

Insegnamento di Elettrotecnica - Corso di Laurea in Scienze e Tecnologie Informatiche Anno accademico 2020/2021

Testi di riferimento

- L. De Menna. Elettrotecnica. Vittorio Pironti Editore (disponibile on line)
- S. Bobbio, Esercizi di Elettrotecnica, Cuen, Napoli
- S. Bobbio, E. Gatti – Elettromagnetismo, ottica. Bollati Boringhieri, Napoli
- Dispense ed esercizi forniti dal docente

CAPITOLO I

Nozioni introduttive allo studio dei circuiti a parametri concentrati

Introduzione

L'analisi di un qualunque “sistema fisico” complesso passa per la definizione di un modello matematico che deve essere sufficientemente accurato da riprodurre - con una tolleranza accettabile dal punto di vista ingegneristico - il comportamento del sistema reale (almeno per quel che riguarda i fenomeni che sono oggetto dell'analisi) e, contemporaneamente, deve essere quanto più semplice possibile, così da permettere un'agile ed efficace analisi computazionale.

Il compito precipuo dell'ingegnere consiste nell'individuare gli aspetti del “sistema fisico” che risultino rilevanti ai fini dell'indagine e, a partire da questi, costruirne il “modello ideale” attraverso l'interconnessione di elementi idealizzati. Questi ultimi sono semplici modelli usati per rappresentare o portare approssimativamente in conto le proprietà di elementi e/o fenomeni fisici elementari.

Nell'ambito della teoria dei circuiti si pongono le basi per studiare in maniera sistematica il comportamento dei circuiti reali e dei fenomeni fisici di carattere elettromagnetico che in essi si manifestano - così da prevedere il comportamento di questi ultimi, o di migliorarne le caratteristiche di comportamento -, attraverso l'analisi dei corrispondenti “circuiti ideali”. Come l'interconnessione di “componenti reali” dà origine al “circuito reale” sotto indagine, così il circuito ideale che lo modella è costruito interconnettendo nel medesimo modo i “componenti ideali” corrispondenti a quelli reali.

In perfetta analogia con quanto studiato in Meccanica, i componenti ideali che sono definiti nell'ambito della teoria dei circuiti, al contrario dei corrispondenti elementi fisici, sono dal punto di vista dimensionale dei punti materiali: oggetti, cioè, che non possiedono la proprietà di occupare un volume nello spazio.

In Meccanica a questi oggetti si attribuiscono diverse proprietà quali la massa, l'inerzia, etc.

Allo stesso modo, nell'ambito della Teoria dei circuiti, i componenti ideali sono caratterizzati da proprietà fisiche che si ritrovano nei corrispondenti componenti pratici reperibili in commercio. Anzi, la bontà di un componente reale è legata alla sua capacità di comportarsi, nel più largo ambito operativo possibile, in modo analogo a quanto richiesto al corrispondente componente ideale.

1. Grandezze fondamentali

Sistemi di misura Nel seguito definiremo alcune proprietà della materia e supporremo di poterle graduare associando loro dei valori numerici attraverso misure sperimentali. Sappiamo, tuttavia, che affinché un'operazione di misura abbia senso è necessario definire, oltre agli strumenti e al protocollo che ne garantisca la riproducibilità, una quantità campione che rappresenti il valore unitario (o “metro”) della misura stessa.

Nel seguito assoceremo alle grandezze d'interesse della Teoria dei circuiti le unità di misura definite nell'ambito del Sistema Internazionale.

Cariche elettriche I corpi materiali possono presentare proprietà particolari (tanto a livello microscopico quanto a livello macroscopico) che danno luogo alle cosiddette interazioni elettriche o magnetiche. Elemento chiave di dette interazioni è una proprietà della materia individuata da una grandezza scalare che indicheremo con q e che denomineremo “carica elettrica”.

Gli studi compiuti sulla struttura della materia ci permettono di dire che quest'ultima è costituita da molecole formate, a loro volta, da atomi. In modo un po' approssimativo è possibile dire che il mondo dell'atomo è costituito da un nucleo dotato di carica di una certa qualità, definita convenzionalmente *positiva*, e da particelle più piccole dette *elettroni* che vi orbitano intorno ("modello planetario"). Anche gli elettroni sono dotati di carica seppure di qualità differente rispetto a quella del nucleo e convenzionalmente indicata col nome di *negativa*.

Dal punto di vista qualitativo, le interazioni tra cariche omologhe hanno carattere repulsivo, mentre le cariche di diversa qualità si attraggono l'un l'altra.

Di fondamentale importanza è la legge di Coulomb che, nel vuoto, si esprime come:

$$\mathbf{F}_{12} = k q_1 q_2 \mathbf{r}_{12} / r^2, \quad (\text{nel S.I., } k = 1/4\pi\epsilon_0 \text{ ed } \epsilon_0 = 8.854188E-12 [\text{kg}^{-1} \text{ m}^{-3} \text{ s}^2 \text{ C}^2]),$$

Questa legge stabilisce il valore della forza che una carica "sorgente", q_1 , esercita su una carica "di prova", q_2 , posta a distanza r_{12} dalla prima e viene utilizzata per definire operativamente, nel Sistema Internazionale, l'unità di misura della carica elettrica:

Il valore di 1 Coulomb corrisponde a quello di una carica che posta nel vuoto a distanza di un metro da una carica identica viene respinta da questa con una forza di intensità pari a $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 8.98E9$ [N].

Il valore così determinato corrisponde a una quantità di carica estremamente elevata rispetto a quella che entra in gioco nei problemi di interesse pratico.

Dal punto di vista matematico la forza Coulombiana costituisce un *campo centrale* in quanto, assumendo per la sua rappresentazione un sistema di coordinate tridimensionali nel quale l'origine degli assi coincide col punto in cui è posizionata la carica sorgente, le sue linee di azione si dipartono radialmente dall'origine e la sua intensità varia in maniera inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra l'origine e la carica di prova. La più importante implicazione della centralità del campo coulombiano è rappresentata dalla validità del Principio di Sovrapposizione degli Effetti (PSE):

La forza esercitata su una carica di prova da un insieme di cariche sorgenti è pari alla somma delle forze che le singole cariche sorgenti eserciterebbero sulla carica di prova se agissero da sole.

Le osservazioni sperimentali hanno permesso di determinare che non è possibile osservare cariche di valore inferiore a quella dell'elettrone, che vale $1.60210E-19$ [C]: nel linguaggio scientifico questa circostanza si esprime dicendo che la carica elettrica è una grandezza quantizzata.

Poiché "in condizioni normali" non si osservano sulla materia fenomeni macroscopici di natura elettrica, si conclude che "in condizioni normali" le cariche di diversa qualità si compensano perfettamente sia a livello microscopico che macroscopico.

2. Campo di corrente e Intensità di Corrente

In alcuni materiali detti *conduttori*, gli elettroni delle bande energetiche più esterne hanno la possibilità di spostarsi da un atomo all'altro.

L'insieme complementare dei materiali, per i quali questa possibilità è negata, va sotto il nome di *isolanti*.

Si consideri una regione dello spazio Ω nella quale vi siano delle cariche in movimento (assumiamo per semplicità che siano tutte positive e di valore pari alla carica elementare, q) e, all'interno di Ω , consideriamo la generica superficie Σ (fig.I.2.1).

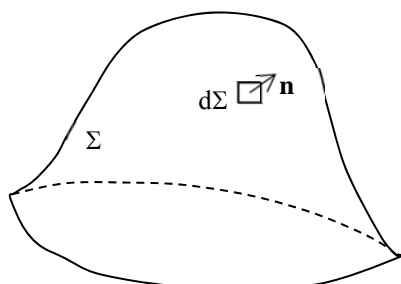


Fig.I.2.1: Superficie generica Σ e la normale in un punto generico

Sia \mathbf{n} il versore normale alla superficie (il verso può essere scelto arbitrariamente se Σ è una superficie aperta; invece, se Σ è chiusa, per prassi, ci si riferisce al versore uscente).

Sia poi $d\Sigma$ una generica superficie elementare di Σ e $d\Omega$ la corrispondente regione elementare dello spazio prossima a $d\Sigma$ (fig.2.2), definita come di seguito.

La superficie elementare $d\Sigma$ deve essere sufficientemente piccola da poter assumere che il versore \mathbf{n} , normale al suo punto centrale, sia con buona approssimazione normale a qualunque punto di $d\Sigma$ (in modo equivalente, si può dire che $d\Sigma$ deve essere con buona approssimazione una superficie piana). Inoltre si deve verificare che, con buona approssimazione, la distribuzione delle cariche sia spazialmente uniforme, ovvero che, nella regione spaziale intorno a $d\Sigma$, le cariche

- siano distribuite con densità di volume uniforme N ;
- si muovano tutte con la stessa velocità, \mathbf{v} .

Ciò assunto, si fissi un intervallo di tempo elementare, dt , tale per cui il moto delle cariche sia uniforme temporalmente (deve essere sufficientemente piccolo da poter assumere che nel tempo dt non vari in maniera apprezzabile né la densità N né la velocità \mathbf{v} delle cariche). Il volume elementare $d\Omega$ è il cilindretto di base $d\Sigma$, avente per generatrice il lato $\mathbf{v} dt$ (Fig.I.2.2).

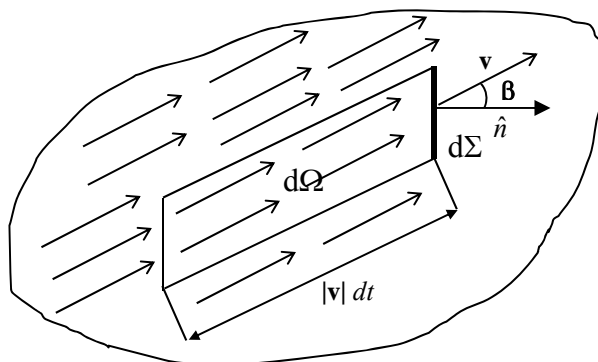


Fig.I.2.2 Schema di principio per la definizione della corrente elettrica

La carica netta che attraversa la superficie $d\Sigma$ nel tempo dt è pari alla carica racchiusa in $d\Omega$:

$$dQ = q N d\Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dt = q N d\Sigma v dt \cos\beta.$$

La carica netta che nell'unità di tempo taglia la superficie $d\Sigma$, secondo l'orientamento scelto, è per definizione l'intensità di corrente elettrica (o semplicemente la corrente elettrica) che interessa la superficie elementare $d\Sigma$:

$$dI = dQ / dt = q N d\Sigma v \cos\beta$$

Per trovare la corrente elettrica che interessa l'intera superficie Σ occorre effettuare un integrale superficiale:

$$I = \iint_{\Sigma} q N \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

Nel S.I. l'intensità di corrente si misura in Ampère (simbolo [A]).

Alcune precisazioni sul segno della corrente

Volendo scrivere un bilancio per la carica che attraversa una superficie orientata attraverso la normale \mathbf{n} si rammenti che:

- le cariche positive che si muovono nel verso di \mathbf{n} vanno portate in conto con segno positivo;
- le cariche negative che si muovono nel verso opposto rispetto ad \mathbf{n} vanno portate in conto con segno positivo;
- negli altri casi il segno è negativo

La quantità $\mathbf{J} = Nq\mathbf{v}$ viene definita **campo di corrente** e attraverso di esso è possibile portare in conto oltre alle correnti conduttive (elettroni in moto nei materiali conduttori) anche altri tipi di correnti:

- a) le correnti dovute al moto degli ioni negli elettroliti;
- b) le cosiddette correnti convettive dovute al moto dei supporti delle cariche elettriche (si pensi, a titolo di esempio, al movimento delle polveri elettricamente cariche nelle ciminiere oppure al movimento di un oggetto macroscopico (sia esso isolante o conduttore) localmente o globalmente non neutro dal punto di vista elettrico).

In generale N e \mathbf{v} non presentano uniformità né temporale né spaziale nel dominio Ω , e, pertanto, il valore della densità di corrente sarà funzione delle coordinate spaziali e del tempo, ovvero $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$.

L'equazione precedente diventa pertanto

$$i(t) = \iint_{\Sigma} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS$$

Si noti che è buona norma utilizzare la lettera maiuscola per rappresentare le quantità elettriche stazionarie e la lettera minuscola per le quantità elettriche il cui valore dipende dall'istante temporale.

Nel S.I. il campo di corrente si misura in A /m².

In **condizioni stazionarie** (cioè, in una situazione in cui tutte le quantità elettromagnetiche sono rigorosamente invarianti nel tempo) il principio di conservazione della carica elettrica (una delle equazioni introdotte da Maxwell al fine di modellare in maniera elegante e sintetico il comportamento dei campi Elettromagnetici) impone che il flusso del campo di corrente attraverso una qualunque superficie chiusa Σ_c risulta nullo $\oiint_{\Sigma_c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0$.

Questa equazione integrale, trova il suo corrispondente locale nella condizione di solenoidalità imposta sul campo di corrente:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (I.2.1)$$

Va immediatamente precisato che, se la condizione di stazionarietà non è verificata, il campo di corrente non è solenoidale. Difatti, in tal caso, la legge di conservazione della carica elettrica deve essere scritta nella sua forma completa:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (I.2.2) \quad \text{che accoppiata alla legge di Gauss} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (I.2.3)$$

porta alla seguente espressione valida nel caso generale: $\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$ (I.2.4)

il contributo addizionale $\partial \mathbf{D} / \partial t$ che compare nell'eq. I.2.4 prende il nome di corrente di spostamento e dà conto dell'evidenza sperimentale di circolazione di correnti attraverso regioni costituite da mezzi isolanti dal punto di vista elettrico.

L'espressione (I.2.4) riscritta in forma integrale $\oiint_{\Sigma_c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{dq}{dt}$ consente di evidenziare come il flusso netto di corrente

attraverso la superficie chiusa Σ_c sia pari alla derivata temporale della carica elettrica immagazzinata nel volume racchiuso dalla medesima superficie.

D'altra parte se le variazioni temporali della carica sono piccole (dinamica lenta), la quantità al secondo membro si può trascurare e il campo di corrente può essere ancora ritenuto approssimativamente solenoidale.

3. Conseguenze della solenoidalità del campo di corrente.

Si consideri una generica curva chiusa "γ" nel dominio spaziale di definizione, Ω.

Esistono, ovviamente, infinite superfici aperte orlate dalla curva γ : ad esempio le superfici Σ e Σ' rappresentate in fig.I.3.1. Ci proponiamo ora di dimostrare come, nel caso di campo di corrente solenoidale o approssimativamente solenoidale, il flusso di corrente i(t) dipende solo dalla curva γ e non dalla particolare superficie che ha per bordo γ.

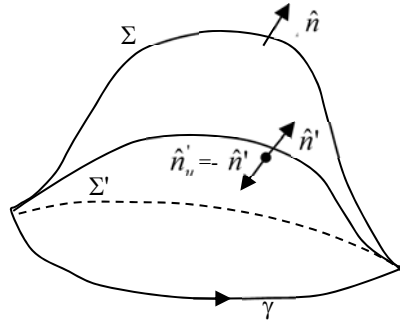


Fig.I.3.1 Due superfici aperte di uguale bordo orientato γ (o “orlate dalla medesima linea chiusa γ ”) danno origine a una superficie chiusa $\Sigma_c = \Sigma \cup \Sigma'$. Le normali \hat{n} e \hat{n}' sono orientate in base al verso scelto per la curva γ (regola del cavatappi)

Iniziamo la dimostrazione col notare che l'unione delle due generiche superfici aperte $\Sigma \cup \Sigma'$ dà origine alla curva chiusa Σ_c .

Si noti, ancora, che la normale \hat{n}'_u uscente alla superficie chiusa Σ_c coincide con \hat{n} per Σ , ed è uguale a $\hat{n}'_u = -\hat{n}'$ per Σ' .

Infine, dalla solenoidalità del campo di corrente risulta:

$$0 = \oiint_{\Sigma \cup \Sigma'} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}'_u dS = \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{\Sigma'} \mathbf{J} \cdot (-\mathbf{n}') dS = i_{\Sigma} - i_{\Sigma'} \rightarrow i_{\Sigma'} = i_{\Sigma}$$

Dove abbiamo denotato con i_{Σ} e $i_{\Sigma'}$ rispettivamente i flussi di corrente attraverso le superfici Σ e Σ' .

Con i semplici passaggi sopra riportati si dimostra l'asserto.

4. Conduttori filiformi

Si consideri un lungo tubo, eventualmente di sezione trasversale variabile, realizzato con un materiale conduttore (fig.I.4.1) ed immerso in un materiale isolante (in particolare nel vuoto). Se le sue dimensioni trasversali risultano sempre molto minori rispetto alla sua lunghezza, il conduttore verrà detto *filiforme*.

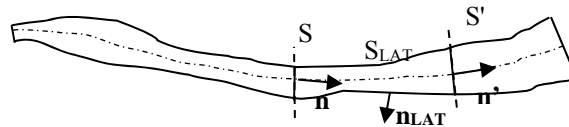


Fig.I.4.1: Conduttore filiforme: le dimensioni trasversali sono molto minori di quella longitudinale.

Dalla condizione $\oiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0$, tenendo conto che il flusso di corrente attraverso le superfici laterali S_{LAT} del conduttore filiforme è nullo, e che \mathbf{n}_{out} (la normale uscente alla superficie chiusa ottenuta come unione di S , S' e S_{LAT}) risulta uguale ad \mathbf{n}' ed opposta ad \mathbf{n} , si deduce facilmente che l'intensità di corrente attraverso la sezione S risulta uguale all'intensità di corrente attraverso S' :

$$0 = \oiint_{S \cup S' \cup S_{LAT}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_{OUT} dS = \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_{OUT} dS + \iint_{S'} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_{OUT} dS + \iint_{S_{LAT}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_{OUT} dS = - \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S'} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}' dS$$

Da cui:

$$\iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S'} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}' dS$$

Un conduttore filiforme può essere ben schematizzato attraverso un conduttore di sezione nulla e di conducibilità non limitata (Fig.I.4.2). In questo caso le sezioni S e S' si riducono a punti materiali. Le normali alle superfici S e S', ora rappresentate attraverso frecce, continuano a definire l'orientamento positivo assunto per le correnti

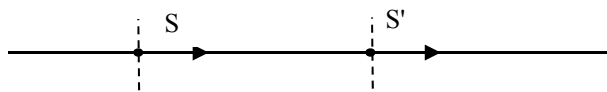


Fig.I.4.2: Conduttore filiforme: schematizzazione attraverso un conduttore di sezione nulla

Dal punto di vista operativo, la corrente è la quantità fisica misurata mediante un opportuno strumento detto Amperometro. L'Amperometro è uno strumento "polare" a due terminali. Col termine polare s'intende che la misura fornita dallo strumento cambia di segno a seconda di come sono inseriti i morsetti nello schema di misura. In pratica, assegnato un verso positivo per la corrente (ovvero un orientamento per la normale alla superficie), resta definito il modo in cui l'amperometro deve essere inserito nel circuito (Fig.I.4.3).

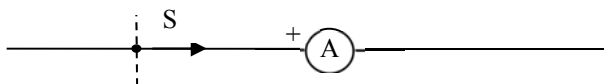


Fig.I.4.3: Inserzione di un amperometro per la misura della corrente in un conduttore filiforme. Lo strumento restituisce la misura corretta se la corrente punta verso il morsetto positivo.

5. Tensione elettrica e Differenza di Potenziale

a) Definizione del campo elettrico

Ritornando all'interazione nello spazio libero tra due cariche puntiformi fisse nelle loro posizioni, immaginiamo di misurare la forza esercitata dalla carica sorgente q_1 , posizionata nel punto spaziale Q , su una carica di prova q_0 , posizionata nel generico punto P dello spazio. Supponendo di variare la posizione della carica di prova (fino a toccare tutti i punti dello spazio) e ripetere la misura un numero infinito di volte, si perviene alla determinazione di un campo vettoriale: il campo di forza, $\mathbf{F}_0(P)$, esercitato dalla carica sorgente sulla carica di prova. Si può facilmente verificare come $\mathbf{F}_0(P)$ sia un campo centrale e ben definito in tutto lo spazio (fatta eccezione per il punto Q , dove è stata posizionata la carica sorgente). Sostituendo alla q_0 una carica di prova di diverso valore, q'_0 , si ottiene, un nuovo campo vettoriale $\mathbf{F}'_0(P)$ che differisce in ogni punto dello spazio da $\mathbf{F}_0(P)$ per la costante di proporzionalità q'_0/q_0 .

Appare allora logico definire un campo di forza, detto campo elettrico, $\mathbf{E}(P)$, che prescindendo dal valore della particolare carica di prova utilizzata e dipenda solo dalla carica sorgente: $\mathbf{E}(P) = \mathbf{F}_0(P)/q_0 = \mathbf{F}'_0(P)/q'_0$.

Si precisa che, per il principio di azione e reazione, dal punto di vista operativo il campo elettrico risulta essere indipendente dalla carica di prova solo se questa viene scelta di valore molto piccolo. La relazione precedente diventa pertanto: $\mathbf{E}(P) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \mathbf{F}_0(P)/q_0$. Maggiori dettagli sul campo elettrico sono disponibili nella sezione dedicata all'elettrostatica.

Come la forza Coulombiana, anche il campo elettrico ha natura centrale e, pertanto, per esso vale il PSE.

Nel sistema internazionale il campo elettrico si misura in Volt/metro (simbolo [V/m])

b) Definizione della tensione elettrica e della D.d.P.

Si definisce *tensione elettrica* tra due punti dello spazio A e B lungo la curva γ l'integrale di linea del campo elettrico.

$$T_{A(\gamma)B} = \int_{A(\gamma)B} \mathbf{E} \cdot \hat{t} dl$$

Il valore dell'integrale può dipendere o non dipendere dal percorso d'integrazione (Vedi Fig.I.5.1).

Se per ogni coppia di curve (γ, γ') , aventi come punti estremi i punti A e B, risulta $T_{A(\gamma)B} = T_{A(\gamma')B}$, (ovvero l'integrale non dipende dal particolare percorso di integrazione) allora il campo elettrico \mathbf{E} viene detto "conservativo" oppure "irrotazionale". In questo caso:

- 1) l'integrale precedente può essere calcolato lungo un percorso d'integrazione arbitrario
- 2) il valore (unico) dell'integrale assume il nome di "differenza di potenziale" (DDP) e dipende solo dagli estremi

d'integrazione (i punti A e B):
$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{dl}$$

- 3) il campo elettrico \mathbf{E} viene detto "conservativo" oppure "irrotazionale".

N.B. Per rappresentare la D.D.P. V_{AB} si utilizza una freccia che parte da B e punta verso A.

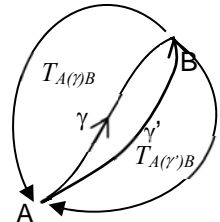


Fig.I.5.1 Se il campo elettrico è conservativo, la tensione elettrica assume lo stesso valore lungo ogni percorso di integrazione: $T_{A(\gamma)B} = T_{A(\gamma')B} = V_{AB}$.

Se il campo elettrico è rotazionale $T_{A(\gamma)B} \neq T_{A(\gamma')B}$.

c) Proprietà della D.D.P.

- 1) $V_{AA}=0$; (Fig.I.5.2a)

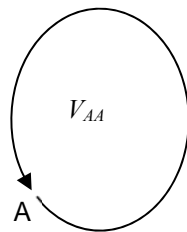


Fig. I.5.2a

- 2) $V_{AB} = - V_{BA}$; (Fig.I.5.2b)

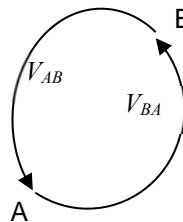


Fig. I.5.2b

- 3) $V_{AC} = V_{AB} + V_{BC}$; (Fig.I.5.2c)

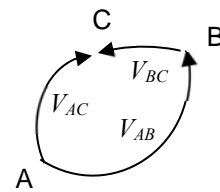


Fig. I.5.2c

d) Potenziale elettrico

Si assuma arbitrariamente un punto "O" dello spazio quale riferimento. Se il campo elettrico è conservativo, la D.D.P. tra il generico punto P dello spazio e il punto di riferimento, O, è pari a V_{PO} . Poiché il punto O è fisso, in tale definizione, si potrà omettere il punto O di riferimento senza che ciò generi alcuna ambiguità: $V_P = V_{PO}$.

La funzione V_P è un campo scalare e viene definito "potenziale elettrico rispetto al punto di riferimento O".

Le seguenti proprietà del potenziale scalare discendono da quelle definite per la D.D.P. nel paragrafo precedente:

- 1) $V_{AA}=0$
- 2) $V_{AB} = V_{AO} + V_{OB} = V_{AO} - V_{BO} = V_A - V_B$

e) Misura della tensione elettrica e della D.D.P. tra due punti: il Voltmetro

Lo strumento che consente di misurare la tensione elettrica tra due punti dello spazio prende il nome di Voltmetro (Fig.I.5.3).

Il Voltmetro è, come l'Amperometro, uno strumento "polare" a due terminali.

Se viene utilizzato per la misura della tensione elettrica $T_{A(\gamma)B}$ tra due punti A e B lungo il percorso specificato, γ , si dovrà aver cura di adagiare i terminali dello strumento sulla curva γ . Viceversa se il campo elettrico è conservativo la D.D.P. tra A e B si potrà misurare collocando il morsetto positivo dello strumento nel punto A e quello negativo nel punto B.

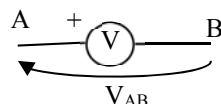


Fig.I.5.3: Inserzione di un amperometro per la misura della corrente in un conduttore filamentare. Lo strumento restituisce la misura corretta se la corrente punta verso il morsetto positivo.

6. Componenti e circuiti elettrici.

a) I circuiti elettrici

Consideriamo una regione dello spazio in cui il campo elettrico sia “quasi ovunque” irrotazionale e il campo di corrente sia “quasi ovunque” solenoidale (il significato di “quasi ovunque” sarà chiarito poco innanzi!).

Definiamo circuito elettrico reale un insieme di “componenti elettrici reali” interconnessi tra di loro mediante conduttori filamentari.

Definiamo “componente elettrico reale” un oggetto delimitato da una “superficie limite” dalla quale fuoriescono dei conduttori filiformi (che assumiamo essere equipotenziali e che da ora in poi chiameremo “terminali”) e che possa essere caratterizzato “con buona approssimazione” dai legami funzionali che si stabiliscono tra le correnti che circolano nei terminali e le tensioni elettriche che si misurano tra i vari terminali (si intende sottolineare che nella caratterizzazione di un oggetto quale componente elettrico non entra nessun'altra delle sue proprietà fisiche quali la massa, il volume, il colore, la forma geometrica se non nella misura in cui tali proprietà vadano a incidere sui legami funzionali di cui sopra: ad esempio due oggetti di dimensioni e forma molto differenti possono avere dal punto di vista elettrico lo stesso comportamento e, per questo, essere elettricamente sostituibili o “equivalenti”).

All'interno delle “superfici limite” dei componenti i campi elettrici possono essere eventualmente rotazionali e i campi di corrente eventualmente non solenoidali, ma in tutta la regione dello spazio esterna alle superfici limite dei componenti i campi elettrici devono essere conservativi e i campi di corrente solenoidali (è necessario per quanto diremo nel seguito che queste circostanze siano verificate, se non esattamente, quanto meno con ottima approssimazione dal punto di vista ingegneristico). Se per la misura delle tensioni elettriche utilizziamo dei percorsi di “lunghezza ragionevole” che non invadono le superfici limite dei componenti e per la misura delle correnti utilizziamo delle superfici di “area ragionevole” che non invadono le superfici limite dei componenti, le tensioni elettriche diventeranno delle D.D.P. (cioè il loro valore non dipenderà dal particolare percorso di misura seguito per andare da un terminale all'altro ma soltanto dai due terminali che stiamo considerando) e la corrente elettrica misurata attraverso un terminale non dipenderà dalla particolare sezione di taglio che utilizzeremo per la misura.

I componenti elettrici e i circuiti elettrici ideali vengono definiti in modo analogo a quanto fatto per i loro corrispondenti reali. I componenti elettrici ideali sono modelli ideali dei componenti reali. Dal punto di vista dimensionale vengono assimilati a dei punti materiali (cioè le loro dimensioni spaziali sono nulle) dai quali fuoriescono dei terminali. Come avviene per i componenti reali ai quali sono associati, la loro caratterizzazione avviene “esclusivamente” attraverso i legami funzionali che si stabiliscono tra le correnti che circolano nei terminali e le tensioni elettriche che si misurano tra i vari terminali.

Tipici componenti elettrici ideali sono i generatori indipendenti (di corrente e tensione), i generatori pilotati (di corrente e di tensione), i resistori, gli induttori, i condensatori, i trasformatori, i diodi, i transistori, i MOSFET, etc.

I circuiti elettrici ideali (o concentrati) si ottengono interconnettendo tra loro elementi concentrati.

Un elemento concentrato è un elemento che ai fini dell'analisi viene assimilato ad un punto materiale o, detto in altri termini, la cui forma e le cui dimensioni sono ininfluenti ai fini del risultato dell'analisi: può essere un singolo componente ideale ma anche un sotto-circuito composto da milioni di componenti ideali che comunica con l'esterno attraverso due o più terminali.

Da un punto di vista dell'andamento temporale, i segnali $x(t)$ che circolano all'interno dei circuiti elettrici possono essere stazionari o variabili. Nel secondo caso, la loro legge oraria può essere periodica o aperiodica. In figura I.6.1 vengono classificate le principali condizioni di funzionamento.

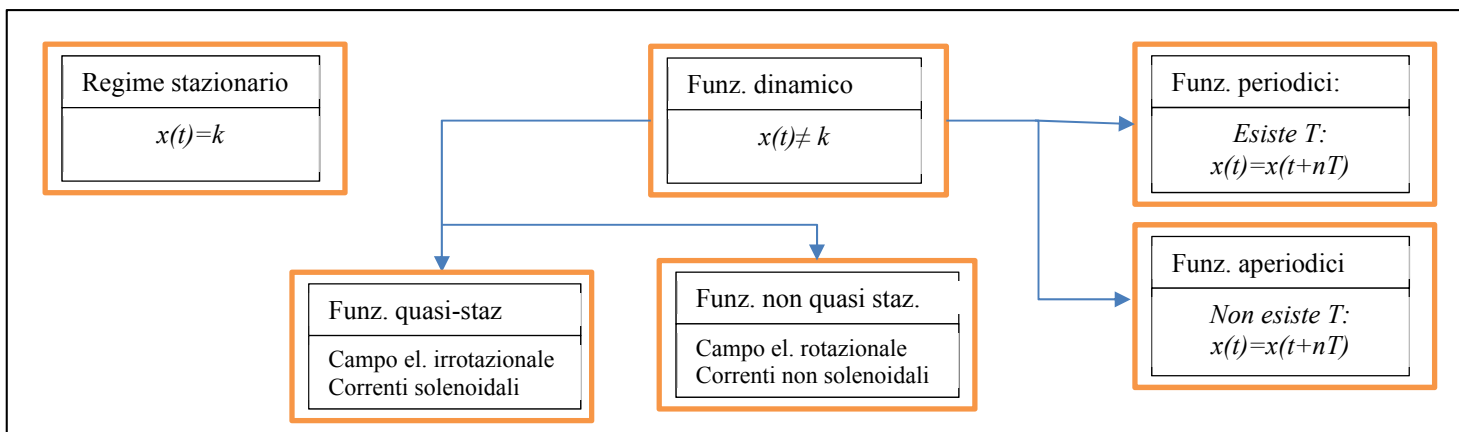


Fig.I.6.1. Classificazione del comportamento dei circuiti elettrici nel dominio del tempo

b) Il modello circuitale a parametri concentrati e il modello circuitale a parametri distribuiti

Nei modelli circuitali a parametri concentrati le dimensioni fisiche del circuito (lunghezza l_{cir}) non vengono considerate in alcun modo ovvero, se si preferisce, vengono trascurati completamente i ritardi di propagazione ($\tau=l_{cir}/v_{prop}$, dove v_{prop} è la velocità di propagazione del segnale elettromagnetico che nello spazio libero è pari a circa $3E8$ m/s e, in queste condizioni, si denota col simbolo “c”) dei segnali elettromagnetici da un punto all’altro del circuito (Fig.I.6.2). In altre parole si assume che la velocità di propagazione del segnale elettromagnetico sia non limitata.

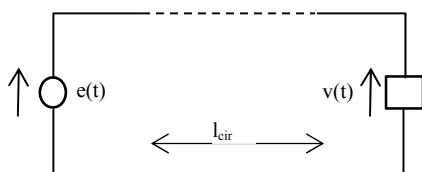


Fig.I.6.2 Il segnale $v(t)=e(t-L/c)$, $c=3e8$ m/s. Nell’ approssimazione a parametri concentrati si assume $v(t)=e(t)$

Quando è valida l’ approssimazione a parametri concentrati?

Per rispondere in maniera corretta occorre fare riferimento alla rapidità con cui varia nel tempo e nello spazio il segnale elettromagnetico che interessa il circuito. Un metodo matematico particolarmente adeguato allo scopo è rappresentato dalla cosiddetta analisi di Fourier tramite la quale è possibile rappresentare nel dominio della frequenza un segnale variabile nel tempo (o nello spazio). Tale rappresentazione prende il nome di “spettro”.

Un segnale che varia nel tempo con legge sinusoidale $a(t)=A*\sin(2*\pi*f*t)$ viene rappresentato nel dominio della frequenza attraverso un unico punto di ascisse pari a f ed ordinata pari all’ ampiezza A della sinusoida (anche se, tecnicamente, si preferisce utilizzare il termine di “riga spettrale” anziché quello di “punto”).

Un segnale periodico non sinusoidale di periodo T sarà invece rappresentato attraverso una sequenza di righe spettrali multiple intere della frequenza fondamentale $f_{fond}=1/T$ (f_{fond} è chiamata anche “armonica fondamentale”).

Infine, un generico segnale aperiodico $a(t)$ sarà rappresentato attraverso una funzione della frequenza $A(f)$ che tenderà ad assumere valore nullo o trascurabile al crescere della frequenza (in altre parole, è sempre possibile definire un valore della frequenza, f_{max} , tale per cui la funzione $A(f)$ possa essere assunta di valore nullo per ogni $f>f_{max}$). Alla frequenza f_{max} sono associabili immediatamente due parametri addizionali: il primo temporale, detto periodo ($T_{fmax}=1/f_{max}$) e il secondo di tipo spaziale, detto lunghezza d’ onda ($\lambda_{fmax}=v_{prop}/f_{max}$).

Siamo ora in grado di rispondere al quesito dal quale eravamo partiti. L’ approssimazione a parametri concentrati può essere ritenuta valida se dal confronto tra λ_{fmax} e l_{cir} risulta $\lambda_{fmax}>>l_{cir}$: il fatto che questa disuguaglianza sia verificata implica che il

segnale elettromagnetico $a(x,t)$ assume all'istante generico t la medesima intensità (o quasi) in ogni punto del circuito (Vedi fig.I.6.3)

Un secondo criterio, sostanzialmente analogo al precedente, è quello di confrontare il tempo, τ , che impiega il segnale elettromagnetico a percorrere il circuito lungo la direzione di maggiore estensione con il periodo $T_{f_{max}}$: il verificarsi della diseuguaglianza $\tau \ll T_{f_{max}}$ implica un ritardo di propagazione trascurabile del segnale elettromagnetico.

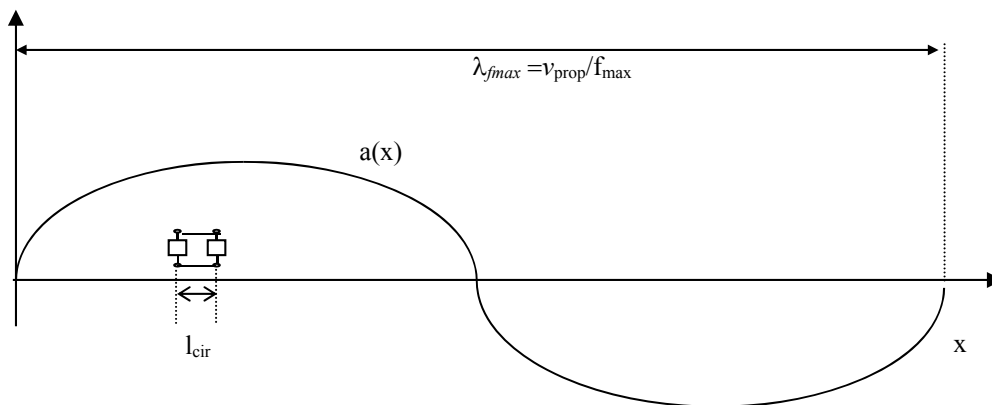


Fig.I.6.3 Un circuito viene detto a parametri concentrati se:

- 1) le massime dimensioni fisiche del circuito (l_{cir}) sono trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda corrispondente alla massima frequenza significativa del segnale $\lambda_{f_{max}} = v_{prop} / f_{max}$.
- 2) il tempo che impiega il segnale a coprire le dimensioni del circuito è molto minore rispetto al periodo corrispondente alla massima frequenza significativa del segnale.

Facciamo qualche esempio.

1) Si consideri una linea elettrica lunga 60 km sulla quale viaggia una tensione sinusoidale alla frequenza di 50Hz. Risulta $\lambda_{f_{max}} = 3E8/50 = 6E6 \text{ m} = 6E3 \text{ km}$. È chiaro che $6000\text{km} \gg 60\text{km}$ e dunque si può utilizzare l'approssimazione a parametri concentrati.

2) Si consideri la scheda madre di un PC per la quale $l_{cir} = 0.3\text{m}$. La frequenza del segnale è ora pari a $1\text{GHz} = 1E9 \text{ Hz}$. Risulta $\lambda_{f_{max}} = 3E8/1e9 = 0.3 \text{ m}$. È chiaro che ora $\lambda_{f_{max}}$ e l_{cir} sono dello stesso ordine di grandezza e l'approssimazione a parametri concentrati non è utilizzabile.

Questa è una delle principali ragioni per cui non si riescono a progettare processori che viaggiano ad una frequenza superiore a qualche GHz.

Nelle analisi circuitali a parametri distribuiti le soluzioni sono funzione oltre che del tempo anche di una o più coordinate spaziali (in genere quella/e lungo la quale il circuito presenta la maggiore estensione spaziale).

Si tiene conto, in altre parole, dei ritardi di propagazione dei segnali elettromagnetici.

Occorre, in ogni caso, aggiungere che per lo studio di questa classe di circuiti vengono impiegate le stesse tecniche utilizzate per l'analisi dei circuiti a parametri concentrati.

Oltre ai tradizionali circuiti elettrici, alcuni sistemi fisici schematizzabili attraverso circuiti a parametri concentrati sono

- i dispositivi integrati (che sono alla base della moderna elettronica e grazie ai quali è stato possibile creare le sofisticate apparecchiature elettroniche che trovano posto in ogni angolo della nostra vita e renderle accessibili a tutti);
- i giganteschi sistemi di produzione e trasporto dell'energia elettrica;
- le macchine elettriche;
- i sistemi di misura elettrica ed elettronica;

Invece, per la simulazione dei circuiti a microonde o delle antenne devono essere utilizzati circuiti a parametri distribuiti o, addirittura, metodi più complicati nei quali si assumono quali incognite gli stessi campi elettromagnetici.

Riassumendo, affinché sia valida l'approssimazione circuitale a parametri concentrati si devono verificare le seguenti condizioni:

- 1) il campo elettrico deve essere irrotazionale al di fuori delle superfici limite che circondano i componenti ideali;
- 2) il campo di corrente deve essere solenoidale al di fuori delle superfici limite che circondano i componenti ideali;
- 3) sia ragionevole trascurare il ritardo di propagazione dei segnali elettromagnetici attraverso l'intero circuito.