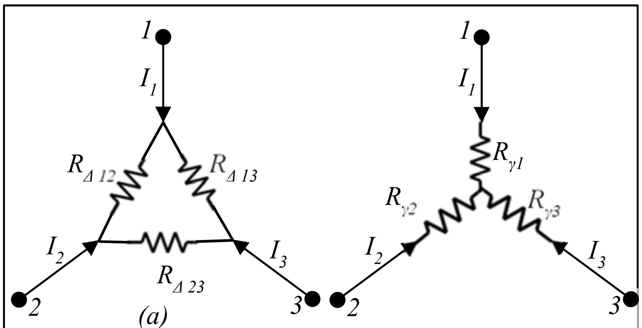

Fig. II.8.4 tripolo lineare resistivo in topologia (a) triangolo; b) stella

a1) assegnato un tripolo resistivo con topologia stellare esiste uno ed un solo tripolo (fig.II.8.4b) con topologia poligonale (detto “triangolo”, fig.II.8.4a) ad esso equivalente;

a2) assegnato un tripolo resistivo con topologia poligonale esiste uno ed un solo tripolo con topologia stellare ad esso equivalente;

b1) assegnato un N-polo resistivo con N>3 e topologia stellare esistono $\infty^{N(N-3)/2}$ N-poli con topologia poligonale ad esso equivalente, infatti: N(N-1)/2 –N=(N^2-N-2N)/2=N(N-3)/N;

b2) assegnato un N-polo resistivo con N>3 e topologia poligonale esiste solo in casi molto particolari un N-polo con topologia stellare ad esso equivalente.

Per passare da un N-polo a stella all’equivalente poligonale si utilizza la seguente espressione (7.1):

$$\frac{1}{R_{\Delta ij}} = G_{\Delta ij} = \frac{G_{\gamma i}G_{\gamma j}}{\sum_{k=1,N} G_{\gamma k}};\ dove\ G_{\gamma k} = \frac{1}{R_{\gamma k}};\ ad\ esempio\ \ G_{\Delta 12} = \frac{G_{\gamma 1}G_{\gamma 2}}{G_{\gamma 1}+G_{\gamma 2}+G_{\gamma 3}};$$

Per passare da un triangolo ad una stella (solo N=3) si utilizza la seguente espressione (7.2):

$$\mathrm{R}_{\gamma i} = \frac{\mathrm{R}_{\Delta ij}\mathrm{R}_{\Delta ik}}{\mathrm{R}_{\Delta ij}+\mathrm{R}_{\Delta jk}+\mathrm{R}_{\Delta ik}};ad\ es.esempio\ \mathrm{R}_{\gamma 1} = \frac{\mathrm{R}_{\Delta 12}\mathrm{R}_{\Delta 13}}{\mathrm{R}_{\Delta 12}+\mathrm{R}_{\Delta 23}+\mathrm{R}_{\Delta 13}};$$