ESERCIZI RISOLTI

Argomenti di teoria coinvolti:

1. LKC, LKT;
2. caratterizzazione di bipoli;
3. partitori di corrente e tensione
4. Manipolazioni circuitali;
5. Linearità.

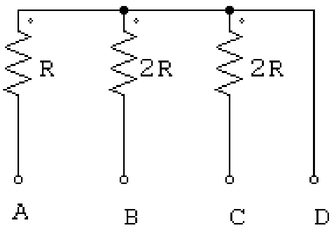
==

Esercizio n.1

La resistenza equivalente di un bipolo resistivo dipende:

1) Dal modo in cui sono collegati tra loro i resistori del circuito;
2) Dai morsetti dai quali si calcola la resistenza equivalente.

Facciamo un esempio: utilizzando tutti i possibili differenti collegamenti tra i resistori in figura, si determineranno i corrispondenti valori di resistenza ottenibili.



SOLUZIONE

Osserviamo innanzitutto che i collegamenti che coinvolgono i nodi B e C con gli altri due rami risultano equivalenti a causa dell'identico valore della resistenza (2R). I collegamenti possibili risultano pertanto A-B (coincidente ai fini dei valori possibili di resistenza con A-C), A-D; B-C e B-D (coincidente ai fini dei valori possibili di resistenza con C-D).

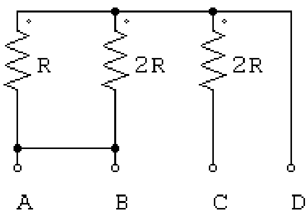


Fig. 1a

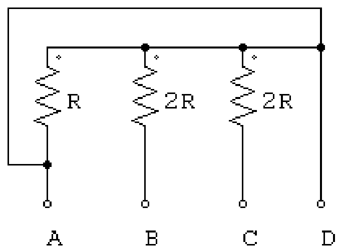


Fig. 1b

In figura 1a e 1b sono mostrati i due collegamenti che coinvolgono il nodo A: in fig. 1a, il nodo A è collegato con B; in fig. 1b il nodo A è collegato con D.

Per tali casi, i possibili valori di resistenza ottenibili sono (si omettono per semplicità i valori di resistenza tra coppie di morsetti per i quali il collegamento effettuato non introduce modifiche rispetto alla struttura originaria):

Morsetti del bip. resistivo	Nodo A collegato con B (fig.1a)	Nodo A collegato con D (fig.1b)
A-C	$R_{AC} = 2R + \frac{2R * R}{2R + R} = 2R + \frac{2}{3}R = \frac{8}{3}R$	$R_{Ac} = 2R$
A-D	$R_{AD} = \frac{2R * R}{2R + R} = \frac{2}{3}R$	$R_{AD} = 0$

In figura 2 sono mostrati i collegamenti che coinvolgono il nodo B (ovvero C); per tali configurazioni si avrà:

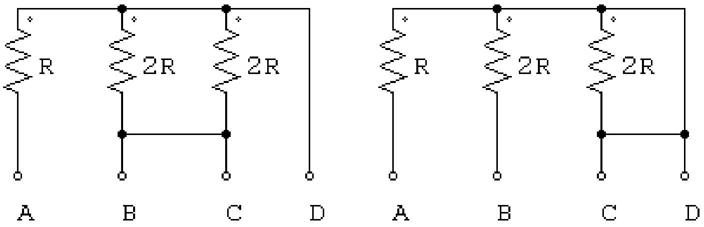


Figura 2

Fig. 2a   Fig. 2b

Morsetti del bipolo resistivo	Nodo B collegato con C (fig.2a)	Nodo C collegato con D (fig.2b)
A-C	$R_{AC} = R_{AB} = 2R$	$R_{AC} = R$
B-D	$R_{BD} = R$	$R_{BD} = 2R$

Esercizio n. 2

Per i due circuiti in figura si determinino le caratteristiche dei bipoli equivalenti viste ai morsetti A-B e le si disegnino sul piano I-V.

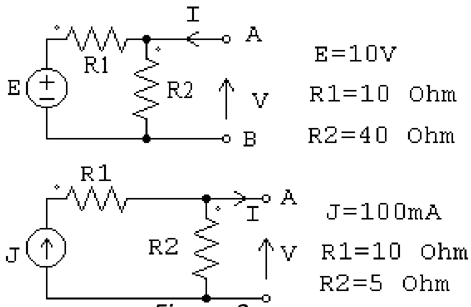


Figura 3

SOLUZIONE

Poiché i singoli bipoli sono "normali", ovvero esibiscono una caratteristica rappresentabile su piano I-V tramite una retta, in generale non passante per l'origine, la caratteristica del bipolo equivalente sarà anch'essa di tipo rettilineo. Il metodo più semplice per individuarla è quella di valutarla in due punti "notevoli", che chiameremo 1 e 2 e sono caratterizzati rispettivamente dalle condizioni V_{p1}=0 e I_{p2}= 0.

Per il bipolo contenente il generatore di tensione, la condizione V_{p1}=0 si ottiene collegando A e B tramite un corto circuito (figura 3A)

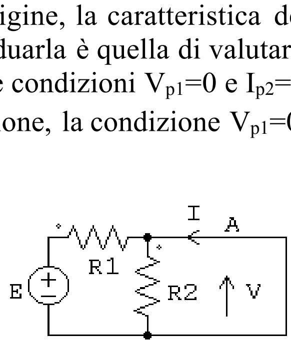


Figure 3A

Per V=0 risulta:

$$V_{p1} = 0;\ I_{p1} = I_{cc} = -\frac{E}{R_1} = -1A$$

Il secondo punto notevole si ottiene a partire dalla rete originale (Figura 3), nella quale i morsetti A e B sono stati lasciati aperti e, pertanto, risulta I_{p2}=0; in queste condizioni la tensione a vuoto tra i due morsetti V_{p2} si ottiene applicando la regola del partitore di tensione e valutando la tensione ai capi di R2.

$$I_{p2} = 0;\ V_{p2} = V_0 = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} = 8V$$

L’equazione che descrive la caratteristica del bipolo sarà pertanto ottenuta utilizzando la ben nota formula di geometria analitica della retta passante per due punti assegnati:

$$\frac{V - V_{p2}}{I - I_{p2}} = \frac{V_{p1} - V_{p2}}{I_{p1} - I_{p2}} = -\frac{V_0}{I_{cc}}$$

Sviluppando i calcoli, si ottiene

$$V = E\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{V_0}{I_{cc}}I = E\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{\frac{ER_2}{R_1 + R_2}}{-\frac{E}{R_1}}I = E\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}I = 8 + 8I$$

a) Si osservi che: affinché la corrente risulti positiva con il riferimento scelto occorre che la tensione ai morsetti A-B sia maggiore di 8V;
b) la pendenza della retta coincide col valore della resistenza equivalente vista dai morsetti A-B quando il generatore di tensione sia stato spento e, anche, col rapporto tra la tensione a vuoto e la corrente di corto circuito. Tale risultato trova riscontro nell’ambito di un teorema generale che va sotto il nome di teorema di Thèvenin (o del generatore equivalente di tensione).

Per il secondo circuito risulta:

a) Per il primo punto: V_{p1}=0; I_{p1}=J=0.1 [A]

b) Per il secondo punto: I_{p2}=0; V_{p2}=JR_2=0.5 [V]

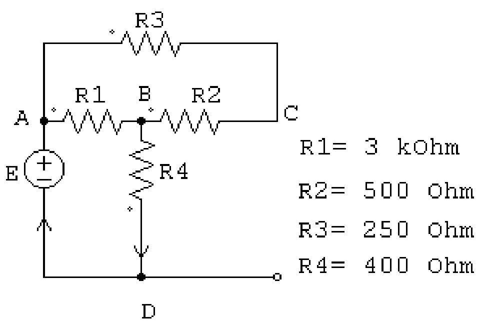
L’equazione caratteristica della retta che descrive la caratteristica del bipolo sarà pertanto:

$$V = JR_2 - \frac{JR_2}{J}I = JR_2 - R_2 I = 0.5 + 5I$$

Si osservi che la pendenza della retta è data dal valore della resistenza equivalente vista dai morsetti A-B quando il generatore di corrente sia stato spento (cioè al suo posto vi sia un circuito aperto). Tale risultato trova riscontro nell’ambito di un teorema generale, illustrato nel seguito, che va sotto il nome di teorema di Norton (o del generatore equivalente di corrente).

Esercizio n. 3

Per il circuito in figura si determini il valore della tensione E ai morsetti del generatore tale che la corrente I_{BD} nel resistore R_4 sia pari a 5 mA.



SOLUZIONE

L’esercizio fornisce un esempio di metodo di “soluzione a ritroso” nel quale si parte dal valore della grandezza di uscita e, applicando opportunamente le leggi dei circuiti, si valutano le diverse grandezze che servono per ricavare l'incognita. Naturalmente è ancora possibile una soluzione attraverso il modello fondamentale del circuito (LKC + LKT + caratteristiche), ma essa risulta senz'altro più onerosa dal punto di vista del calcolo. Infatti si può scrivere

$$\begin{array}{rrrrcl}
-\mathrm{I_{DA}} & +\mathrm{I_{AB}} & +\mathrm{I_{AC}} & & = & 0 \\
 & -\mathrm{I_{AB}} & -\mathrm{I_{AC}} & +\mathrm{I_{BD}} & = & 0 \\
 & R_1\mathrm{I_{AB}} & & R_4\mathrm{I_{BD}} & = & E \\
 & R_1\mathrm{I_{AB}} & -(R_2+R_3)\mathrm{I_{AC}} & & = & 0
\end{array}$$

che rappresenta il sistema fondamentale del circuito (4 equazioni, 4 incognite) in cui la corrente I_{BD} nella R_4 è un termine noto mentre non lo è la tensione *E* del generatore. Adottando, invece, l'approccio della soluzione a ritroso, nota la corrente I_{BD} nella R_4, è possibile applicare la LKC alla superficie gaussiana rappresentata in figura 4.

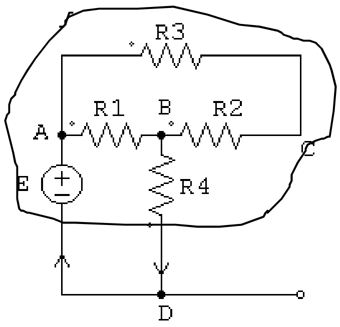


Figura 4

Si ottiene così la corrente nel generatore di tensione: $\mathrm{I_{BD}} = \mathrm{I_{DA}} = 5\ mA$

Osserviamo ora che la resistenza R_1 si trova in parallelo con la serie tra R_2 e R_3; è quindi possibile applicare a tale parallelo la regola del partitore di corrente per ricavare la corrente I_{AB} in R_1.

$$\mathrm{I_{AB}} = \mathrm{I_{DA}} \frac{\mathrm{R_2 + R_3}}{\mathrm{R_1 + R_2 + R_3}} = 5 \cdot 10^{-3} \frac{750}{3750} = 1\ mA$$

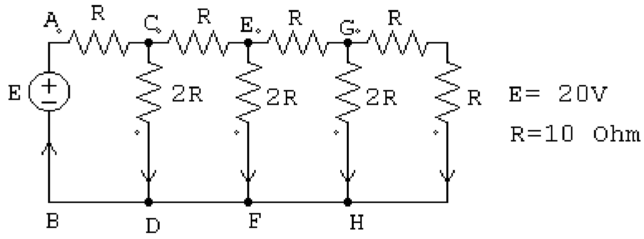
Nota la corrente in R_1 si può applicare la LKT alla maglia ABDA per ottenere il valore richiesto:

$$\mathrm{E} = \mathrm{R_1\ I_{AB}} + \mathrm{R_4\ I_{BD}} = 3 \cdot 10^3 (1 \cdot 10^3) + 5 \cdot 10^3 (400) = 5\mathrm{V}$$

La soluzione di questo esercizio consente di mettere in evidenza che in un circuito costituito da soli resistori e da un solo generatore (di tensione o corrente) le correnti e le tensioni sui resistori non possono essere mai maggiori (al più possono essere uguali) della corrente e della tensione sul generatore.

Esercizio n. 4

Per il circuito “a scala” (in inglese, “ladder”) mostrato in figura si determini la corrente nel generatore di tensione e quella in ognuno dei resistori di valore 2R.



SOLUZIONE

Per risolvere l’esercizio conviene ridurre la complessità topologica giungendo ad un circuito ad una sola maglia nella quale sia immediato calcolare la corrente richiesta. In particolare, partendo dalla estrema destra del circuito si osserva che le due resistenze di valore R risultano in serie. Si ottiene così una resistenza equivalente di valore pari a 2R che risulta essere in parallelo con una delle resistenze “trasversali” di valore 2R. La resistenza equivalente a questo parallelo, di valore pari a R sarà a sua volta in serie con una resistenza “longitudinale” di valore R ottenendo ancora una volta una resistenza equivalente di valore 2R. Il procedimento a questo punto si ripete fino ad arrivare alla resistenza in serie al generatore che, quindi vedrà come resistenza equivalente totale una di valore 2R. In sintesi, ogni “cella” della scala equivale ad una resistenza di valore R come mostrato in figura 5.

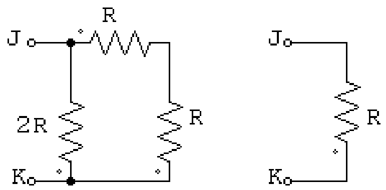


Figura 5

Pertanto la corrente totale erogata dal generatore risulta pari a

$$I_{AB} = \frac{E}{2\,R} = 1A$$

Per calcolare la corrente in ogni resistore di valore 2R occorre applicare la regola del partitore di corrente in modo iterativo ai nodi C, E e G osservando che, sulla base delle considerazioni precedenti, la corrente si ripartisce in parti uguali. Pertanto la corrente nel resistore di valore 2R più a sinistra (quello tra i nodi C e D) risulterà pari a 0.5 A, nel successivo (quello tra i nodi E e F) 0.25 A e nell’ultimo 0.125 A. Questo risultato sarà utilizzato successivamente per mostrare come sia possibile realizzare, sulla base della rete a scala, un semplice circuito che consenta la conversione da un segnale digitale (ovvero una sequenza di 0 e 1) in un segnale analogico.

Esercizio n. 5

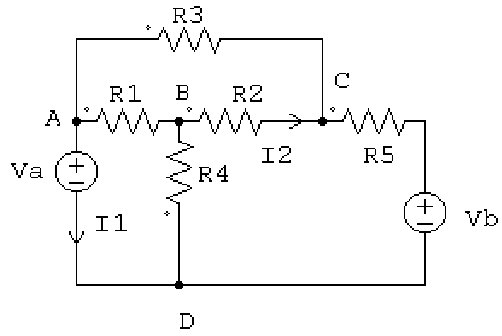
Per il circuito in figura si hanno le seguenti condizioni di funzionamento:

a) con V_a=20 V, V_b =0 V si ha I_1=-0.5A. Determinare il valore di I_1 quando V_a= 50V, V_b=0V. Si ha, inoltre:

b) con V_a =20V, V_b=50V $\Rightarrow$ I_2 =2A.

con V_a =50V, V_b=20V I_2=0.25A.

Si calcoli il valore di I_2 quando $V_a = V_b$ = 40V.



SOLUZIONE

L'esercizio rappresenta un esempio nel quale il principio di sovrapposizione degli effetti consente di ricavare la soluzione senza che sia necessario calcolare tutte le grandezze di lato; si nota peraltro che non è noto il valore dei singoli resistori. In generale, per ogni corrente I_k del circuito è possibile scrivere una relazione del tipo:

$$I_K = A_K V_A + B_K V_B \quad (1)$$

dove le costanti A_k e B_k, dimensionalmente omogenee con delle conduttanze, dipendono unicamente dalla topologia del circuito e dal valore delle resistenze.

Per rispondere al quesito a) occorre determinare A_1 attraverso la soluzione della seguente equazione

$$-0.5 = A_1 20 + B_1 0$$

da cui si ricava:

$$A_1 = -0.025 \ [s]$$

Quando V_a=50V e V_b=0V il circuito ha un solo ingresso V_a e quindi l'uscita risulta legata ad esso tramite una semplice relazione di proporzionalità:

$$I_1 = A_1 \cdot 50 = -1.25 \ [A]$$

Per rispondere al quesito b) occorre determinare A_2 e B_2 che sono soluzioni del seguente sistema di equazioni:

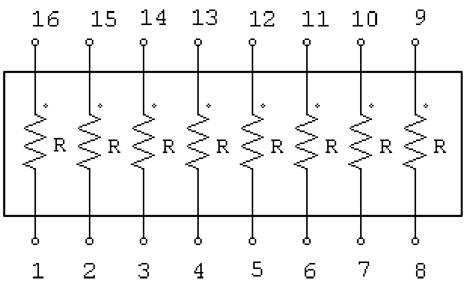
$$\begin{array}{lcccc} 2 & = & A_2 \cdot 20 & + & B_2 \cdot 50 \\ 0.25 & = & A_2 \cdot 50 & + & B_2 \cdot 20 \end{array}$$

la cui soluzione è:

$$A_2 = -0.013$$
$$B_2 = 0.04$$

Si ricava pertanto: $V_a = V_b = 40$V

Esercizio n. 6
In figura è mostrato un “chip” di resistenze nella forma detta “dual-in-line”, largamente adoperato nella realizzazione di circuiti elettronici. Effettuando gli opportuni collegamenti tra i diversi morsetti, realizzare una rete “a scala” (“ladder”) del tipo precedentemente illustrato. Quante celle elementari si possono ottenere con un solo chip?



SOLUZIONE
In figura 6 a è mostrata una cella elementare della rete a scala in cui sono presenti un resistore di valore pari a R e uno di valore 2R. Quindi per realizzare ogni cella elementare occorrono 3 resistori del chip di cui due sono collegati in serie. Si potranno quindi ottenere al più due celle complete; una possibile scelta dei collegamenti esterni tra i piedini del chip è mostrata in figura 6 b. I due resistori liberi possono essere utilizzati per “terminare” il circuito, come mostrato nello schema circuitale dell’esercizio n. 4.

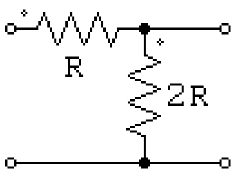


figura 6 a.

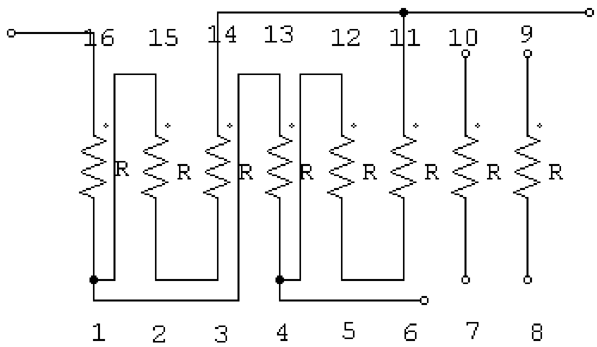
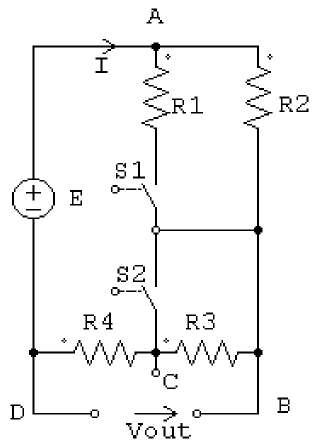


figura 6 b.

Esercizio n. 7

Nel circuito in figura i due interruttori S1 e S2 possono trovarsi nella posizione aperta (0) o chiusa (1). Determinare il valore della tensione Vout e della corrente I per ognuna delle quattro possibili combinazioni degli interruttori (0,0), (0,1), (1,0) e (1,1). Quale configurazione dà luogo al massimo valore di V_{out} e quale a quello minimo? È possibile giustificare tale risultato?



E=10V;
R_1= 3kΩ;
R_2= 6kΩ;
R_3= 3kΩ;
R_4= 1kΩ

SOLUZIONE

- Configurazione (0,0). Entrambi gli interruttori ("switch") sono aperti. In tal caso la resistenza equivalente vista tra i morsetti A -D sarà:

$$R_{AD}^{(0,0)} = R_2 + R_3 + R_4$$

  La corrente I risulterà pertanto pari a:

$$I^{(0,0)} = \frac{E}{R_{AD}^{(0,0)}} = 1\,mA$$

  mentre la tensione sarà data da:

$$V_{out}^{(0,0)} = E\frac{R^3 + R^4}{R_{AD}^{(0,0)}} = 4\,V$$

- Configurazione (0,1). S1 aperto, S2 chiuso. In questo caso R3 è in parallelo con un corto circuito. La resistenza equivalente vista tra i morsetti A -D sarà:

$$R_{AD}^{(1,0)} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4$$

  La corrente I risulterà pertanto pari a:

$$I^{(0,1)} = \frac{E}{R_{AD}^{(0,1)}} = 1.43\,mA$$

  mentre la tensione sarà data da:

$$V_{out}^{(0,1)} = E\frac{R^4}{R_{AD}^{(0,1)}} = 1.43\,V$$

- Configurazione (1,0). S1 chiuso, S2 aperto. In questo caso R1 e R2 sono in parallelo. La resistenza equivalente vista tra i morsetti A -D sarà:

$$R_{AD}^{(0,1)} = R_2 + R_4$$

La corrente I risulterà pertanto pari a:

$$I^{(1,0)} = \frac{E}{R_{AD}^{(1,0)}} = 1.67\ mA$$

mentre la tensione sarà data da:

$$V_{out}^{(1,0)} = E\frac{R_3 + R_4}{R_{AD}^{(1,0)}} = 6{,}67\ V$$

- Configurazione (1,1). S1 e S2 entrambi chiusi. In questo caso R1 e R2 sono in parallelo mentre R3 è in corto circuito. La resistenza equivalente vista tra i morsetti A-D sarà:

$$R_{AD}^{(1,1)} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_4$$

  La corrente I risulterà pertanto pari a:

$$I^{(1,1)} = \frac{E}{R_{AD}^{(1,1)}} = 3.33\ mA$$

  mentre la tensione sarà data da:

$$V_{out}^{(1,1)} = E\frac{R_4}{R_{AD}^{(1,1)}} = 3.33\ V$$

Dall'esame dei quattro risultati si trovano i casi corrispondenti ai valori massimi e minimi delle due grandezze. Osserviamo che mentre per la corrente, che rappresenta una grandezza globale (dipendente, cioè, fissato il valore di E, solo dalla resistenza equivalente vista dai morsetti del generatore), è possibile affermare che i valori massimo e minimo si otterranno per le configurazioni caratterizzate rispettivamente dal valore minimo e massimo della R_{AD} (in particolare, la (1,1) e la (0,0)), non si può in generale affermare nulla per la tensione V_{out} in quanto dipendente da due parametri: la R_{AD} e la resistenza R_{BD}.