

## CAPITOLO IV

### Principi e teoremi per i circuiti elettrici e i bipoli in regime stazionario

#### 1. Principio di non amplificazione delle tensioni

Sia **O** un generico nodo di una rete comunque complessa operante in regime stazionario.

Se su questo nodo non si appoggiano terminali di componenti attivi, il suo valore di potenziale non costituisce né un massimo né un minimo assoluto per i potenziali dei nodi del circuito.

Con riferimento alla Fig.IV.1, l'ipotesi che sul nodo **O** si appoggino esclusivamente  $N_O$  terminali appartenenti ad altrettanti differenti bipoli passivi implica che

$$P_{ass,j} = V_{Pj,O} I_{Pj,O} \geq 0 \quad \forall j = 1: N_O.$$

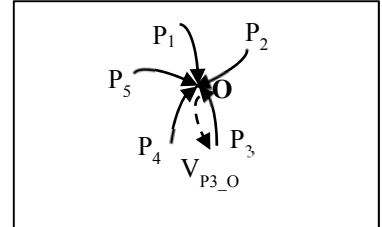


Fig.IV.1: sul nodo **O** della rete si appoggiano esclusivamente terminali di componenti passivi

Dimostriamo che  $\Phi_O$ , il potenziale del punto **O**, risulta intermedio rispetto al valore assunto dal potenziale negli  $N_O$  nodi,  $P_1, \dots, P_j, \dots, P_{N_O}$ , collegati ad **O** attraverso i menzionati bipoli passivi.

**Dim:** Si assuma che per tutte le correnti sui terminali collegati al punto **O** sia stato assunto l'orientamento entrante nel nodo.

Sotto questa ipotesi, la LKC applicata nel nodo **O** assume la forma:  $\sum_{j=1}^{N_O} I_{Pj,O} = 0$  e, pertanto, vi sarà almeno una corrente positiva ed una negativa. Senza perdere di generalità, supponiamo che  $I_{P3,O} > 0$  e  $I_{P4,O} < 0$ . Poiché per ipotesi tutti i bipoli collegati al nodo **O** sono passivi, risulterà di conseguenza  $V_{P3,O} = \Phi_{P3} - \Phi_O > 0$  e  $V_{P4,O} = \Phi_{P4} - \Phi_O < 0$ , e cioè:  $\Phi_{P3} > \Phi_O > \Phi_{P4}$ .

Risulta dunque dimostrato che il potenziale del punto **O** non è un punto di massimo o di minimo assoluto per i nodi della rete.

Si consideri, ora, lo schema di rete proposto in Fig.IV.2: un generatore ideale stazionario di tensione che alimenta un bipolo passivo resistivo (passivo) complesso con una FEM di valore pari a  $E^*$ .

**Il teorema di non amplificazione delle tensioni afferma che il massimo e il minimo valore di potenziale rispetto ad un qualunque riferimento si trova in corrispondenza dei terminali del generatore.**

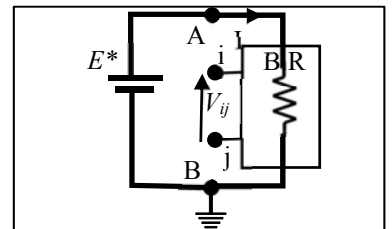


Fig.IV.2: Configurazione di riferimento per il teorema di non amplificazione delle tensioni. Un generatore ideale FEM alimenta un bipolo resistivo complesso

In altre parole, assumendo come punto a potenziale zero il terminale negativo del generatore, i potenziali di tutti i nodi della rete assumeranno un valore compreso tra zero ed  $E^*$ . Come conseguenza, la DDP in termini assoluti,  $V_{ij}$ , tra i due generici nodi  $i$  e  $j$  della rete non può essere maggiore di  $E^*$ .

**Dim.** In base al teorema precedente gli unici nodi della rete che possono costituire un massimo e un minimo per la funzione potenziale sono quelli su cui si appoggiano i terminali dell'unico generatore. Pertanto, in termini assoluti, la massima DDP rilevabile nella rete è quella tra questi due nodi e cioè la FEM imposta dal generatore,  $E^*$ .

È possibile dimostrare in maniera sostanzialmente analoga il **teorema di non-amplificazione delle correnti: in una rete stazionaria alimentata esclusivamente da un generatore ideale di corrente, ogni corrente di lato non può assumere, in termini assoluti, un valore superiore a quella impressa dal generatore.**

Si sottolinea immediatamente che tali proprietà valgono esclusivamente nelle reti che operano in regime stazionario.

Nelle reti a regime variabile, viceversa, occorreranno alcune precisazioni.

**Esempio**

Si vuole verificare la validità del teorema di non amplificazione delle tensioni sulla rete schematizzata in fig.IV.2a.

Utilizziamo la tecnica di riduzione per determinare la corrente che interessa il generatore di tensione.

$$I_1 = \frac{E_1^*}{R_1 + R_3 + R_2 \parallel R_4} = \frac{E_1^*(R_2 + R_4)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_2 R_4} = 100 \frac{10}{125} = 8 [A]$$

$$I_2 = I_1 \frac{R_4}{R_2 + R_4} = \frac{8}{2} = 4 [A]; \quad I_4 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_4} = \frac{8}{2} = 4 [A];$$

$$\Phi_A = E_1^* = 100[V]$$

$$\Phi_C = E_1^* - R_3 I_1 = 100 - 6 \cdot 8 = 52 [V]; \quad \Phi_D = R_1 I_1 = 6 \cdot 8 = 48 [V];$$

Come si vede:

- La corrente di massimo valore assoluto è quella che interessa l'unico lato attivo
- I nodi su cui si appoggia il generatore sono quelli in cui il potenziale assume il valore massimo e il minimo.
- Chiaramente la massima tensione è quella che cade ai capi del lato attivo, in quanto ottenuta come differenza tra i valori massimo e minimo assunti dai potenziali nodali:  $E^*_1 = \Phi_A - \Phi_B = 100 [V]$ .

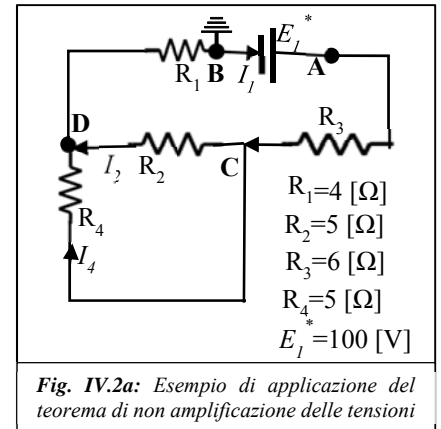


Fig. IV.2a: Esempio di applicazione del teorema di non amplificazione delle tensioni

**2. Teorema di Thevenin o del generatore equivalente di tensione**

Si supponga di voler risolvere una rete contenente un numero imprecisato di componenti, alcuni dei quali potrebbero, eventualmente, essere anche non-lineari. Si assuma, altresì, che, come in vedi fig.IV.3, la rete sia riducibile a due bipoli accoppiati attraverso la loro unica porta. Il primo dei due bipoli sia costituito esclusivamente da componenti normali e cioè sia un Bipolo Lineare Attivo. Il secondo bipolo conterrà tutti i restanti componenti della rete, incluso quelli non-lineari eventualmente presenti e, pertanto, nel caso più generale sarà un Bipolo (eventualmente) Non Lineare Attivo.

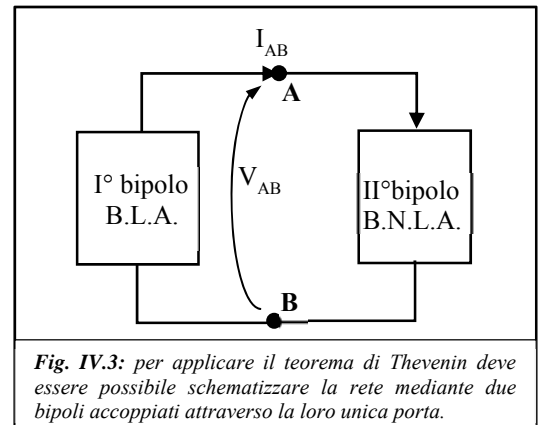


Fig. IV.3: per applicare il teorema di Thevenin deve essere possibile schematizzare la rete mediante due bipoli accoppiati attraverso la loro unica porta.

**Il teorema di Thevenin afferma che, sotto le precedenti premesse, se il BLA è controllabile in corrente e ben-definito, allora è possibile sostituirlo con un bipolo equivalente costituito da un generatore reale di tensione (detto generatore equivalente di Thevenin) senza che il BNLA si accorga della sostituzione** (Vedi Fig.IV.4).

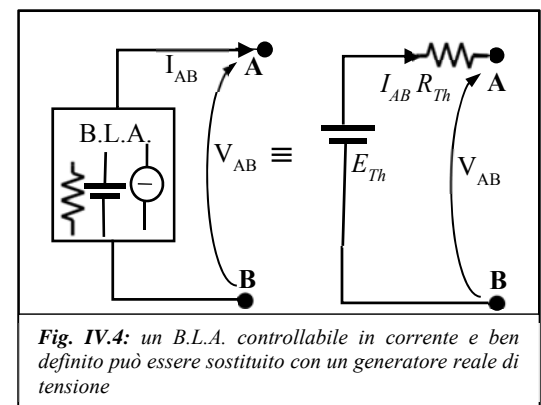


Fig. IV.4: un B.L.A. controllabile in corrente e ben definito può essere sostituito con un generatore reale di tensione

Un bipolo viene detto "ben-definito" se il suo accoppiamento col resto della rete avviene soltanto attraverso la sua porta e in nessun altro modo. Vedremo più avanti che se nella rete sono presenti doppi bipoli quali, ad esempio, generatori pilotati o induttori accoppiati magneticamente questa condizione non è sempre soddisfatta.

Si noti che, una volta effettuata la sostituzione, sarà possibile calcolare attraverso lo studio di una rete semplificata tutte le variabili elettriche relative al BNLA, ma non sarà più possibile determinare alcun valore relativo alle variabili elettriche contenute nel BLA.

**Si sottolinea, infine, che il teorema del generatore equivalente di Thevenin si applica ai BLA, non alle reti.**

Ai fini dell'equivalenza:

- il generatore di tensione, presente nello schema di Thevenin, deve imporre una F.E.M. pari alla tensione rilevata ai morsetti A-B del BLA quando questi sono lasciati aperti (Vedi fig.IV.5a);
- Il resistore, presente nello schema di Thevenin, deve avere una resistenza pari a quella vista dai morsetti A-B dopo aver staccato il BNLA e passivizzato il BLA (Vedi fig.IV.5b).

Si ricorda che passivizzare un BLA significa:

- sostituire i generatori indipendenti di tensione con dei corto circuiti
- sostituirei generatori indipendenti di corrente con dei circuiti aperti.

**Esempio I**

Si consideri il semplice circuito rappresentato in fig.IV.6. Si intende calcolare la potenza assorbita dal resistore  $R_3$ , appoggiato sui morsetti A-B. Allo scopo si può sostituire il BLA contenuto nel box a sinistra dei morsetti A-B attraverso il generatore equivalente di Thevenin.

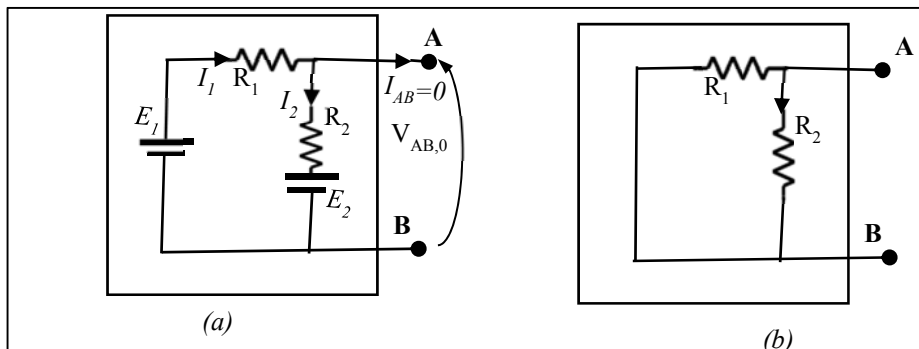
- la FEM imposta dal generatore equivalente di Thevenin risulta pari alla tensione misurata a vuoto tra i morsetti A-B del BLA (vedi fig.IV.7a) mentre la resistenza equivalente che compare nello schema di Thevenin è uguale alla resistenza del BLA passivizzato quando lo si guarda dai morsetti A-B (vedi fig.IV.7b):

$$E_{Th} = V_{AB0} = E_2 + R_2 I_2 = E_2 + R_2 \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$$

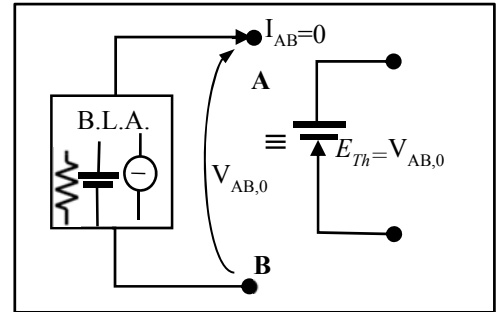
$$R_{Th} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

infine, con la rete di fig.IV.6b si perviene alla potenza assorbita da  $R_3$

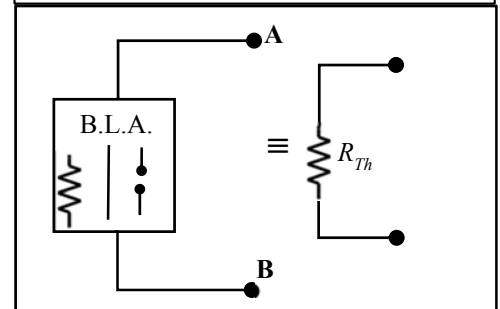
$$P_{a,R3} = R_3 I_3^2 = R_3 \left( \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_3} \right)^2$$



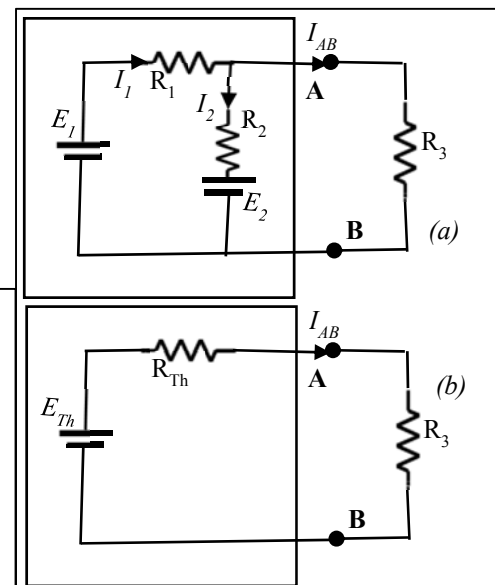
**Fig. IV.7:** Esempio di applicazione del Teorema di Thevenin: le reti da utilizzare per il calcolo dei parametri di Thevenin: (a) la tensione a vuoto  $V_{AB,0}$  è pari alla FEM,  $E_{Th}$  imposta dal generatore di Thevenin; (b) la resistenza vista dai morsetti A-B dopo aver passivizzato il BLA fornisce il valore da utilizzare per la  $R_{Th}$  che compare nello schema equivalente di Thevenin.



**Fig. IV.5a:** la FEM del generatore di Thevenin è pari alla tensione ai morsetti del BLA quando sono lasciati aperti



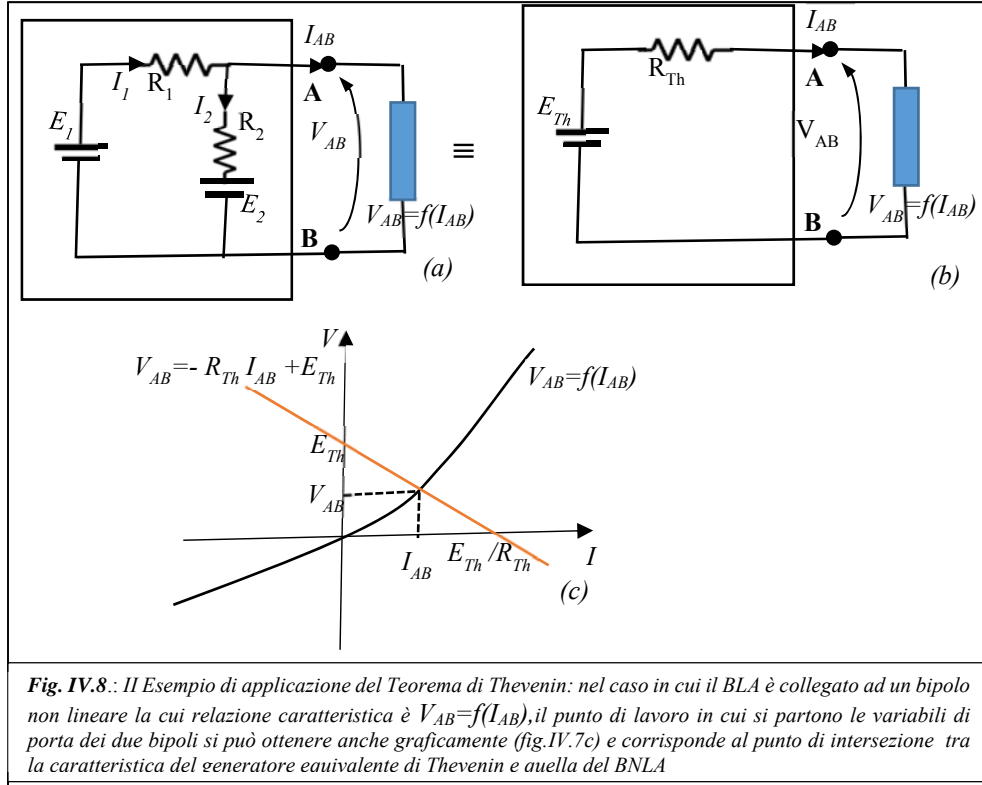
**Fig. IV.5b:** la resistenza del resistore presente nel circuito equivalente di Thevenin è quella vista dai morsetti del BLA dopo averlo passivizzato



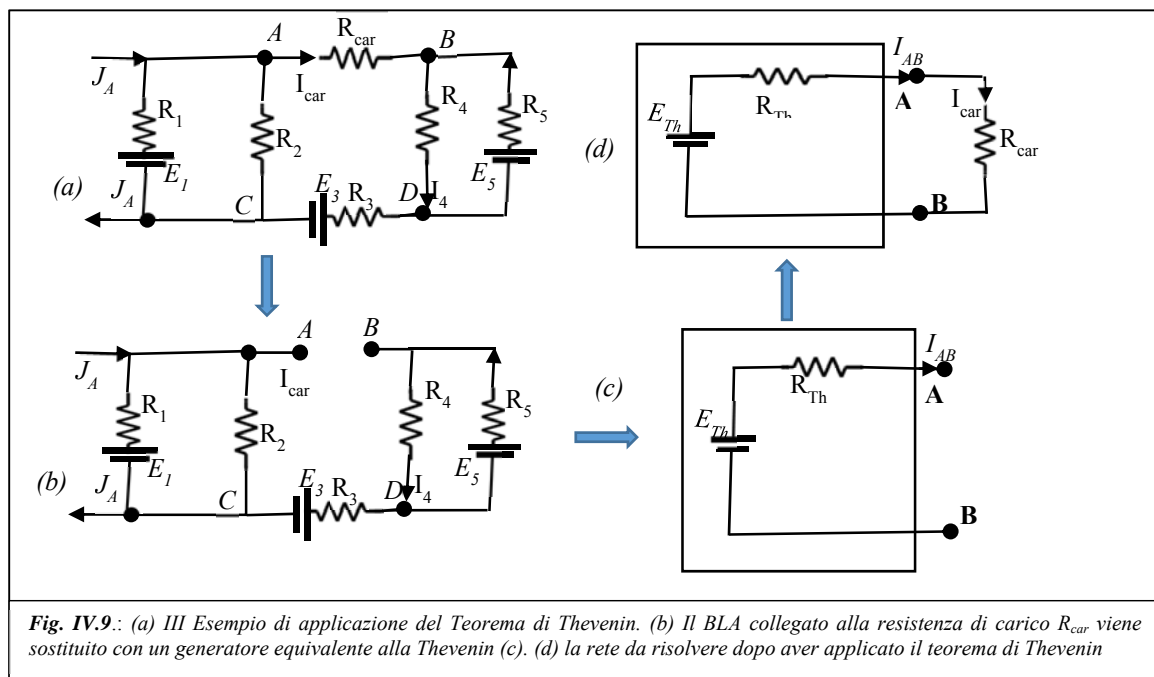
**Fig. IV.6.:** Esempio di applicazione del Teorema di Thevenin: si intende calcolare la potenza assorbita da  $R_3$ ; allo scopo sostituiremo nella rete (a) il BLA a sinistra dei morsetti A-B con il generatore equivalente di Thevenin, e risolveremo la rete (b).

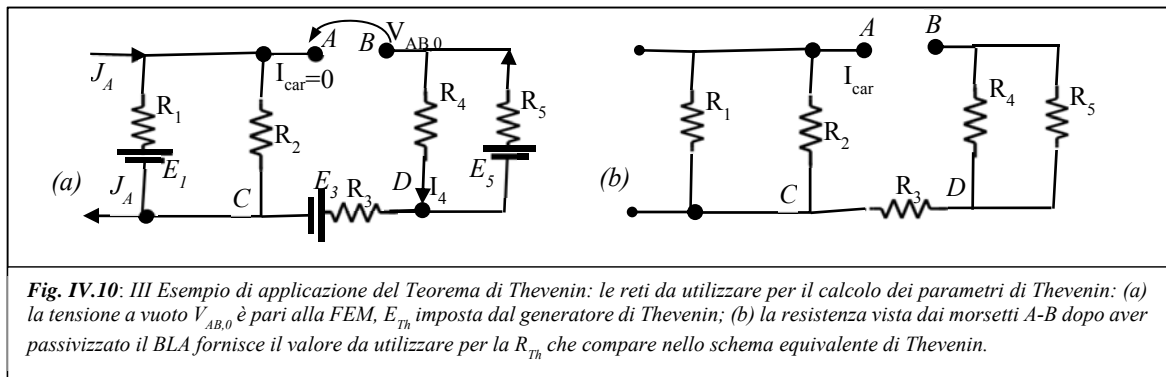
**Esempio II**

Si supponga ora che il BLA dell'esempio precedente sia collegato ad un BNLA la cui caratteristica è esprimibile attraverso la relazione  $V_{AB}=f(I_{AB})$ . In queste situazioni, il punto di lavoro per le variabili della porta di accoppiamento dei due bipoli può essere determinata anche graficamente (vedi fig.IV.7c) sovrapponendo le relazioni caratteristiche del BNLA e del BLA che, per la sussistente equivalenza, coincide con la caratteristica del generatore di Thevenin.



**Esempio III**





Si consideri il circuito schematizzato in fig.IV.9a. Si intende calcolare la potenza assorbita dal resistore  $R_{car}$ , appoggiato sui morsetti A-B. Allo scopo si può sostituire il BLA visto ai morsetti A-B con un generatore equivalente alla Thevenin.

- la FEM imposta dal generatore FEM presente nel bipolo equivalente di Thevenin risulta pari alla tensione misurata a vuoto tra i morsetti A-B del BLA (vedi fig.IV.10a) mentre la resistenza equivalente che compare nello schema di Thevenin è uguale alla resistenza del BLA passivizzato quando lo si guarda dai morsetti A-B (vedi fig.IV.10b). Effettuiamo i calcoli:

$$E_{Th} = V_{AB0} = V_{AC0} + V_{CD0} + V_{DB0} = \left( \frac{E_1 R_2}{R_1 + R_2} + J_A R_1 \parallel R_2 \right) - E_3 - \frac{E_5 R_4}{R_4 + R_5}$$

$$R_{Th} = R_1 \parallel R_2 + R_3 + R_4 \parallel R_5$$

infine, con la rete di fig.IV.6b si perviene alla potenza assorbita da  $R_{car}$

$$P_{a,R3} = R_{car} I_{car}^2 = R_{car} \left( \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_{car}} \right)^2$$

### 3. Teorema di Norton o del generatore equivalente di corrente

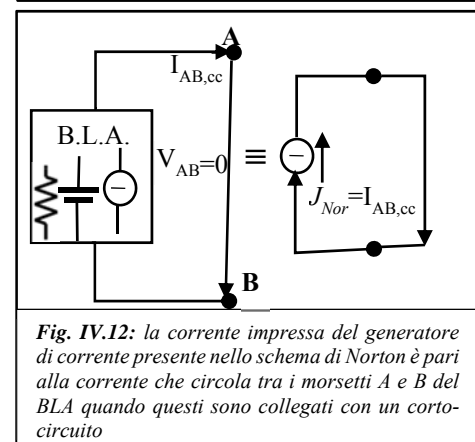
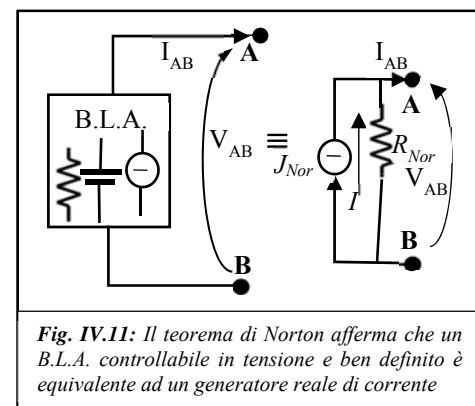
Il teorema di Norton rappresenta il duale del teorema di Thevenin ma si può applicare sotto condizioni leggermente differenti.

In dettaglio, si supponga di voler risolvere una rete contenente un numero imprecisato di componenti, alcuni dei quali potrebbero, eventualmente, essere anche non-lineari. Si assuma, altresì, che, come in vedi fig.IV.11, la rete sia riducibile a due bipoli accoppiati attraverso la loro unica porta. Il primo dei due bipoli sia costituito esclusivamente da componenti normali e cioè sia un Bipolo Lineare Attivo. Il secondo bipolo conterrà tutti i restanti componenti della rete, incluso quelli non-lineari eventualmente presenti e, pertanto, nel caso più generale sarà un Bipolo (eventualmente) Non Lineare Attivo.

**Il teorema di Norton afferma che, sotto le precedenti premesse, se il BLA è controllabile in tensione e ben-definito, allora è possibile sostituirlo con un bipolo equivalente costituito da un generatore reale di corrente (detto generatore equivalente di Norton) senza che il BNLA si accorga della sostituzione** (Vedi Fig.IV.11).

Ai fini dell'equivalenza:

- il generatore di corrente, presente nello schema di Norton, impone una corrente pari a quella che circola tra i morsetti A-B del BLA quando questi sono collegati con un corto circuito (Vedi fig.IV.12);



- Il resistore, presente nello schema di Norton, ha una resistenza pari a quella vista dai morsetti A-B dopo aver staccato il BNLA e passivizzato il BLA (Vedi fig.IV.5b) e, cioè, uguale a quella presente nel circuito di Thevenin.

Si ricordi ora che in II.6.5 abbiamo dimostrato che un generatore reale di tensione, costituito dalla serie di un generatore ideale di FEM  $E^*$  e di un resistore  $R_E$ , risulta equivalente ad un generatore reale di corrente, costituito dal parallelo di un generatore ideale di corrente  $J^*$  e di un resistore  $R_J$ , se sono verificate le seguenti relazioni:

$$R_E = R_J; \quad J^* = E^*/R_E$$

Pertanto, se un BLA attivo è ben definito e controllabile sia in corrente che in tensione ammetterà una rappresentazione equivalente alla Thevenin e alla Norton.

Le resistenze  $R_{Th}$  e  $R_{Nor}$  presenti nei due schemi equivalenti vengono calcolate, come già sottolineato, nello stesso modo e assumeranno, naturalmente, un valore identico:  $R_{Th} = R_{Nor}$  (3.1)

Tra la FEM del generatore di Thevenin e la corrente impressa del generatore di Norton sussiste, invece, la seguente relazione:  $E_{Th} = R_{Th} J_{Nor}$  (3.2)

Si noti che questa relazione può essere anche utilizzata per ottenere la resistenza di Thevenin a partire dai calcoli della tensione a vuoto e della corrente di corto-circuito relativa ai morsetti del BLA che si intende sostituire:

$$R_{Nor} = R_{Th} = E_{Th} / J_{Nor} \quad (3.3)$$

### Esempio I

Come esempio applicativo del teorema di Norton, si consideri lo stesso circuito utilizzato per l'esempio I del teorema di Thevenin (Fig.IV.13a).

Con riferimento alla Fig.IV.13b, si proceda a collegare i morsetti A e B del BLA che si intende sostituire col generatore equivalente di Norton e si calcoli la corrente che passa attraverso il corto utilizzando il PSE:

$$J_{Nor} = I_{AB,cc} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$$

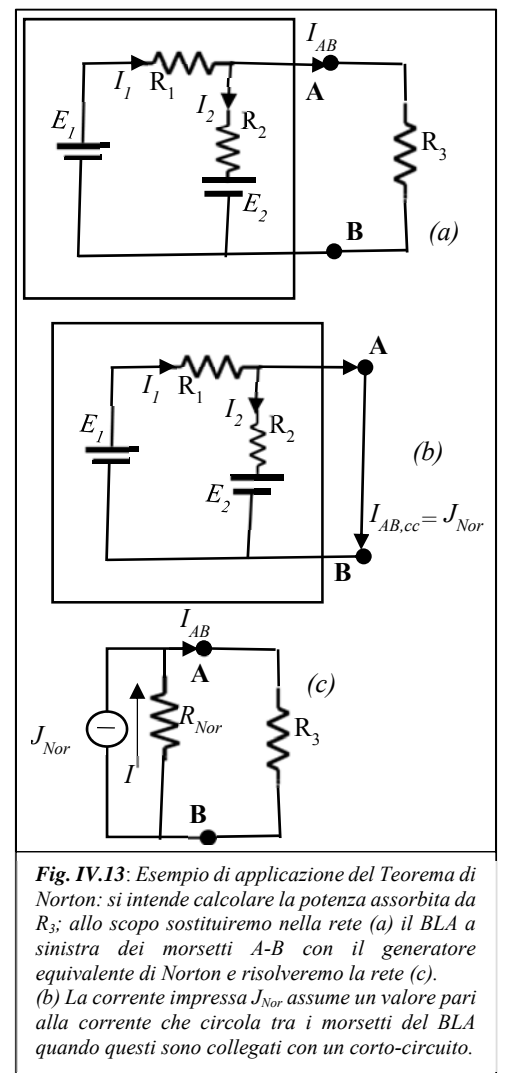
Nell'applicazione del PSE si è proceduto molto rapidamente ricordando che il parallelo di un resistore con un corto-circuito è equivalente a un corto circuito (ovvero, se si preferisce, quando un partitore di corrente è costituito da un resistore e da un corto, la corrente che interessa il partitore va tutta nel corto-circuito).

La resistenza nel circuito equivalente di Norton è uguale a quella precedentemente calcolata per Thevenin:  $R_{Nor} = R_{Th} = R_1 \parallel R_2$

Proviamo a verificare la validità della formula (3.3):

$$R_{Nor} = \frac{E_{Th}}{J_{Nor}} = \frac{E_2 + R_2 \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}}{\left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\right)} = \frac{R_1 E_2 + R_2 E_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

In effetti, come si vede, i due modi di procedere hanno condotto allo stesso valore per le resistenze da inserire nei due schemi equivalenti.



**Fig. IV.13:** Esempio di applicazione del Teorema di Norton: si intende calcolare la potenza assorbita da  $R_3$ ; allo scopo sostituiremo nella rete (a) il BLA a sinistra dei morsetti A-B con il generatore equivalente di Norton e risolveremo la rete (c). (b) La corrente impressa  $J_{Nor}$  assume un valore pari alla corrente che circola tra i morsetti del BLA quando questi sono collegati con un corto-circuito.

#### 4. Teorema di Millmann

Il teorema di Millmann è una particolarizzazione del metodo dei potenziali nodali e si applica a reti lineari che, dal punto di vista topologico, hanno due soli nodi (per comodità, li chiameremo A e B) ed un numero imprecisato di lati.

Poiché nella rete sono presenti due soli nodi, i lati si trovano tutti in parallelo tra loro.

Condizione necessaria per l'applicabilità del teorema è che tutti i lati siano controllabili in tensione: in altre parole, il teorema non è applicabile se nella rete esiste almeno un lato in cui è presente esclusivamente in generatore ideale di tensione (si osservi peraltro che, in tale situazione, la DDP tra i due nodi risulterebbe imposta dalla FEM del generatore ideale presente e sarebbe dunque è una quantità nota!!).

##### Avendo indicato con

- $l_{ER}$  il numero dei lati della rete contenenti generatori reali di tensione costituiti dalla serie di un generatore ideale di FEM  $E_k$  e una resistenza, di conduttanza  $G_k$  con  $k=1: l_{ER}$
- $l_R$  il numero dei lati della rete contenenti esclusivamente resistori di conduttanza  $G_k$  con  $k=1: l_R$
- $l_J$  il numero dei lati della rete contenenti generatori ideali di corrente  $J_k$  con  $k=1: l_J$ ;

la DDP tra i due nodi della rete si ottiene attraverso la seguente espressione:

$$V_{AB} = \frac{\sum_{k=1}^{l_{ER}} a_k G_k E_k + \sum_{k=1}^{l_J} b_k J_k}{\sum_{k=1}^{l_R} G_k + \sum_{k=1}^{l_{ER}} G_k} \quad (4.1)$$

dove  $a_k$  è un coefficiente moltiplicativo che vale +1 se il generatore FEM punta verso il nodo A, -1 altrimenti;

$b_k$  è un coefficiente moltiplicativo che vale +1 se il generatore di corrente punta verso il nodo A, -1 altrimenti.

##### Esempio I

A titolo di esempio si applichi il teorema di Millmann per determinare la tensione  $V_{AB}$  tra i due nodi della rete in fig.IV.14.

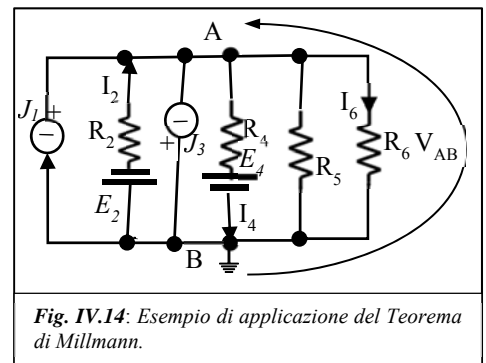
$$V_{AB} = \frac{-G_2 E_2 + G_4 E_4 + J_1 - J_3}{G_2 + G_4 + G_5 + G_6} \quad (4.2)$$

Le relazioni caratteristiche dei lati 2,4 e 6 valgono rispettivamente:

$$V_{AB} = -R_2 I_2 - E_2; \quad V_{AB} = R_4 I_4 + E_4; \quad V_{AB} = R_6 I_6;$$

e, pertanto le correnti  $I_2$ ,  $I_4$  e  $I_6$  valgono rispettivamente:

$$I_2 = -G_2(V_{AB} + E_2); \quad I_4 = G_4(V_{AB} - E_4); \quad I_6 = G_6 V_{AB};$$



**Fig. IV.14:** Esempio di applicazione del Teorema di Millmann.

N.B. Si è detto che il teorema di Millmann non è null'altro che una particolarizzazione del metodo dei potenziali nodali alle reti a due nodi. Verifichiamolo sulla rete di Fig.IV.14 ponendo a massa il nodo B :  $\Phi_B=0$  e scrivendo la LKC nel nodo A col metodo veloce:

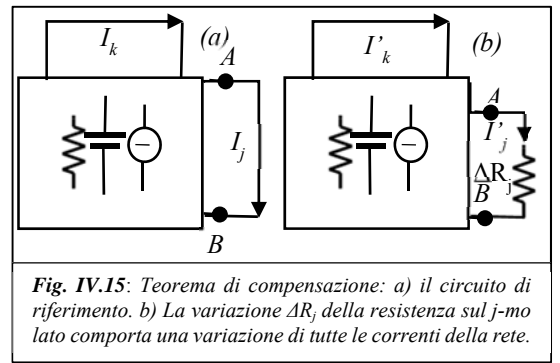
$$(G_2 + G_4 + G_5 + G_6)\Phi_A = -G_2 E_2 + G_4 E_4 + J_1 - J_3 \xrightarrow{\text{yields}} V_{AB} = \Phi_A = \frac{-G_2 E_2 + G_4 E_4 + J_1 - J_3}{G_2 + G_4 + G_5 + G_6}$$

Come si vede, utilizzando i potenziali nodali siamo pervenuti nuovamente all'espressione (4.1).

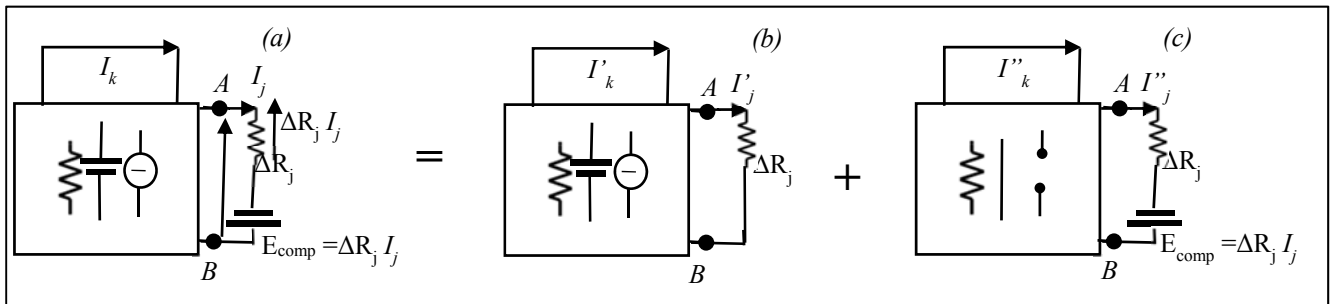
**5. Teorema di compensazione**

Si supponga di avere determinato il valore di tutte le correnti di lato nella generica rete lineare riportata in fig.IV.15 attraverso uno qualunque degli approcci illustrati in precedenza.

Si supponga ora di voler condurre uno studio parametrico sul circuito di riferimento: in particolare, si vogliono determinare le variazioni della corrente nel generico  $k$ -mo lato della rete in corrispondenza dell'imposizione di variazione  $\Delta R_j$  alla resistenza  $R_j$  presente sul generico  $j$ -mo lato.



**Fig. IV.15:** Teorema di compensazione: a) il circuito di riferimento. b) La variazione  $\Delta R_j$  della resistenza sul  $j$ -mo lato comporta una variazione di tutte le correnti della rete.



**Fig. IV.16:** Applicazione del Teorema di compensazione: (a) Aggiungendo in serie al resistore un generatore di tensione  $E_{comp} = \Delta R_j I_j$  che compensi esattamente la caduta di tensione sul resistore aggiuntivo  $\Delta R_j I_j$ , la tensione tra i morsetti A-B risulta nulla. Il bipolo a sinistra dei morsetti vede un corto-circuito, come la rete originaria (vedi fig.IV.15a). b-c) Applicando il PSE la soluzione della rete (a) può essere ottenuta come somma delle soluzioni delle reti (b) e (c). Ovvero la soluzione della rete (b) come differenza tra le soluzioni di (a) e (c).

L'unico modo per rispondere alla richiesta, attraverso le metodologie fornite in precedenza, sembrerebbe essere quello di risolvere ripetutamente il modello completo della rete variando ogni volta il valore della resistenza del  $j$ -mo lato (metodo della forza bruta). Esiste un approccio alternativo, basato sul cosiddetto “**teorema di compensazione**”, che riduce drasticamente l'onere computazionale quando occorre fare analisi parametriche su reti lineari.

L'idea è quella di aggiungere in serie al resistore  $\Delta R_j$ , un generatore di tensione  $E_{comp} = \Delta R_j I_j$  che compensi esattamente la caduta di tensione sul resistore aggiuntivo  $\Delta R_j I_j$ , la tensione tra i morsetti A-B risulta nulla. Il BLA a sinistra dei morsetti A-B disegnato in fig IV.16a è lo stesso che compare nella rete originaria e vede lo stesso carico: un corto circuito.

Per questa ragione la soluzione della rete fig IV.16a coincide con la soluzione originaria nota.

Applicando il PSE “a gruppetti”, la soluzione (nota) della rete di fig IV.16a può essere ottenuta come somma delle soluzioni delle reti di fig. IV.16b e di fig IV.16c. Si noti ora che la rete di fig. IV.16b è proprio quella di cui vogliamo determinare la soluzione (resistenza variata sul  $k$ -mo lato, tutti i generatori della rete originaria accesi; generatore di compensazione assente). Invece la rete di fig.IV.16c è una rete ausiliaria che contiene un unico generatore indipendente e può dunque essere risolta più facilmente, rispetto alla rete di fig. IV.16b, utilizzando le tecniche di riduzione e manipolazione. Riassumendo,

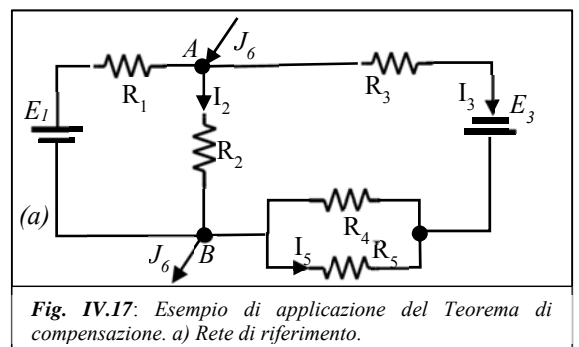
con riferimento alla generica corrente  $I_k$  si ha:  $I_k = I'_k + I''_k \xrightarrow{\text{yields}} I'_k = I_k - I''_k$

**Esempio I**

Si risolva la rete in fig.IV.15.

In seguito, si determini l'entità della corrente che interessa il lato 5 a seguito di una variazione  $\Delta R_2$  della resistenza presente sul lato 2 della rete.

Si ponga  $R_{345} = R_3 + R_4 \parallel R_5$



**Fig. IV.17:** Esempio di applicazione del Teorema di compensazione. a) Rete di riferimento.

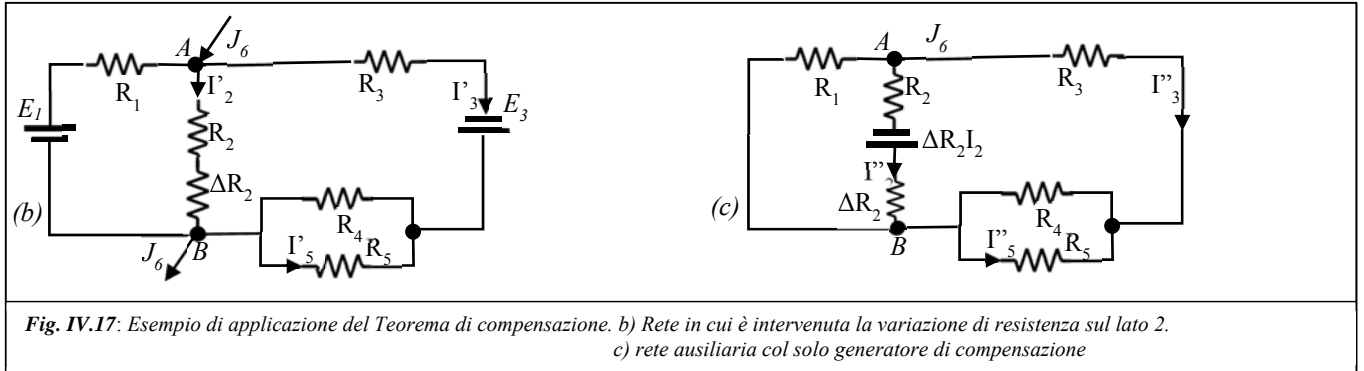


La tensione  $V_{ab}$  può essere determinata rapidamente attraverso il teorema di Millmann:

$$V_{AB} = \frac{G_1 E_1 - G_{345} E_3 + J_6}{G_1 + G_2 + G_{345}}$$

Le correnti  $I_2$  e  $I_5$  valgono rispettivamente:

$$I_2 = G_2 V_{AB}; \quad I_3 = G_{345} (V_{AB} + E_3); \quad I_5 = -I_3 \frac{R_4}{R_4 + R_5};$$



Per determinare la corrente  $I'_5$  che interessa il lato 5 quando la resistenza del lato 2 diventa pari a  $R_2 + \Delta R_2$  (rete di fig.IV.17b) si applichi il teorema di compensazione:  $I'_5 = I_5 - I''_5$ , dove la corrente  $I''_5$  viene determinata risolvendo la rete ausiliaria di fig. IV.17c in cui compare come lato attivo il solo generatore di compensazione.

$$I''_5 = \frac{\Delta R_2 I_2}{R_2 + \Delta R_2 + R_1 \parallel (R_3 + R_4 \parallel R_5)}; \quad I''_5 = I''_2 \frac{R_1}{R_1 + (R_3 + R_4 \parallel R_5)} \frac{R_4}{R_4 + R_5}$$

## 6. Teorema di reciprocità

Si consideri una rete lineare resistiva alimentata sul k-mo lato attraverso il generatore indipendente di tensione  $E_k$  (vedi fig. IV.18a) e la rete duale (fig. IV.18b), identica alla precedente, salvo per il fatto di essere alimentata sul j-mo lato dal generatore indipendente di tensione  $E_j$ , uguale o diverso dal precedente.

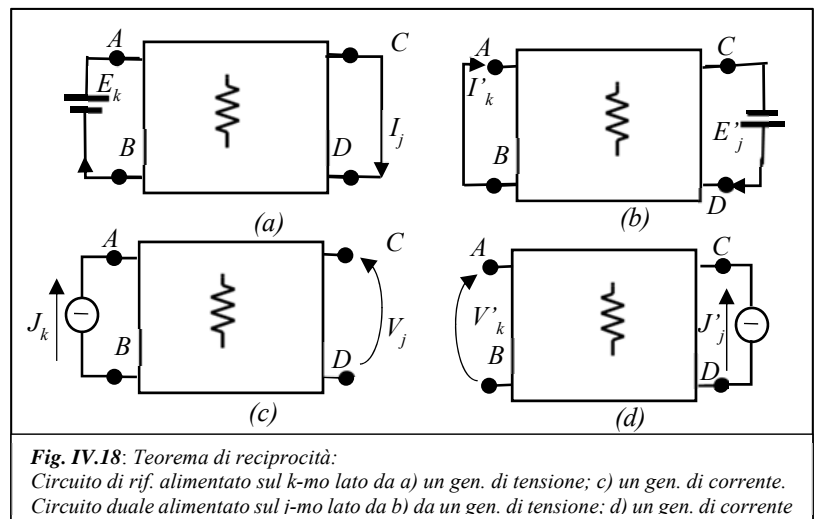
Si contraddistinguono le variabili elettriche presenti nei due circuiti attraverso l'assenza (rete (a)) o la presenza dell'apice (rete (b)) Il

teorema di reciprocità afferma che sotto le ipotesi precisate, vale la seguente relazione:  $E_k I'_k = E'_j I_j$  (6.1)

La relazione (6.1) deriva, sotto ipotesi più restrittive, dal teorema di conservazione delle potenze virtuali (o teorema di Tellegen) e può anche essere riscritta in maniera equivalente (ma più densa di significato) nel seguente modo:

$$\frac{I_j}{E_k} = \frac{I'_k}{E'_j} \quad (6.2)$$

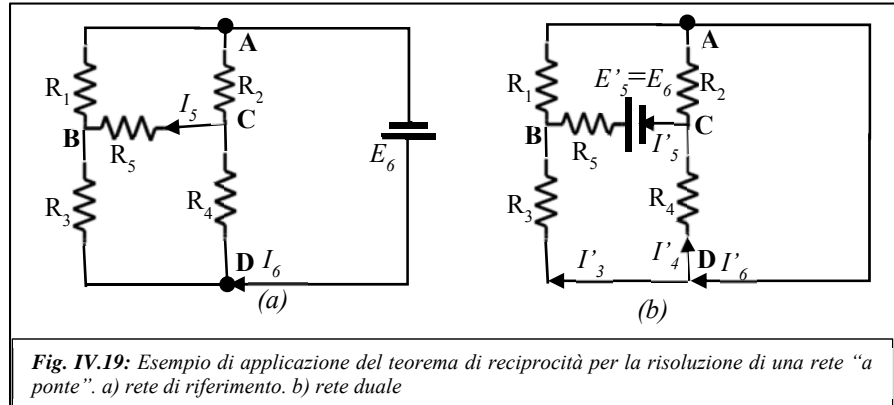
La relazione (6.2) ci dice che, nelle reti che soddisfano alle ipotesi definite, è possibile scambiare l'effetto con la causa. In natura esistono diversi sistemi fisici che godono di questa proprietà e, per questa ragione, vengono definiti reciproci. Il teorema si applica anche nel caso in cui l'alimentazione avvenga tramite un gen. di corrente (Vedi. fig. IV.18c-d).



### Esempio I

Il teorema di reciprocità verrà utilizzato per determinare la corrente  $I_5$  che interessa la diagonale non alimentata del “ponte” rappresentato in fig.IV.19a.

Si noti che la IV.19a è una rete ad un solo generatore ma, nella sua configurazione originale, non è riducibile senza una trasformazione triangolo-stella (o viceversa).



**Fig. IV.19:** Esempio di applicazione del teorema di reciprocità per la risoluzione di una rete “a ponte”. a) rete di riferimento. b) rete duale

Si porti il generatore  $E_6$  sulla diagonale centrale del ponte ponendo attenzione a rispettare la convenzione del generatore utilizzata sul lato 6 della rete di partenza. In base al teorema di reciprocità, è possibile pervenire al valore della corrente di interesse ( $I_5$  sulla rete originaria di fig.IV.19a) risolvendo la rete duale (fig.IV.19b) e, nello specifico, calcolando il valore della corrente  $I'_6$ , il lato occupato nella rete originaria dal generatore di tensione. Poiché  $E'_5 = E_6$  risulterà  $I_5 = I'_6$ .

Si noti che per il calcolo di  $I'_6$  nella rete duale non sono richieste trasformazioni topologiche ma occorre applicare la LKC nel nodo D:

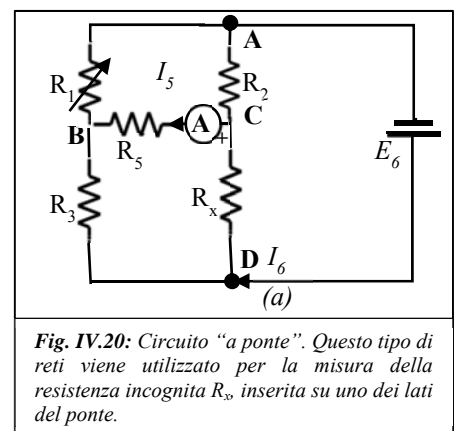
$$I_5 = I'_6 = I'_4 + I'_3 = I'_5 \left( \frac{R_2}{R_2 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_3} \right); \text{ dove } I'_5 = \frac{E_6}{R_5 + R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}$$

### Misura di una resistenza elettrica

I circuiti “a ponte” vengono utilizzati in elettrotecnica per la determinazione del valore di una resistenza incognita,  $R_x$ . Con riferimento alla fig.IV.20, si definiscano “lati del ponte” i lati 1-2-3-4 e “diagonali del ponte” i lati 5 e 6.

La misura viene effettuata inserendo:

- un generatore di tensione in una delle diagonali;
- un amperometro nell'altra diagonale;
- la resistenza incognita su un lato del ponte (ad.es. il lato 4)
- un reostato (resistore a resistenza variabile) sul lato del ponte opposto, rispetto a quello su cui è stata inserita la resistenza incognita.



**Fig. IV.20:** Circuito “a ponte”. Questo tipo di reti viene utilizzato per la misura della resistenza incognita  $R_x$ , inserita su uno dei lati del ponte.

Dal punto di vista operativo, la misura viene effettuata andando a variare la resistenza del reostato fino a quando non si osserva un passaggio di corrente nulla attraverso l'amperometro. Quando ciò avviene si dice che il ponte è in equilibrio e la resistenza incognita viene ottenuta come:

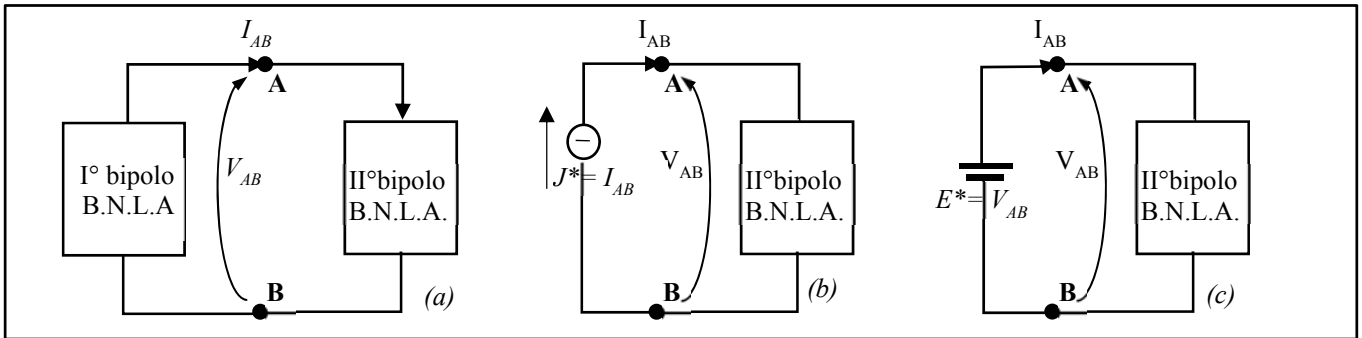
$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad (6.3)$$

I circuiti a ponte vengono utilizzati anche per il calcolo di capacità e induttanze nelle reti che operano in condizioni di regime sinusoidale.

### 7. Teorema di sostituzione

Si consideri una rete, come in fig.IV.21a, che possa essere schematizzata attraverso due bipoli (anche non-lineari) accoppiati attraverso la loro unica porta. Si supponga che la rete ammetta soluzione unica alla porta A-B e che in qualche modo sia noto che questa corrisponde alla coppia di valori  $(I_{AB}, V_{AB})$  per le variabili di porta.

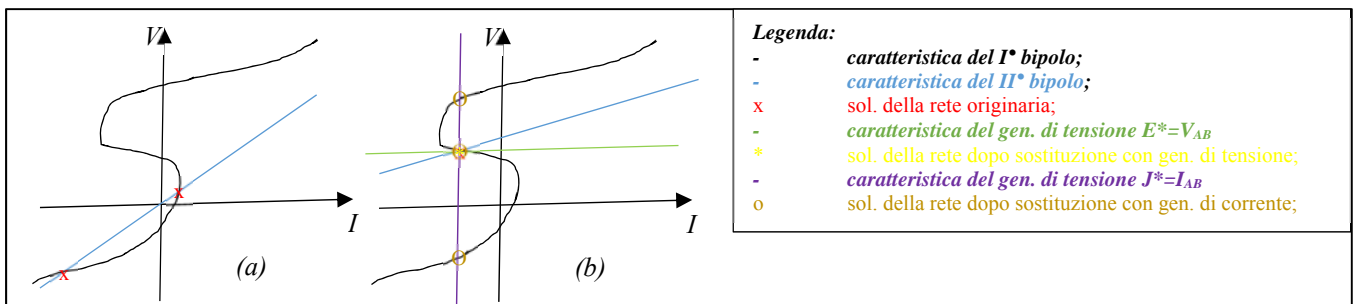
Se si è interessati a conoscere il valore assunto da tutte o alcune delle variabili porta contenute nel secondo dei due bipoli da cui è costituita la rete, il primo bipolo può essere sostituito con un generatore indipendente di tensione che impone ai suoi morsetti una FEM pari a  $V_{AB}$  (fig.IV.21c) oppure con un generatore indipendente di corrente che impone una corrente pari a  $I_{AB}$  (fig.IV.21b) a condizione che, dopo la sostituzione, la soluzione alla porta A-B rimanga unica.



**Fig. IV.21:** Teorema di sostituzione: si applica a rete schematizzabili come due bipoli (eventualmente non-lineari) accoppiati. Il teorema afferma che uno dei bipoli può essere sostituito b) con un generatore ideale di tensione o c) con un generatore ideale di corrente.

Se i due bipoli hanno caratteristiche come quelle mostrate in fig.IV.22a il teorema di sostituzione non è applicabile in quanto la rete di partenza non ha soluzione unica.

Se i due bipoli hanno caratteristiche come quelle mostrate in fig.IV.22b il teorema di sostituzione è applicabile in quanto la rete di partenza ha soluzione unica. Tuttavia per la rete in fig.IV.22b è possibile sostituire il primo bipolo esclusivamente con un gen. indipendente di tensione in quanto la rete ottenuta dopo la sostituzione la rete (fig.IV.21.c) ammette ancora soluzione unica. Viceversa, utilizzando per la sostituzione del primo bipolo un gen. di corrente per la nuova rete (fig.IV.21.b) si otterrebbero due nuovi possibili punti di lavoro non presenti nella soluzione originale.



**Legenda:**  
 - caratteristica del I° bipolo;  
 - caratteristica del II° bipolo;  
 x sol. della rete originaria;  
 - caratteristica del gen. di tensione  $E^*=V_{AB}$   
 \* sol. della rete dopo sostituzione con gen. di tensione;  
 - caratteristica del gen. di tensione  $J^*=I_{AB}$   
 o sol. della rete dopo sostituzione con gen. di corrente;

**Fig. IV.22:** Il teorema di sostituzione: a) non è applicabile in quanto la rete originaria non ammette soluzione unica; b) è applicabile con un gen. di tensione che impone la tensione  $V_{AB}$  (sol. unica prima e dopo la sostituzione) b) non è applicabile con un gen. di tensione che impone la tensione  $V_{AB}$  (sol. non unica dopo la sostituzione)

Si noti che il teorema di sostituzione, come i teoremi di Thevenin e Norton, consente di calcolare le variabili di interesse risolvendo una rete più semplice di quella originaria.

I due approcci sono, tuttavia, profondamente differenti:

- Il bipolo utilizzato in Thevenin e Norton è equivalente al bipolo a prescindere da quale sia il carico a cui è collegato (in altre parole, l'equivalenza non dipende dalla caratteristica del bipolo posto a destra dei morsetti A-B in fig.IV.21a).
- Il generatore utilizzato nel teorema di sostituzione garantisce la stessa soluzione solo per il carico in corrispondenza del quale è stata determinata la soluzione  $(I_{AB}, V_{AB})$  per le variabili di porta. Al variare del II° bipolo cambierà questa soluzione e i generatori utilizzati in precedenza andranno corrispondentemente sostituiti.