Insegnamento di Elettrotecnica - Corso di Laurea in Scienze e Tecnologie Informatiche
Anno accademico 2020/2021

Testi di riferimento

- **L. De Menna. Elettrotecnica. Vittorio Pironti Editore (disponibile on line)**
- **S. Bobbio, Esercizi di Elettrotecnica, Cuen, Napoli**
- **S. Bobbio, E. Gatti – Elettromagnetismo, ottica. Bollati Boringhieri, Napoli**
- **Dispense ed esercizi forniti dal docente**

CAPITOLO I
Nozioni introduttive allo studio dei circuiti a parametri concentrati

Introduzione

L'analisi di un qualunque "sistema fisico" complesso passa per la definizione di un modello matematico che deve essere sufficientemente accurato da riprodurre - con una tolleranza accettabile dal punto di vista ingegneristico - il comportamento del sistema reale (almeno per quel che riguarda i fenomeni che sono oggetto dell'analisi) e, contemporaneamente, deve essere quanto più semplice possibile, così da permettere un'agile ed efficace analisi computazionale.
Il compito precipuo dell'ingegnere consiste nell'individuare gli aspetti del "sistema fisico" che risultino rilevanti ai fini dell'indagine e, a partire da questi, costruirne il "modello ideale" attraverso l'interconnessione di elementi idealizzati. Questi ultimi sono semplici modelli usati per rappresentare o portare approssimativamente in conto le proprietà di elementi e/o fenomeni fisici elementari.
Nell'ambito della teoria dei circuiti si pongono le basi per studiare in maniera sistematica il comportamento dei circuiti reali e dei fenomeni fisici di carattere elettromagnetico che in essi si manifestano - così da prevedere il comportamento di questi ultimi, o di migliorarne le caratteristiche di comportamento -, attraverso l'analisi dei corrispondenti "circuiti ideali". Come l'interconnessione di "componenti reali" dà origine al "circuito reale" sotto indagine, così il circuito ideale che lo modella è costruito interconnettendo nel medesimo modo i "componenti ideali" corrispondenti a quelli reali.
In perfetta analogia con quanto studiato in Meccanica, i componenti ideali che sono definiti nell'ambito della teoria dei circuiti, al contrario dei corrispondenti elementi fisici, sono dal punto di vista dimensionale dei punti materiali: oggetti, cioè, che non possiedono la proprietà di occupare un volume nello spazio.
In Meccanica a questi oggetti si attribuiscono diverse proprietà quali la massa, l'inerzia, etc.
Allo stesso modo, nell'ambito della Teoria dei circuiti, i componenti ideali sono caratterizzati da proprietà fisiche che si ritrovano nei corrispondenti componenti pratici reperibili in commercio. Anzi, la bontà di un componente reale è legata alla sua capacità di comportarsi, nel più largo ambito operativo possibile, in modo analogo a quanto richiesto al corrispondente componente ideale.

1. Grandezze fondamentali

Sistemi di misura Nel seguito definiremo alcune proprietà della materia e supporremo di poterle graduare associando loro dei valori numerici attraverso misure sperimentali. Sappiamo, tuttavia, che affinché un'operazione di misura abbia senso è necessario definire, oltre agli strumenti e al protocollo che ne garantisca la riproducibilità, una quantità campione che rappresenti il valore unitario (o "metro") della misura stessa.
Nel seguito assoceremo alle grandezze d'interesse della Teoria dei circuiti le unità di misura definite nell'ambito del Sistema Internazionale.

Cariche elettriche I corpi materiali possono presentare proprietà particolari (tanto a livello microscopico quanto a livello macroscopico) che danno luogo alle cosiddette interazioni elettriche o magnetiche. Elemento chiave di dette interazioni è una proprietà della materia individuata da una grandezza scalare che indicheremo con q e che denomineremo "carica elettrica".
Gli studi compiuti sulla struttura della materia ci permettono di dire che quest'ultima è costituita da molecole formate, a loro volta, da atomi. In modo un po' approssimativo è possibile dire che il mondo dell'atomo è costituito da un nucleo dotato di carica *di una certa qualità*, definita convenzionalmente *positiva*, e da particelle più piccole dette *elettroni* che vi orbitano intorno ("modello planetario"). Anche gli elettroni sono dotati di carica seppure di qualità differente rispetto a quella del nucleo e convenzionalmente indicata col nome di *negativa*.
Dal punto di vista qualitativo, le interazioni tra cariche omologhe hanno carattere repulsivo, mentre le cariche di diversa qualità si attraggono l'un l'altra.
Di fondamentale importanza è la legge di Coulomb che, nel vuoto, si esprime come:

$$\mathbf{F}_{12}= k\, q_1\, q_2\, \mathbf{r}_{12}/r^2, \qquad \text{(nel S.I., } k=1/4\pi\varepsilon_0 \text{ ed } \varepsilon_0\text{=8.854188E-12 [kg}^{-1}\text{ m}^{-3}\text{ s}^2\text{ C}^2\text{])},$$

Questa legge stabilisce il valore della forza che una carica q_1 esercita su una carica q_2 posta a distanza r_{12} dalla prima e viene utilizzata per dare la definizione operativa adottata nel Sistema Internazionale per l'unità di misura della carica elettrica:

> *Il valore di un Coulomb corrisponde a quello di una carica che posta nel vuoto a distanza di un metro da una carica identica viene respinta da questa con una forza di intensità pari a* $k= 1/4\pi\varepsilon_0 = 8.98E9$ [N].

Il valore così determinato corrisponde a una quantità di carica estremamente elevata rispetto a quella che entra in gioco nei problemi di interesse pratico.
Le osservazioni sperimentali hanno determinato che non è possibile osservare cariche di valore inferiore a quella dell'elettrone, che vale 1.60210E-19 [C]: nel linguaggio scientifico questa circostanza si esprime dicendo che la carica elettrica è una grandezza quantizzata.
Poiché "in condizioni normali" non si osservano sulla materia fenomeni macroscopici di natura elettrica, si conclude che "in condizioni normali" le cariche di diversa qualità si compensano perfettamente sia a livello microscopico che macroscopico.

2. Campo di corrente e Intensità di Corrente

In alcuni materiali detti *conduttori*, gli elettroni delle bande energetiche più esterne hanno la possibilità di spostarsi da un atomo all'altro.
L'insieme complementare dei materiali, per i quali questa possibilità è negata, va sotto il nome di *isolanti*.
Si consideri una regione dello spazio Ω all'interno della quale vi siano cariche in movimento (assumiamo per semplicità che siano tutte positive e di valore pari alla carica elementare, q) e, in questa regione, la generica superficie Σ (fig.I.2.1).
Sia **n** il versore normale alla superficie (il verso può essere scelto arbitrariamente se Σ è una superficie aperta; invece, se Σ è chiusa, per prassi, ci si riferisce al versore uscente).
Sia poi dΣ una generica superficie elementare di Σ e dΩ la corrispondente regione elementare dello spazio prossima a dΣ (fig.2.2) definita come di seguito.

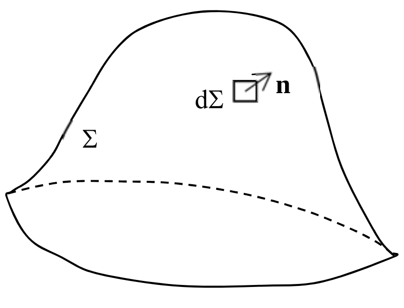


Fig.I.2.1: *Superficie generica Σ e la normale in un punto generico*

La superficie elementare dΣ deve essere sufficientemente piccola da poter assumere che il versore **n**, normale al suo punto centrale, sia con buona approssimazione normale a qualunque punto di dΣ (in modo equivalente, si può dire che dΣ deve essere con buona approssimazione una superficie piana). Inoltre si deve verificare che, con buona approssimazione, la distribuzione delle cariche sia spazialmente uniforme, ovvero che, nella regione spaziale intorno a dΣ, le cariche

- siano distribuite con densità di volume uniforme N;
- si muovano tutte con la stessa velocità, **v**.

Ciò assunto, si fissi un intervallo di tempo elementare, dt, tale per cui il moto delle cariche sia uniforme temporalmente (deve essere sufficientemente piccolo da poter assumere che nel tempo dt non vari in maniera apprezzabile né la densità N né la velocità **v** delle cariche).

Il volume elementare dΩ è il cilindretto di base dΣ, avente per generatrice il lato **v** dt (Fig.I.2.2).

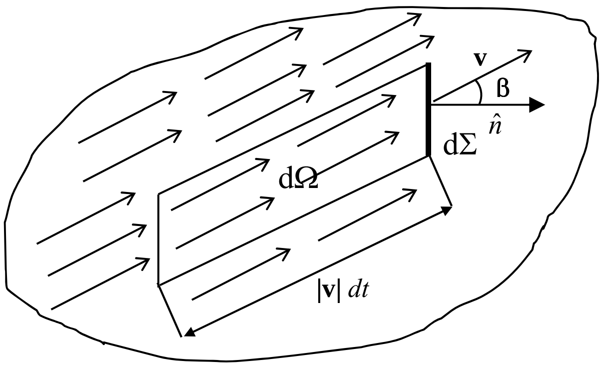


Fig.I.2.2 *Schema di principio per la definizione della corrente elettrica*

La carica netta che attraversa la superficie dΣ nel tempo dt è pari alla carica racchiusa in dΩ:

$$dQ = q\, N\, d\Sigma\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\, dt = q\, N\, d\Sigma\ v\, dt\, \cos\beta.$$

La carica netta che *nell'unità di tempo* taglia la superficie dΣ, secondo l'orientamento scelto, è per definizione ***l'intensità di corrente elettrica*** (o semplicemente la ***corrente elettrica***) che interessa la superficie elementare dΣ:

$$dI = dQ / dt = q\, N\, d\Sigma\ v \cos\beta$$

Per trovare la corrente elettrica che interessa l'intera superficie Σ occorre effettuare un integrale superficiale:

$$I = \iint_{\Sigma} q\, N\, \mathbf{v}\cdot \mathbf{n} dS$$

Nel S.I. l'intensità di corrente si misura in Ampère.

Alcune precisazioni sul segno della corrente

Volendo scrivere un bilancio per la carica che attraversa una superficie orientata attraverso la normale **n** si rammenti che:

i) le cariche positive che si muovono nel verso di **n** vanno portate in conto con segno positivo;
ii) le cariche negative che si muovono nel verso opposto rispetto ad **n** vanno portate in conto con segno positivo;
iii) negli altri casi il segno è negativo

La quantità **J**=Nq**v** viene definita ***campo di corrente*** e attraverso di esso è possibile portare in conto oltre alle correnti conduttive (elettroni in moto nei materiali conduttori) anche altri tipi di correnti:

a) le correnti dovute al moto degli ioni negli elettroliti;

b) le cosiddette correnti convettive dovute al moto dei supporti delle cariche elettriche (si pensi, a titolo di esempio, al movimento delle polveri elettricamente cariche nelle ciminiere oppure al movimento di un oggetto macroscopico (sia esso isolante o conduttore) localmente o globalmente non neutro dal punto di vista elettrico).

In generale N e **v** non presentano uniformità né temporale né spaziale nel dominio Ω**,** e, pertanto, il valore della densità di corrente sarà funzione delle coordinate spaziali e del tempo: **J**(**x**,t).
L'equazione precedente diventa pertanto

$$i(t) = \iint_{\Sigma} \mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathrm{t}) \cdot \mathbf{n} dS$$

Si noti che è buona norma utilizzare la lettera maiuscola per rappresentare le quantità elettriche stazionarie e la lettera minuscola per le quantità elettriche il cui valore dipende dall'istante temporale.
Nel S.I. il campo di corrente si misura in A /m^2.
In <u>condizioni stazionarie</u> (tutte le quantità elettromagnetiche sono rigorosamente costanti nel tempo) il flusso del campo di corrente attraverso una qualunque superficie chiusa Σ_c è nullo $\oiint_{\Sigma c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0$

Questa proprietà discende immediatamente dalla condizione locale di solenoidalità imposta sul campo di corrente da una delle equazioni di Maxwell: $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ (I.2.1)
Va immediatamente precisato che, se le condizioni di stazionarietà non sono verificate, il campo di corrente non è solenoidale.

Difatti, in tal caso, la precedente equazione di Maxwell assumerebbe la forma: $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ (I.2.2)

che accoppiata alla legge di Gauss $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ (I.2.3)

porta alla seguente espressione valida nel caso generale: $\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$ (I.2.3)

il contributo addizionale ∂**D/**∂t che compare nell'eq. I.2.1 prende il nome di corrente di spostamento e dà conto dell'evidenza sperimentale di circolazione di correnti attraverso regioni con mezzi elettricamente isolanti.

L'espressione (I.2.2) riscritta in forma integrale $\oiint_{\Sigma c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = -\dfrac{dq}{dt}$ consente di evidenziare come il flusso netto di corrente dalla superficie chiusa Σ_c sia pari alla variazione nell'unità di tempo della carica elettrica immagazzinata nel volume racchiuso dalla medesima superficie.
D'altra parte se le variazioni temporali della carica sono piccole (dinamica lenta), la quantità al secondo membro si può trascurare e il campo di corrente può essere ancora ritenuto approssimativamente solenoidale.

3. Conseguenze della solenoidalità del campo di corrente.

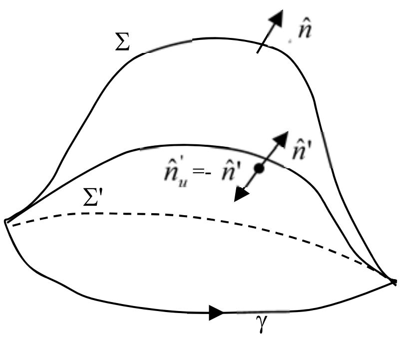


Fig.I.3.1 *Due superfici aperte di uguale bordo orientato γ (o "orlate dalla medesima linea chiusa γ") danno origine a una superficie chiusa $\Sigma c=\Sigma\bigcup\Sigma'$. Le normali $\hat{n}$ e $\hat{n}'$ sono orientate in base al verso scelto per la curva γ (regola del cavatappi)*

Si consideri la generica curva chiusa "γ".

Esistono, ovviamente, infinite superfici aperte orlate dalla curva γ : ad esempio le superfici Σ e Σ' rappresentate in fig.I.3.1. Ci proponiamo ora di dimostrare come, <u>nel caso di campo di corrente solenoidale o approssimativamente solenoidale, il flusso di corrente *i(t)* dipende solo dalla curva γ e non dalla particolare superficie che ha per bordo γ.</u>

Iniziamo la dimostrazione col notare che l'unione delle due generiche superfici aperte $\Sigma\bigcup\Sigma'$ dà origine alla curva chiusa Σ_c. Si noti anche che la normale $\hat{n}_u^{'}$ uscente alla superficie chiusa Σ_c coincide con $\hat{n}$ per Σ, ed è uguale a $\hat{n}_u^{'}$=-$\hat{n}'$ per Σ'. Infine, dalla solenoidalità del campo di corrente risulta:

$$0 = \oiint_{\Sigma\cup\Sigma'} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}_u^{'}\,dS = \iint_{\Sigma} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}dS + \iint_{\Sigma'} \mathbf{J}\cdot(-\mathbf{n}^{'})dS = i_\Sigma - i_{\Sigma'} \rightarrow i_{\Sigma'} = i_\Sigma$$

Dove abbiamo denotato con i_Σ e $i_{\Sigma'}$ rispettivamente i flussi di corrente attraverso le superfici Σ e Σ'.

Con i semplici passaggi sopra riportati si dimostra l'asserto.

4. Conduttori filiformi

Si consideri un lungo tubo, eventualmente di sezione trasversale variabile, realizzato con un materiale conduttore (fig.I.4.1) ed immerso in un materiale isolante (in particolare nel vuoto). Se le sue dimensioni trasversali risultano sempre molto minori rispetto alla sua lunghezza, il conduttore verrà detto *filiforme*.

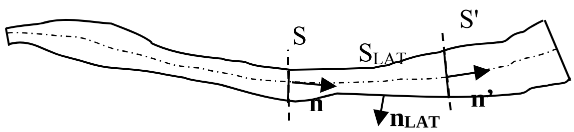


Fig.I.4.1: *Conduttore filiforme: le dimensioni trasversali sono molto minori di quella longitudinale.*

Dalla condizione $\oiint \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\,dS = 0$, tenendo conto che il flusso di corrente attraverso le superfici laterali S_{LAT} del conduttore filiforme è nullo, e che $\mathbf{n}_{out}$ (la normale uscente alla superficie chiusa ottenuta come unione di S, S' e S_{LAT})
risulta uguale ad **n'** ed opposta ad **n**, si deduce facilmente che l'intensità di corrente attraverso la sezione S risulta uguale all'intensità di corrente attraverso S':

$$0 = \oiint_{S\cup S'\cup S_{LAT}} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}_{OUT}dS = \oiint_{S} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}_{OUT}dS + \oiint_{S'} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}_{OUT}dS + \oiint_{S_{LAT}} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}_{OUT}dS = -\oiint_{S} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}dS + \oiint_{S'} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}'dS$$

Da cui: $$\oiint_{S} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}dS = \oiint_{S'} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}'dS$$

Un conduttore filiforme può essere ben schematizzato attraverso un conduttore di sezione nulla e di conducibilità non limitata (Fig.I.4.2). In questo caso le sezioni S e S' si riducono a punti materiali. Le normali alle superfici S e S', ora rappresentate attraverso frecce, continuano a definire l'orientamento positivo assunto per le correnti.

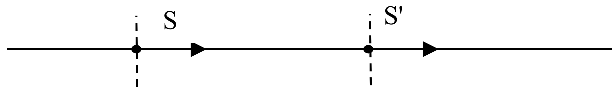


Fig.I.4.2: *Conduttore filiforme: schematizzazione attraverso un conduttore di sezione nulla*

Dal punto di vista operativo, la corrente è la quantità fisica misurata mediante un opportuno strumento detto Amperometro. L'Amperometro è uno strumento "polare" a due terminali. Col termine polare s'intende che la misura fornita dallo strumento cambia di segno a seconda di come sono inseriti i morsetti nello schema di misura. In pratica, assegnato un verso positivo per la corrente (ovvero un orientamento per la normale alla superficie), resta definito il modo in cui l'amperometro deve essere inserito nel circuito (Fig.I.4.3).

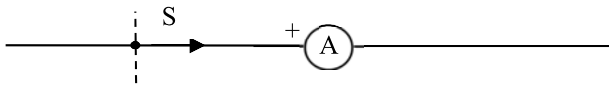


Fig.I.4.3: *Inserzione di un amperometro per la misura della corrente in un conduttore filamentare. Lo strumento restituisce la misura corretta se la corrente punta verso il morsetto positivo.*

5. Tensione elettrica e Differenza di Potenziale

a) Definizione della tensione elettrica e della D.d.P.

Si definisce *tensione elettrica tra due punti dello spazio A e B lungo la curva γ* l'integrale di linea del campo elettrico.

$$T_{\mathrm{A}(\gamma)\mathrm{B}} = \int_{\mathrm{A}(\gamma)\mathrm{B}} \mathbf{E} \cdot \hat{t} dl$$

Il valore dell'integrale può dipendere o non dipendere dal percorso d'integrazione (Vedi Fig.I.5.1).

Se per ogni coppia di *curve (γ,γ'), aventi come punti estremi i punti A e B, risulta* $T_{A(\gamma)B} = T_{A(\gamma')B}$,(ovvero l'integrale non dipende dal particolare percorso di integrazione) allora il campo elettrico **E** viene detto "conservativo" oppure "irrotazionale". In questo caso:

1) l'integrale precedente può essere calcolato lungo un percorso d'integrazione arbitrario

2) il valore (unico) dell'integrale assume il nome di "differenza di potenziale" (DDP) e dipende solo dagli estremi d'integrazione (i punti A e B): $V_{\mathrm{AB}} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot \hat{t} dl$

3) il campo elettrico **E** viene detto "conservativo" oppure "irrotazionale".

N.B. Per rappresentare la D.D.P. V_{AB} si utilizza una freccia che parte da B e punta verso A.

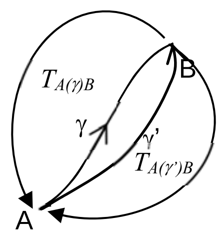


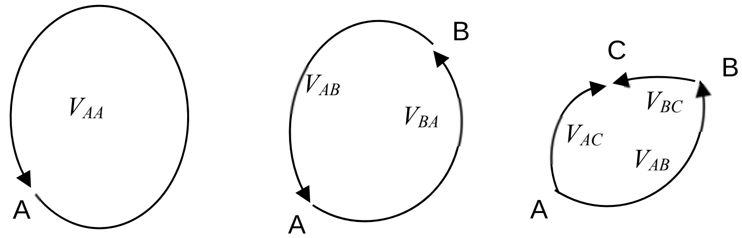
Fig.I.5.1 *Se il campo elettrico è conservativo, la tensione elettrica assume lo stesso valore lungo ogni percorso di integrazione:* $T_{A(\gamma)B} = T_{A(\gamma')B} = V_{AB}$.

Se il campo elettrico è rotazionale $T_{A(\gamma)B} \neq T_{A(\gamma')B}$.

b) Proprietà della D.D.P.

1) $V_{AA}=0$; (Fig.I.5.2a)

2) $V_{AB}=- V_{BA}$; (Fig.I.5.2b)



3) $V_{AC}= V_{AB} +V_{BC}$; (Fig.I.5.2c)

Fig. I.5.2a ***Fig. I.5.2b*** ***Fig. I.5.2c***

c) Potenziale elettrico

Si assuma arbitrariamente un punto "O" dello spazio quale riferimento. Se il campo elettrico è conservativo, la D.D.P. tra il generico punto P dello spazio e il punto di riferimento, O, è pari a V_{PO}. Poiché il punto O è fisso, in tale definizione, si potrà omettere il punto O di riferimento senza che ciò generi alcuna ambiguità: $V_P = V_{PO}$.

La funzione V_P è un campo scalare e viene definito "potenziale elettrico rispetto al punto di riferimento O".

Le seguenti proprietà del potenziale scalare discendono da quelle definite per la D.D.P. nel paragrafo precedente:

1) $V_A=0$

2) $V_{AB}=V_{AO}+ V_{OB}=V_{AO}- V_{BO}=V_A- V_B$

d) Misura della tensione elettrica e della D.D.P. tra due punti: il Voltmetro

Lo strumento che consente di misurare la tensione elettrica tra due punti dello spazio prende il nome di Voltmetro (Fig.I.5.3).

Il Voltmetro è, come l'Amperometro, uno strumento "polare" a due terminali.

Se viene utilizzato per la misura della tensione elettrica $T_{A(\gamma)B}$ tra due punti A e B lungo il percorso specificato, γ, si dovrà aver cura di adagiare i terminali dello strumento sulla curva γ. Viceversa se il campo elettrico è conservativo la D.D.P. tra A e B si potrà misurare collocando il morsetto positivo dello strumento nel punto A e quello negativo nel punto B.

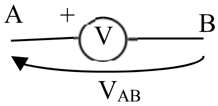


Fig.I.5.3: *Inserzione di un amperometro per la misura della corrente in un conduttore filamentare. Lo strumento restituisce la misura corretta se la corrente punta verso il morsetto positivo.*

6. Componenti e circuiti elettrici.

a) I circuiti elettrici

Consideriamo una regione dello spazio in cui il campo elettrico sia "quasi ovunque" irrotazionale e il campo di corrente sia "quasi ovunque" solenoidale (il significato di "quasi ovunque" sarà chiarito poco innanzi!).

Definiamo circuito elettrico ideale un insieme di "componenti elettrici reali" interconnessi tra di loro mediante conduttori filamentari.

Definiamo "componente elettrico ideale " un oggetto delimitato da una "superficie limite" dalla quale fuoriescono dei conduttori filiformi (che assumiamo essere equipotenziali e che da ora in poi chiameremo "terminali") e che possa essere caratterizzato "con buona approssimazione" dai legami funzionali che si stabiliscono tra le correnti che circolano nei terminali e le tensioni elettriche che si misurano tra i vari terminali (si intende sottolineare che nella caratterizzazione di un oggetto quale componente elettrico non entra nessun'altra delle sue proprietà fisiche quali la massa, il volume, il colore, la forma geometrica se non nella misura in cui tali proprietà vadano a incidere sui legami funzionali di cui sopra: ad esempio due oggetti di dimensioni e forma molto differenti possono avere dal punto di vista elettrico lo stesso comportamento e, per questo, essere elettricamente sostituibili o "equivalenti").

All'interno delle "superfici limite" dei componenti i campi elettrici possono essere eventualmente rotazionali e i campi di corrente eventualmente non solenoidali, ma in tutta la regione dello spazio esterna alle superfici limite dei componenti i campi elettrici devono essere conservativi e i campi di corrente solenoidali (è necessario per quanto diremo nel seguito che queste circostanze siano verificate, se non esattamente, quanto meno con ottima approssimazione dal punto di vista ingegneristico). Se per la misura delle tensioni elettriche utilizziamo dei percorsi di "lunghezza ragionevole" che non invadono le superfici limite dei componenti e per la misura delle correnti utilizziamo delle superfici di "area ragionevole" che non invadono le superfici limite dei componenti, le tensioni elettriche diventeranno delle D.D.P. (cioè il loro valore non dipenderà dal particolare percorso di misura seguito per andare da un terminale all'altro ma soltanto dai due terminali che stiamo considerando) e la corrente elettrica misurata attraverso un terminale non dipenderà dalla particolare sezione di taglio che utilizzeremo per la misura.

I componenti elettrici ideali sono modelli ideali dei componenti reali. Dal punto di vista dimensionale vengono assimilati a dei punti materiali (cioè le loro dimensioni spaziali sono nulle) dai quali fuoriescono dei terminali. Come avviene per i componenti reali ai quali sono associati, la loro caratterizzazione avviene "esclusivamente" attraverso i legami funzionali che si stabiliscono tra le correnti che circolano nei terminali e le tensioni elettriche che si misurano tra i vari terminali.

Tipici componenti elettrici ideali sono i generatori indipendenti (di corrente e tensione), i generatori pilotati (di corrente e di tensione), i resistori, gli induttori, i condensatori, i trasformatori, i diodi, i transistori, i MOSFET, etc.

I circuiti elettrici ideali (o concentrati) si ottengono interconnettendo tra loro elementi concentrati.

Un elemento concentrato è un elemento che ai fini dell'analisi viene assimilato ad un punto materiale o, detto in altri termini, la cui forma e le cui dimensioni sono ininfluenti ai fini del risultato dell'analisi: può essere un singolo componente ideale ma anche un sotto-circuito composto da milioni di componenti ideali che comunica con l'esterno attraverso due o più terminali.

Da un punto di vista dell'andamento temporale, i segnali x(t) che circolano all'interno dei circuiti elettrici possono essere stazionari o variabili. Nel secondo caso, la loro legge oraria può essere periodica o aperiodica. In figura I.6.1 vengono classificate le principali condizioni di funzionamento.

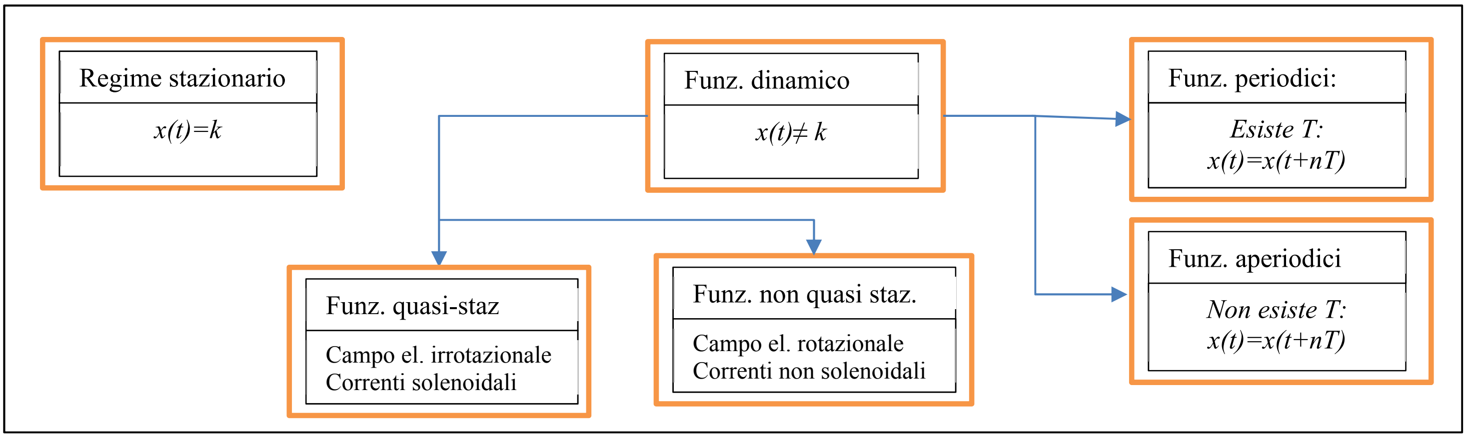


Fig.I.6.1. *Classificazione del comportamento dei circuiti elettrici nel dominio del tempo*

b) Il modello circuitale a parametri concentrati e il modello circuitale a parametri distribuiti

Nei modelli circuitali a parametri concentrati le dimensioni fisiche del circuito (lunghezza l_{cir}) non vengono considerate in alcun modo ovvero, se si preferisce, vengono trascurati completamente i ritardi di propagazione ($\tau = l_{cir} / v_{prop}$, dove v_{prop} è la velocità di propagazione del segnale elettromagnetico che nello spazio libero è pari a circa pari a circa 3E8 m/s e, in queste condizioni, si denota col simbolo "*c*") dei segnali elettromagnetici da un punto all'altro del circuito (Fig.I.6.2). In altre parole si assume che la velocità di propagazione del segnale elettromagnetico sia non limitata.

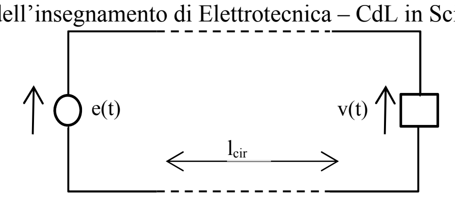


Fig.I.6.2 *Il segnale v(t)=e(t-L/c), c=3e8 m/s. Nell'approssimazione a parametri concentrati si assume v(t)=e(t)*

Quando è valida l'approssimazione a parametri concentrati?

Per rispondere in maniera corretta occorre fare riferimento alla rapidità con cui varia nel tempo e nello spazio il segnale elettromagnetico che interessa il circuito. Un metodo matematico particolarmente adeguato allo scopo è rappresentato dalla cosiddetta analisi di Fourier tramite la quale è possibile rappresentare nel dominio della frequenza un segnale variabile nel tempo (o nello spazio). Tale rappresentazione prende il nome di "spettro".

Un segnale che varia nel tempo con legge sinusoidale $a(t)=A*\sin(2*\pi*f*t)$ viene rappresentato nel dominio della frequenza attraverso un unico punto di ascisse pari a f ed ordinata pari all'ampiezza A della sinusoide (anche se, tecnicamente, si preferisce utilizzare il termine di "riga spettrale" anziché quello di "punto").

Un segnale periodico non sinusoidale di periodo T sarà invece rappresentato attraverso una sequenza di righe spettrali multiple intere della frequenza fondamentale f_{fond}=1/T (f_{fond} è chiamata anche "armonica fondamentale").

Infine, un generico segnale aperiodico $a(t)$ sarà rappresentato attraverso una funzione della frequenza $A(f)$ che tenderà ad assumere valore nullo o trascurabile al crescere della frequenza (in altre parole, è sempre possibile definire un valore della frequenza, f_{max}, tale per cui la funzione $A(f)$ possa essere assunta di valore nullo per ogni $f>f_{max}$). Alla frequenza f_{max} sono associabili immediatamente due parametri addizionali: il primo temporale, detto periodo ($T_{fmax}=1/f_{max}$) e il secondo di tipo spaziale, detto lunghezza d'onda ($\lambda_{fmax}=v_{prop}/f_{max}$).

Siamo ora in grado di rispondere al quesito dal quale eravamo partiti. L'approssimazione a parametri concentrati può essere ritenuta valida se dal confronto tra λ_{fmax} e l_{cir} risulta $\lambda_{fmax} >> l_{cir}$: il fatto che questa diseguaglianza sia verificata implica che il segnale elettromagnetico $a(x,t)$ assume all'istante generico t la medesima intensità (o quasi) in ogni punto del circuito (Vedi fig.I.6.3)

Un secondo criterio, sostanzialmente analogo al precedente, è quello di confrontare il tempo, τ, che impiega il segnale elettromagnetico a percorrere il circuito lungo la direzione di maggiore estensione con il periodo T_{fmax}: il verificarsi della diseguaglianza $\tau << T_{fmax}$ implica un ritardo di propagazione trascurabile del segnale elettromagnetico.

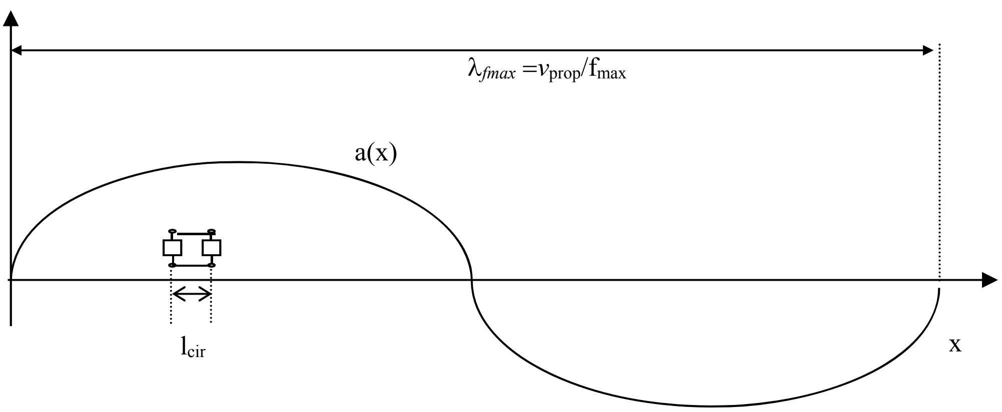


Fig.I.6.3 *Un circuito viene detto a parametri concentrati se:*

1) *le massime dimensioni fisiche del circuito (l_{cir}) sono trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda corrispondente alla massima frequenza significativa del segnale $\lambda_{min} = v_{prop}/f_{max}$.*
2) *il tempo che impiega il segnale a coprire le dimensioni del circuito è molto minore rispetto al periodo corrispondente alla massima frequenza significativa del segnale.*

Facciamo qualche esempio.

1) Si consideri una linea elettrica lunga 60 km sulla quale viaggia una tensione sinusoidale alla frequenza di 50Hz. Risulta λ_{fmax}=3E8/50=6E6 m=6E3 km. È chiaro che 6000km>>60km e dunque si può utilizzare l'approssimazione a parametri concentrati.

2) Si consideri la scheda madre di un PC per la quale l_{cir}=0.3m. La frequenza del segnale è ora pari a 1GHz=1E9 Hz. Risulta λ_{fmax}=3E8/1e9=0.3 m. E' chiaro che ora λ_{fmax} e l_{cir} sono dello stesso ordine di grandezza e l'approssimazione a parametri concentrati non è utilizzabile.

Questa è una delle principali ragioni per cui non si riescono a progettare processori che viaggiano ad una frequenza superiore a qualche GHz.

Nelle analisi circuitali a parametri distribuiti le soluzioni sono funzione oltre che del tempo anche di una o più coordinate spaziali (in genere quella/e lungo la quale il circuito presenta la maggiore estensione spaziale).

Si tiene conto, in altre parole, dei ritardi di propagazione dei segnali elettromagnetici.

Occorre, in ogni caso, aggiungere che per lo studio di questa classe di circuiti vengono impiegate le stesse tecniche utilizzate per l'analisi dei circuiti a parametri concentrati.

Oltre ai tradizionali circuiti elettrici, alcuni sistemi fisici schematizzabili attraverso circuiti a parametri concentrati sono

- i dispositivi integrati (che sono alla base della moderna elettronica e grazie ai quali è stato possibile creare le sofisticate apparecchiature elettroniche che trovano posto in ogni angolo della nostra vita e renderle accessibili a tutti);
- i giganteschi sistemi di produzione e trasporto dell'energia elettrica;
- le macchine elettriche;
- i sistemi di misura elettrica ed elettronica;

Invece, per la simulazione dei circuiti a microonde o delle antenne devono essere utilizzati circuiti a parametri distribuiti o, addirittura, metodi più complicati nei quali si assumono quali incognite gli stessi campi elettromagnetici.

Riassumendo, affinché sia valida l'approssimazione circuitale a parametri concentrati si devono verificare le seguenti condizioni:

1) il campo elettrico deve essere irrotazionale al di fuori delle superfici limite che circondano i componenti ideali;

2) il campo di corrente deve essere solenoidale al di fuori delle superfici limite che circondano i componenti ideali;

3) sia ragionevole trascurare il ritardo di propagazione dei segnali elettromagnetici attraverso l'intero circuito.