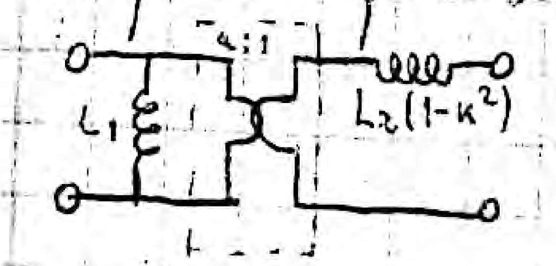
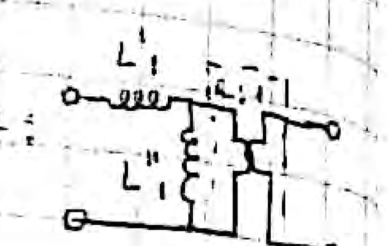
$L'_2 = L_2 - L''_2 = L_2 - \frac{M^2}{L_1} = L_2(1-k^2)$

Con questo tipo di scelta la rete si semplifica e diventa la seguente



$a = \frac{L_1}{M} = \frac{M}{\frac{M^2}{L_1}} = \frac{M}{L_2}$

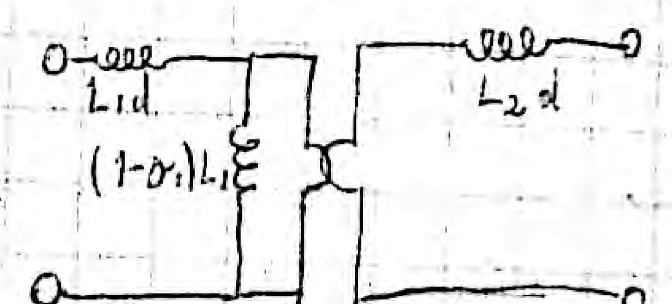
Se $L'_2 = 0$ allora compariranno L'_1 e non L'_2 e dunque:



Posso scegliere i parametri $\begin{cases} L'_1 = L_{1d} = \sigma_1 L_1 \\ L'_2 = L_{2d} = \sigma_2 L_2 \end{cases}$ L_{id} = coefficienti di dispersione

Queste due scelte non sono indipendenti; difatti si ha:

$\begin{cases} L''_1 = (1-\sigma_1)L_1 \\ L''_2 = (1-\sigma_2)L_2 \end{cases} \rightarrow L''_1 L''_2 = (1-\sigma_1)(1-\sigma_2)L_1 L_2 = k^2 L_1 L_2 = M^2$



Allora il nostro circuito si presenterà nella seguente maniera:
Il circuito a lato è particolarmente interessante anche se ha un induttore in più.
Difatti si ha: $a = \frac{L''_1}{M} = (1-\sigma_1)\frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_1}\frac{N_1}{N_2}\frac{L_1}{M} = \frac{N_1}{N_2}$

A differenza cioè dei primi due circuiti equivalenti questo presenta la proprietà di prendere come trasformatore ideale uno che ha rapporto di trasformazione "a" ancora pari al rapporto delle spire (che conosciamo, avendole messe noi). Questo fatto è interessante naturalmente solo se stiamo studiando degli AVVOLGIMENTI. Naturalmente in luogo dell'induttore alla prima porta $(1-\sigma_1)L_1$, ne posso collocare uno $(1-\sigma_2)L_2$ alla seconda porta.
L_{1d} moltiplicato per i_1 determina un flusso che si autoconcatena col primo circuito, ma non interessa il secondo. Discorso analogo vale per L_{2d}.

Consideriamo ora due ciambelle toroidali una interna all'altra su ognuna delle quali è stato collocato un avvolgimento

Si ha: $\sigma_1 = \frac{\varphi_{11} - \varphi_{21}}{\varphi_{11}}$; $\sigma_2 = \frac{\varphi_{22} - \varphi_{12}}{\varphi_{22}} = 0$ Nel nostro caso

σ_1 è però >0, e dunque l'accoppiamento non è perfetto. Difatti:

$k^2 = (1-\sigma_1)(1-\sigma_2) = (1-\sigma_1)$; è dunque $k > 1$ e $M^2 \neq L_1 L_2$

Ricordando i significati di φ_{22} e φ_{12}: $\varphi_{22} = \frac{L I_2}{N_2}$ (flusso autoconcatenato medio per spira.)

Se N_2 è elevato e le spire sono uniformemente avvolte, allora $L_2 I_2$ può essere calcolato moltiplicando il flusso concatenato per una spira e moltiplicare per il numero di spire. approssimato a

Ora se alimento solo il circuito 2 avrò che il flusso è $\int_{S_2} B_2\, dS = \int_{S_1} B_2\, dS$

$\varphi_{12} = \frac{M I_2}{N}$ è cioè ogni spira si concatena con lo stesso flusso $\varphi_{11} = \varphi_{12} \rightarrow \sigma_2 = 0$

Per σ_1 invece, $\sigma_1 \neq 0$ difatti $\varphi_{11} = \frac{L_1 I_1}{N_1}$; $\varphi_{21} = \frac{M I_1}{N_2}$ e $\varphi_{11} \neq \varphi_{21}$

in quanto φ_{21} è una parte (quella che interessa la sezione S_2) del flusso φ_{11} che è il flusso che interessa la superficie S_1. Si avrà $L_{2d} = 0 = \sigma_2 L_2$; $L_{1d} \neq 0$

RETI DI TIPO TRIFASE

$a_1(t) = A\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha)$

$a_2(t) = A\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$

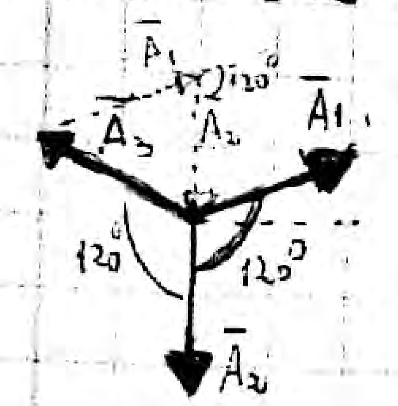
$a_3(t) = A\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{4\pi}{3}\right)$

① Si tratta di tre funzioni sinusoidali isofrequenziali
② Hanno tutte e tre la stessa ampiezza (valore efficace).
③ Osservando la fase iniziale della 1ª funzione essa è pari a quella della seconda funzione meno 120°, cioè $\frac{2}{3}\pi$; che la terza, poi è in ritardo rispetto alla seconda ancora di 120°. È così la prima rispetto alla terza. Così lo dispongo l'angolo giro in tre parti. Una tale terna viene detta terna simmetrica di funzioni sinusoidali. In realtà sono dette simmetriche

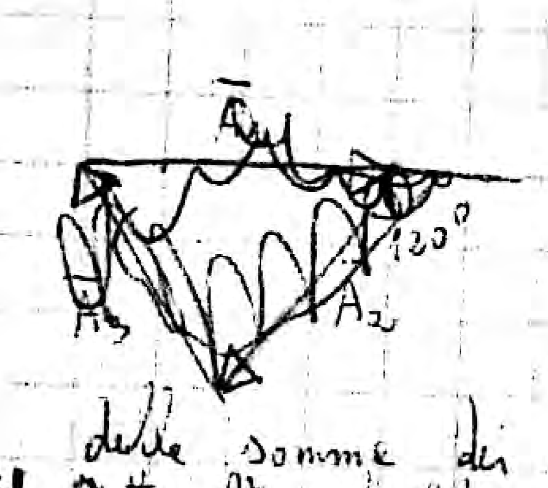
anche quelle terne di funzioni sinusoidali, ancora isofrequenziali e della stessa ampiezza nelle quali però valgono i segni positivi (in tal caso si ha un anticipo e non un ritardo). La prima terna (col segno −) viene detta "Terna simmetrica *diretta*", la seconda "*inversa*". Studieremo in generale le terne dirette. Siccome le funzioni sono isofrequenziali posso passare alla rappresentazione simbolica

$$\boxed{\bar{A}_1 = A e^{j\alpha}} \quad \boxed{\bar{A}_2 = A_2 e^{j(\alpha - \frac{2}{3}\pi)} = \bar{A}_1 e^{-\frac{2}{3}\pi j}} \quad \boxed{\bar{A}_3 = A e^{j(\alpha - \frac{4}{3}\pi)} = \bar{A}_1 e^{-\frac{4}{3}\pi j}}$$

Diamo ora una rappresentazione vettoriale. Sia dato $\bar{A}_1$ ed $\bar{A}_2$ ... uno

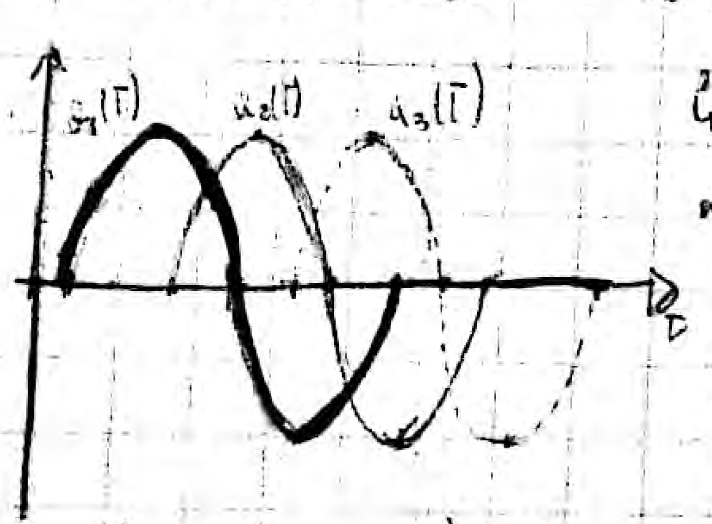


Questa è una rappresentazione di tipo stellare (difatti i vettori partono dallo stesso vertice), tuttavia nessuno mi vieta di ridisegnare i vettori in forma diagonale (Tratteggiati in figura)).
La somma dei tre vettori è dunque uguale ad un vettore di modulo nullo. Si ha (dalla figura): $\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 = 0$



Per cui $a_1(t) + a_2(t) + a_3(t) = 0$. Cioè la somma istantanea assume un'ampiezza pari al valore efficace della somma dei vettori simbolici cioè "0" (zero)!

Detto altrimenti: "La somma istante per istante delle funzioni $a(t)$ è costantemente nulla"



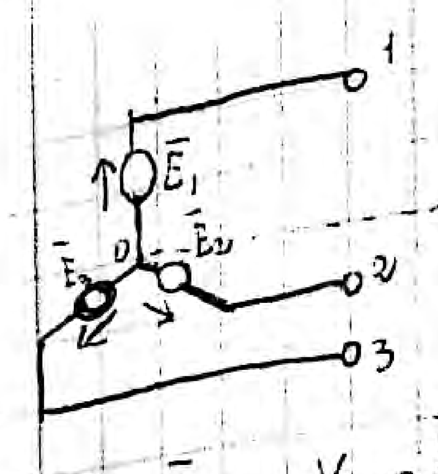
Cioè esistono in ogni istante tre valori dei quali almeno uno è positivo, o almeno uno è negativo.

Supponiamo ora di disporre di tre generatori le cui F.E.M. siano una
$e_1(t) = E\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha)$; $\bar{E}_1 = E e^{j\alpha}$; terna diretta di funzioni sinusoidali

$e_2(t) = E\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha - 2/3\,\pi)$; $\bar{E}_2 = \bar{E}_1 e^{-j\frac{2}{3}\pi}$;

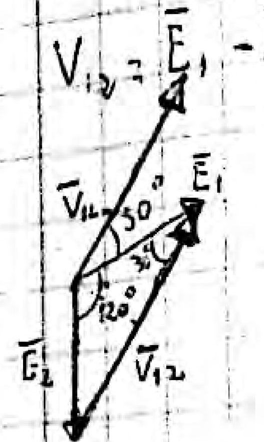
$e_3(t) = E\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha - 4/3\,\pi)$; $\bar{E}_3 = \bar{E}_2 e^{-j\frac{2}{3}\pi} = \bar{E}_1 e^{-j\frac{4}{3}\pi}$;

Topologie di tipo stellare



$V_{10} = \bar{E}_1$; $V_{20} = \bar{E}_2$; $V_{30} = \bar{E}_3$;

$V_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2$; Non utilizzando le trasformazione di Eulero posso fare così:



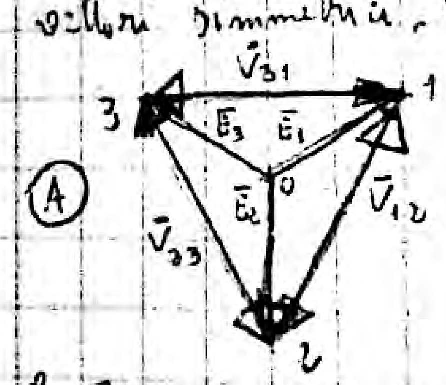
L'insieme di questi tre vettori ($\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ e $\bar{V}_{12}$) forma un triangolo isoscele con gli angoli alla base di 30°.
Cioè $\bar{V}_{12}$ è in anticipo rispetto ad $\bar{E}_1$ di 30°.
Disegnando l'altezza del triangolo (che è anche mediana e bisettrice), ottengo due triangoli rettangoli con angoli di 30° e 60°, dunque $\frac{V_{12}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}E$ in modulo, e dunque $\bar{V}_{12} = E\sqrt{3}e^{j(\alpha + \frac{\pi}{6})} = \sqrt{3}\bar{E}_1 e^{j\frac{\pi}{6}}$

Analogamente $\bar{V}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3 = \bar{E}_2\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}} = \bar{E}_1\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6} - j\frac{2}{3}\pi} = \bar{V}_{12}e^{-j\frac{2}{3}\pi}$;

$\bar{V}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1 = \sqrt{3}\bar{E}_3 e^{j\frac{\pi}{6}} = \bar{V}_{23}e^{-j\frac{2}{3}\pi} = \bar{V}_{12}e^{-j\frac{4}{3}\pi}$.

E così la terna dei vettori $\bar{V}_{12}$, $\bar{V}_{23}$, $\bar{V}_{31}$ costituisce una terna di vettori simmetrici. Ci si poteva arrivare anche graficamente. E precisamente

Ⓐ



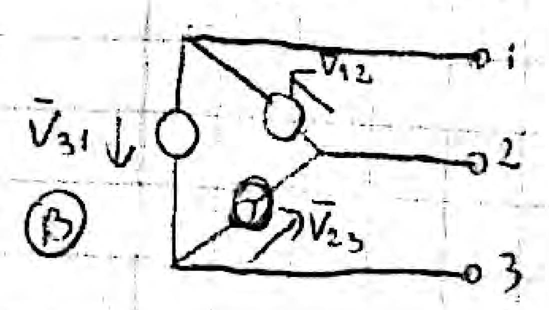
si poteva notare che la somma di $\bar{V}_{ij}$ era nulla facendo la somma delle espressioni.
$V_{ij} = \bar{E}_i - \bar{E}_j$

Le tensioni 1-N, 2-N, etc sono dette <u>stellari</u>.

Le tensioni 1-2, 2-3 sono dette <u>concatenate</u> e non coinvolgono il centro O.

Al livello dei valori efficaci il modulo di ogni concatenata è più grosso ~~della~~ di quello delle stellate corrispondenti. Questo è il motivo per cui accanto al posto di 220 V, si parla anche di 380 V nelle reti domestiche. La prima tensione si riferisce alla stellata, la seconda alla concatenata.

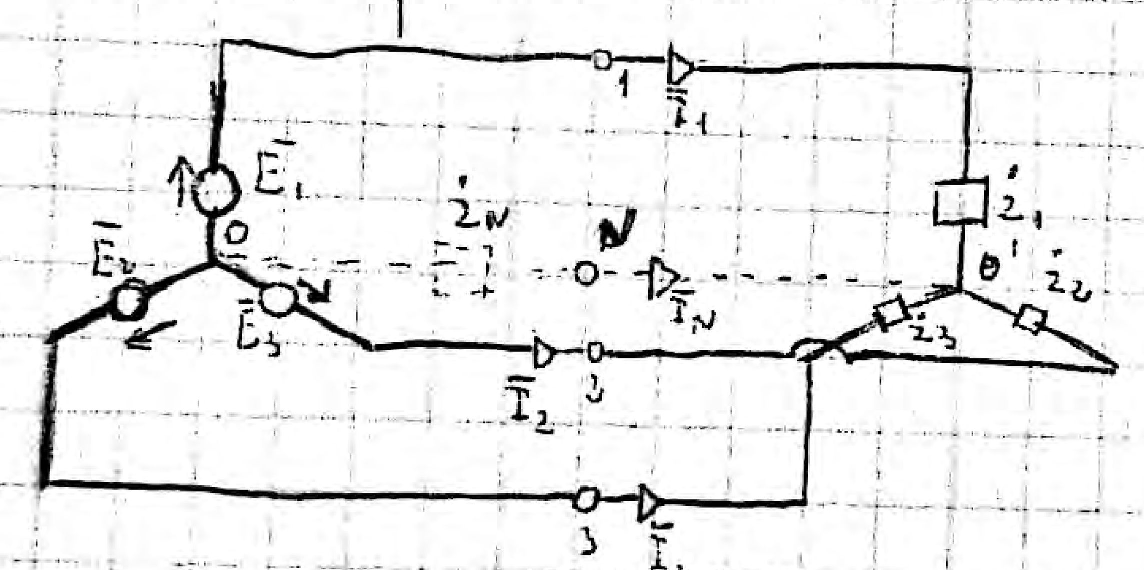
Cioè posso disporre di due livelli di tensione, che sceglierò di volta in volta a seconda del bisogno.



Nel caso generale è vietato alimentare il circuito a tre poli dal fianco con tre generatori. Li troviamo nel caso particolare in cui si cura del parallelo: sono allora due generatori ($-\bar V_{31}$ e $\bar V_{12}+\bar V_{23}$) che impongono le stesse tensioni.

Il tripolo (B) è equivalente al tripolo (A) purché come abbiamo scelto $\bar V$. Perciò negli esercizi verrà dato a noi indifferentemente una stella o una concatenata (senza cioè nemmeno specificare le configurazioni dei generatori), ed i risultati a valle saranno i medesimi.

Consideriamo ora un sistema a quattro fili (e dunque necessariamente di tipo stellare).



Calcoliamo le correnti.

$\bar I_1 = \frac{\bar E_1}{\dot z_1} = \frac{E}{Z_1} e^{j(\alpha-\varphi_1)}$

Dove Z_1 e φ_1 sono rispettivamente modulo ed argomento dell'impedenza.

$\bar I_2 = \frac{\bar E_2}{\dot z_2} = \frac{E}{z_2} e^{j(\alpha - \frac{2}{3}\pi - \varphi_2)}$; $\bar I_3 = \frac{\bar E_3}{\dot z_3} = \frac{E}{z_3} e^{j(\alpha - \frac{4}{3}\pi - \varphi_2)}$

$\bar I_N$ (Per il principio di Kirchhoff alle correnti applicato nel punto "O" oppure nel punto "O'") è

$\bar I_N = \bar I_1 + \bar I_2 + \bar I_3$;

Supponiamo che $\dot z_1 = \dot z_2 = \dot z_3 = \dot z = z e^{j\varphi}$. Sarà

$\boxed{\bar I_1 = \frac{\bar E_1}{\dot z} = \frac{E}{z} e^{j(\alpha-\varphi)}}$ $\bar I_2 = \frac{\bar E_2}{\dot z} = \frac{E}{z} e^{j(\alpha - \frac{2\pi}{3} - \varphi)} = \frac{\bar E_1}{\dot z} e^{-j\frac{2}{3}\pi} = \bar I_1 e^{-j\frac{2}{3}\pi}$;

$\bar I_3 = \bar I_2 e^{-j\frac{2}{3}\pi} = \bar I_1 e^{-j\frac{4}{3}\pi}$,

E dunque anche la terna delle correnti è simmetrica e dunque $\bar I_N = 0$; e posso anche togliere il filo che congiunge "O" con "O'". Cioè è $V_{oo'} = 0$

La cosa resta vera naturalmente anche se il filo O-O' ha una sua impedenza $\dot Z_N$.

Supponiamo ora che le impedenze $\dot z$ siano diverse. Usando i potenziali di nodo risulta:

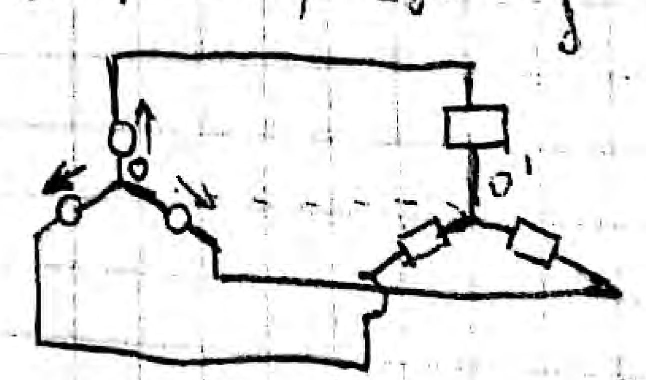
$$\bar V_{oo'} = \left(-\frac{\bar E_1}{\dot z_1} - \frac{\bar E_2}{\dot z_2} - \frac{\bar E_3}{\dot z_3}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\dot z_1} + \frac{1}{\dot z_2} + \frac{1}{\dot z_3} + \frac{1}{\dot z_N}\right)$$

Devo mettere invece il segno "+" se il generatore punta sul primo dei due poli (O). Calcoliamo $\bar I_1$:

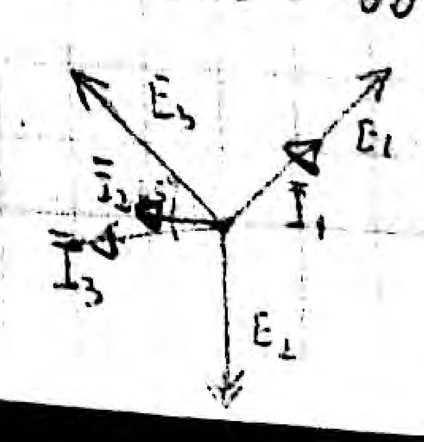
$\bar I_1 = \frac{\bar V_{1o'}}{\dot z_1} = \frac{\bar V_{1o} + \bar V_{oo'}}{\dot z_1} = \frac{\bar E_1 + \bar V_{oo'}}{\dot z_1}$, se $\dot z_1 = \dot z_2 = \dot z_3$ ho:

$V_{oo'} = \frac{\frac{1}{\dot z}(\bar E_1 + \bar E_2 + \bar E_3)}{\frac{3}{\dot z} + \frac{1}{\dot z_N}} = 0$ Siccome la terna è simmetrica, e dunque nel caso dell'impedenza 1 ho che la caduta di tensione è $\bar E_1$, ritrovo le condizioni $V_{oo'} = 0$ dette sopra. Ancora una volta, infatti, la somma delle correnti $\bar I_1$ è 0 e le tre correnti formano una terna simmetrica.

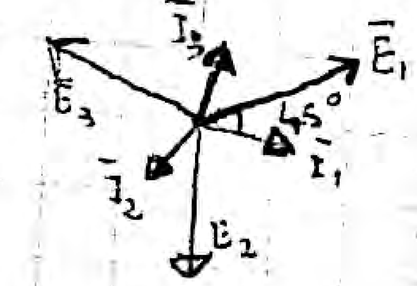
Es: $\dot z_1 = 10$, $\dot z_2 = 10j$, $\dot z_3 = 5 - 5j$



In questo caso essendo le impedenze diverse il filo OO' è importante perché non garantisce che $V_{oo'} = 0$

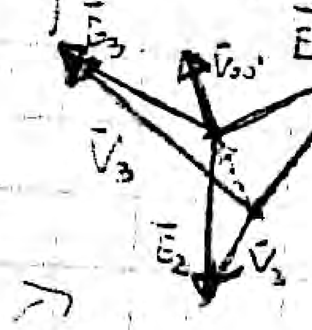


Se invece le impedenze sono uguali e $\dot{Z} = 5 + j5$



Posso cancellare il collegamento OO'.

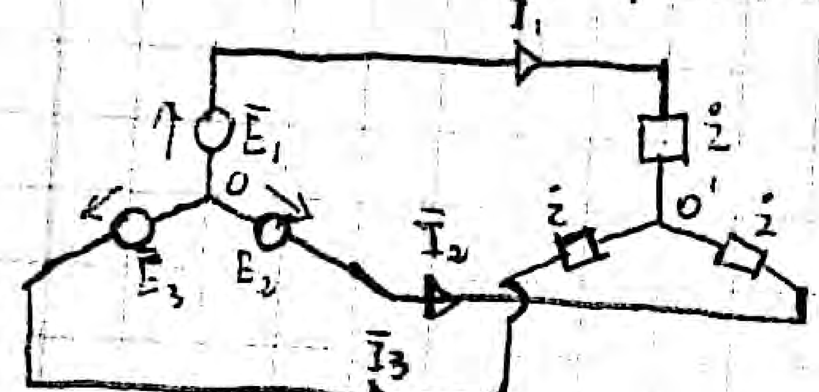
Supponiamo che $\dot{Z}_1 \neq \dot{Z}_2 \neq \dot{Z}_3$ e il collegamento non sia netto, ovvero sul filo O-O' ci sia un'impedenza $\dot{Z}_0$



$\bar{V}_{00'}$ si può disegnare per comodità come sotto.

$\bar{V}_1 = \dot{Z}_1 \bar{I}_1$

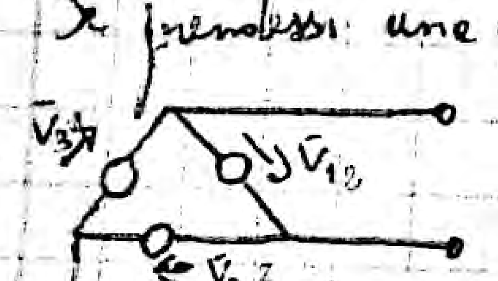
Come si vede la terna $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$ non è simmetrica il che dipende naturalmente dalla presenza di $\dot{Z}$. Prima non si verificava questo fatto essendo $V_{00'} = 0$;



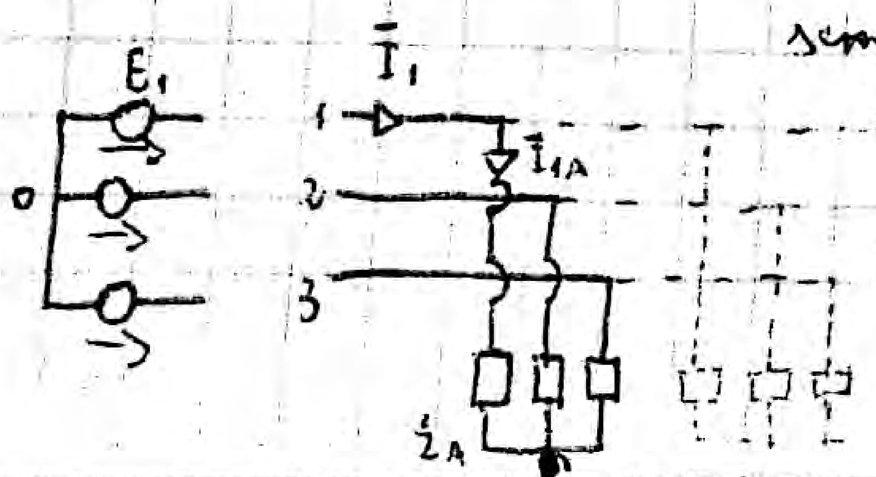
Questo sistema è tale che le tensioni e le correnti formano una terna simmetrica. Introducendo un nuovo termine sinonimo di simmetrico (EQUILIBRIO), riserveremo il termine simmetrico alle tensioni, ed equilibrato alle correnti. Dirò che il sistema sopra è simmetrico ed equilibrato.

NOI TRATTEREMO SEMPRE SISTEMI SIMMETRICI.

Se prendessi una terna di generatori connessi a triangolo, le correnti sarebbero le stesse per quanto detto prima.



Allora posso disegnare il mio sistema, senza preoccuparmi se i generatori sono connessi a stella o a triangolo, specificando semplicemente le circostanze che la terna è simmetrica.



$\bar{V}_{12} = 100\sqrt{3}\, e^{j\frac{\pi}{6}}$ Questo è quanto viene detto (non sappiamo cioè se la terna è monta sia

collegata a triangolo o a stella). Immagineremo per nostra comodità una topologia a stella. Allora:

$\bar{E}_1 = \frac{V_{12}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}$ (cioè la stellata ha modulo più piccolo di $\sqrt{3}$ volte ed è in ~~anticipo~~ ritardo di fase di 30°.)

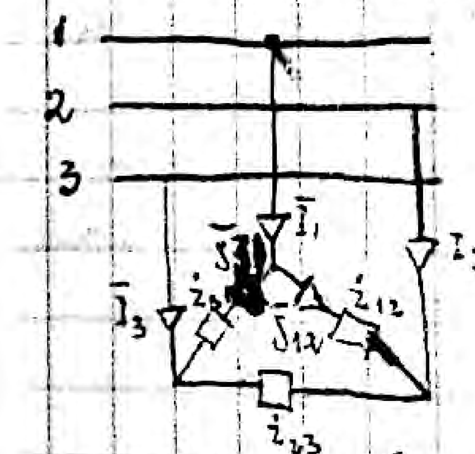
Potrei eseguire naturalmente come detto inizialmente la $\bar{E}_2$, o la $\bar{E}_3$, al posto della V_{12} o

$\bar{I}_{1A} = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_A}$ etc. Supponiamo che ci sia un'altra stella d'impedenze $\dot{Z}_B$ ancora più a valle. Il discorso vale ancora, cioè: $\bar{I}_{1B} = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_B}$;

Basta con questo metodo calcolare una sola tensione V_{ij} ed una sola corrente $\bar{I}_K$, tutte le altre tensioni e correnti saranno dedotte da queste a meno di fattori esponenziali per le variazioni di fase.

Le corrente totale $\bar{I}_1$ assorbita dalla rete sarà data dalla somma delle $\bar{I}_{1A}$, $\bar{I}_{1B}$, etc. Da $\bar{I}_1$ posso dedurre dalla simmetria della terna di correnti, anche $\bar{I}_2$ ed $\bar{I}_3$.

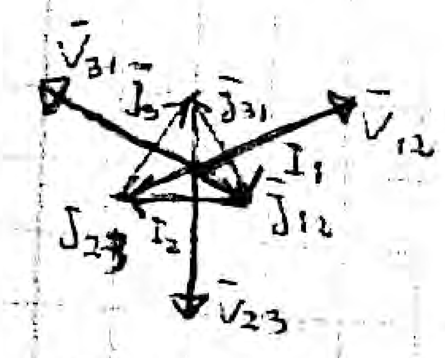
Naturalmente se al posto di una terna equilibrata, ce ne fosse una squilibrata, userò il teorema di Millmann. In questo caso non potremo più utilizzare le proprietà di simmetria, ma dovremo considerare tutte le tensioni E_1, $\bar{E}_2$ ed $\bar{E}_3$ ed eseguire tutti i calcoli.



Supponiamo ora che il carico delle impedenze sia collegato a triangolo alla linea trifase. Potrei trasformare il triangolo in stella ed eseguire i calcoli precedenti, considerando sempre le stellate dei generatori. Naturalmente se la terna delle impedenze è squilibrata avrò una stella squilibrata. Un altro metodo è quello di calcolare la corrente $\bar{J}_{12}$ (chiameremo queste "Correnti di fase", per distinguerle dalle "Correnti di linea").

$\bar{J}_{12} = \frac{\bar{V}_{12}}{\dot{Z}_{12}}$; A questo punto è più comodo lavorare sulle concatenate, perchè si calcolano immediatamente le correnti di fase.

$\bar{J}_{23} = \frac{\bar{V}_{23}}{\dot{Z}_{23}}$ $\bar{J}_{31} = \frac{\bar{V}_{31}}{\dot{Z}_{31}}$; Naturalmente se le $\dot{Z}_{ij}$ sono diverse tra loro le $\bar{J}_{ij}$ saranno squilibrate.

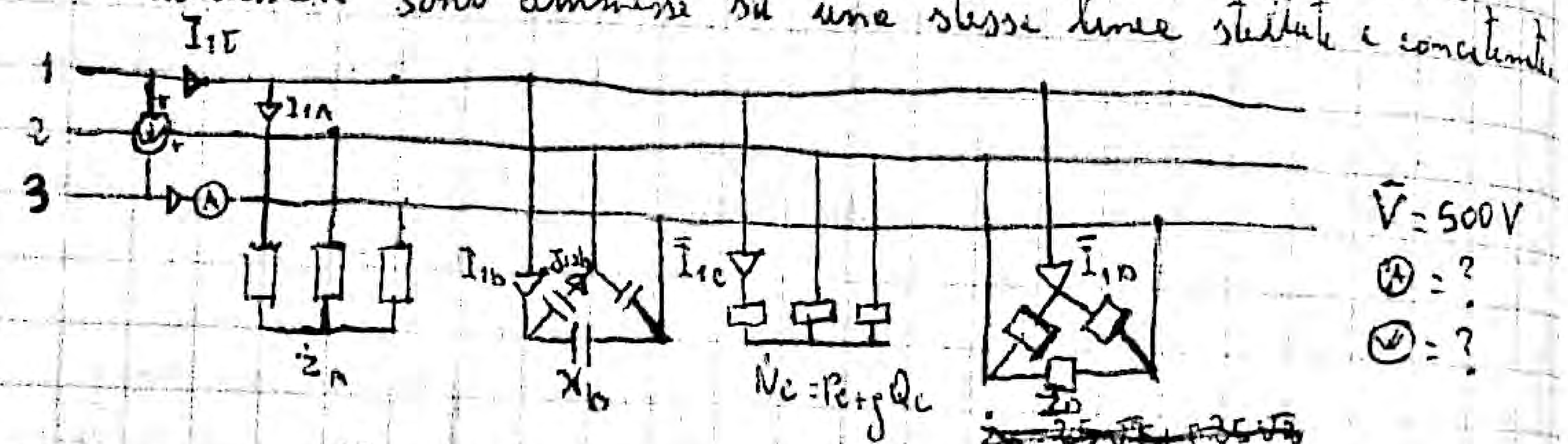


$\bar I_1 = \bar J_{12} - \bar J_{31}$;
$\bar I_2 = \bar J_{23} - \bar J_{12}$;
$\bar I_3 = \bar J_{31} - \bar J_{23} = -\bar I_1 - \bar I_2$;

Se la terna delle correnti di fase è equilibrata, $\bar I_1, \bar I_2, \bar I_3$ costituiscono un sistema equilibrato.
Il modulo delle correnti di linea è $\sqrt{3}$ il modulo delle correnti di fase, mentre ~~la fase~~ c'è un ritardo di 30° rispetto alle correnti di fase cioè $\bar I$:

$\bar I_1 = \bar J_{12}\sqrt{3}\, e^{-j\frac{\pi}{6}}$.

Naturalmente sono ammesse su una stessa linea stellate e contemporaneamente



$\dot Z_A = \sqrt{3}\,100\, e^{\frac{\pi}{6}j}$;
$X_B = 50$;
$P_C = 2.5$ kW;
$Q_C = -2.5$ kVAr;
$\dot Z_D = 25\sqrt{2} + j25\sqrt{2}$;

Sistema simmetrico (di tipo diretto). Linea infinita. I carichi sono ugualmente equilibrati. Come si vede sul terzo carico i stati forniti la potenza complessa assorbita. Ricordiamo inoltre che il Wattmetro indica una potenza solo se inserisco opportunamente i morsetti (in questo caso non ho una potenza reale). Ricordiamo ancora che:

$V_{12} = V_{23} = V_{31}$; $I_1 = I_2 = I_3$; (in modulo)

Ma $W_{12} = VI\cos(\bar V_{13}\,(-I_2))$ e quindi W varierà a seconda della linea.

Posso fare una posizione arbitraria riguardo l'argomento. Naturalmente una volta effettuata una scelta, le altre grandezze saranno calcolate di conseguenza. Se tuttavia alla fine mi viene data anche l'informazione relativa alla fase $\bar E_1$, basterà sommare l'argomento dato agli argomenti

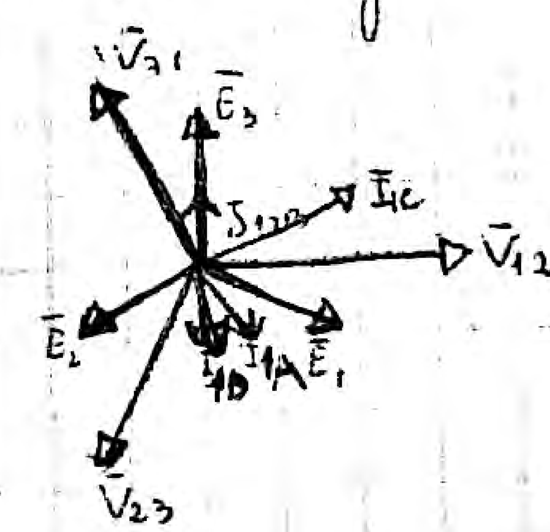
delle varie grandezze, cioè dipendono dalle fasi iniziali "gli argomenti" non "le differenze tra gli argomenti".

Nel nostro problema, ad esempio, per Ⓐ e Ⓦ non occorre le fasi iniziali in quanto nel primo caso interessa un modulo, nel secondo le differenze di fase tra due vettori.

$\bar I_{1A} = \frac{\bar E_1}{\dot Z_A}$ Scegliamo come riferimento $\bar V_{12} = V e^{j0} = 500$ (Posizione arbitraria)
(Scrivere sempre negli esercizi "Effettuo una pos. arb.")

A questo punto coerentemente con la scelta fatta avrò per la stellata.

$\bar E_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar V_{12}\, e^{-j\pi/6}$



Esaminiamo il carico B. Lo posso trasformare nell'equivalente carico a stella. Ma posso anche osservare che i due centri stella sono in parallelo.
Posso calcolare anche $\bar J_{12}$ e da questo $\bar I_{1B}$. $\bar J_{12B} = \frac{\bar V_{12}}{-jX_B} \rightarrow \bar I_{1B} = \sqrt{3}\,\bar J_{12B}\, e^{-j\frac{\pi}{6}}$

$P_C = 3E_1 I_{1C}\cos\varphi_C$ $Q_C = E_1 I_{1C}\sin\varphi_C$
modulo   l'angolo di ritardo coincide con l'argomento dell'impedenza dei carichi $\varphi_C = \widehat{E\,\bar I_{1C}}$;

$\varphi_C = \arctan\frac{Q_C}{P_C}$; $I_C = \frac{P_C}{E\cos\varphi_C}$ $\bar I_{1C} = I_C\, e^{-j(\frac{\pi}{6}+\varphi_C)}$ (in questo caso devo prendere I_{1C} in quanto non considero un generico vettore I_C)

$\bar I_{1D} = \sqrt{3}\,\frac{\bar V_{12}}{\dot Z_D}\, e^{-j\frac{\pi}{6}}$ (analogamente al caso B).

Sarà inutile calcolare $\bar I_{2A}$ perché deriva da $\bar I_{1A}$. Siccome interessa I_{1T} avrò:
$\bar I_{1T} = \bar I_{1A} + \bar I_{1B} + \bar I_{1C} + \bar I_{1D}$;

A questo punto posso rispondere al quesito riguardo ad $I_{3I} = I_{1I}$;

Rispondendo al secondo quesito, si ha poi: $W = VI\cos(\widehat{\bar V_{13}(-\bar I_2)})$.

Ora $\bar V_{12}$ ha argomento uguale a "0" per posizione e dunque $\bar V_{13}$ avrà argomento uguale a "$\frac{4}{3}\pi$". Inoltre: $\bar I_{2I} = I_{1I} e^{-j\frac{2}{3}\pi}$ e $(-\bar I_{2I}) = \bar I_{2I} e^{j\pi}$

Per il teorema di Boucherot la somma delle potenze complesse è nulla. Ora se voglio calcolare le potenze complesse assorbite, avrò che esse è pari a quelle fornite dai generatori. $P_{eA} = 3R_A I_A^2$

Il secondo carico ha solo potenza reattiva negativa: $Q_B = J^2 X_B$

$$\bar E_1 = \frac{1}{\sqrt3}\bar V_{12} e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{500}{\sqrt3} e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

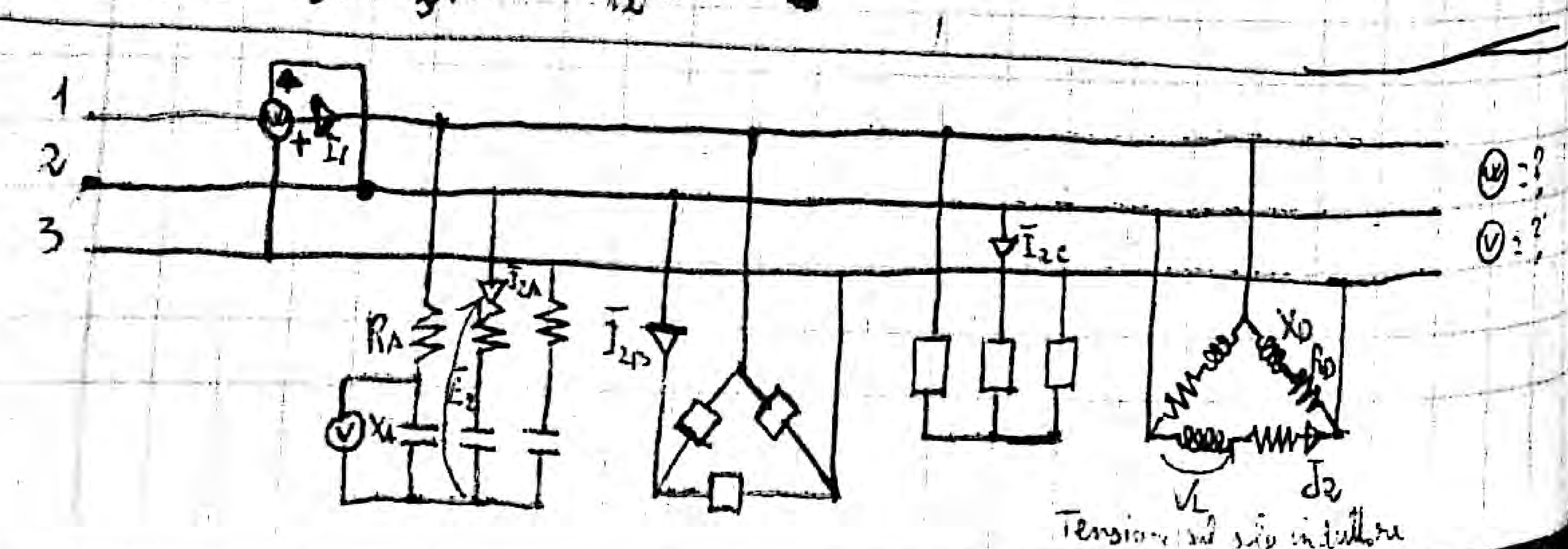
$$\bar I_{1A} = \frac{\bar E_1}{\dot Z_A} = \frac{500}{3} e^{-j\frac{\pi}{3}}$$ La corrente è in ritardo rispetto alla stellata.

$$J_{12B} = \frac{\bar V_{12}}{-jX_B} = \frac{500}{50} e^{j\frac{\pi}{2}} = 10 e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\bar I_{1C} = I_C e^{-j(\frac{\pi}{6}+\varphi_c)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 10\, e^{-j(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})}$$; $I_C = \frac{P_C}{E\cos\varphi_c} = \frac{\sqrt3}{\sqrt2}10$ In anticipo di 45° rispetto la stellata

$$\bar I_{1D} = \sqrt3 \frac{\bar V_{12}}{\dot Z_D} e^{-j\frac{\pi}{6}} = \sqrt3\frac{500}{50} e^{-j(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})}$$ In ritardo di 45° rispetto alla tensione della stellata

$$\bar V_{13} = -\bar V_{31} = V_{31}e^{j\pi} = \bar V_{12} e^{-j(\frac{4}{3}\pi + \pi)}$$



$R_A = X_A = 50$

$R_D = X_D = 100$

$v_L(t) = 100\sqrt2\cos\omega t$; $\bar V_L = 100 e^{j\pi/2}$ (Questa volta non si fanno posizioni: la fase iniziale è fissata da v_L)

$A_B = 10$ kVA (Potenza apparente)

$Q_B = \frac{10}{\sqrt2}$ kVAr

$P_C = 5$ kW

$A_C = 5$ kVA

$\varphi_C = \arccos\frac{P_C}{A_C} = 0$

In questo caso non è possibile specificare se il carico è ohmico induttivo o capacitivo, in quanto ho dato la P_A che di per sé dal coseno che è funzione pari. In questo caso particolare però i dati sono sufficienti, in quanto viene arccos 1 = 0, dunque la potenza reattiva è nulla ed il carico è puramente ohmico. Ho perciò

$\bar V_{23} = (R_D + jX_D)\cdot\bar J_{23D}$

$\bar J_{23D} = -\frac{\bar V_L}{jX_L}$ (conv. generatore)

$\bar E_2 = \frac{\bar V_{23}}{\sqrt3} e^{-j\frac{\pi}{6}} \to I_{2A} = \frac{E_2}{R_A - jX_A}$ $\quad V = I_A \cdot X_A$

$\bar I_{2D} = \sqrt3\, \bar J_{23D}\, e^{-j\frac{\pi}{6}}$

$\hat\varphi_B = \arcsin\frac{Q_B}{A_B}$ (essendo $Q_B = V_{23}J_{23B}\sin\hat\varphi_B = A_B\sin\hat\varphi_B$)

$J_B = \frac{A_B}{V_\Delta}$; $\bar J_{23B} = J_B e^{j(\arg\bar V_{23} - \varphi_B)}$ (Siccome la potenza reattiva è positiva mi aspetto la corrente in ritardo) (carico ohmico induttivo)

$\bar I_{2B} = \sqrt3\, \bar J_{23B}\, e^{-j\frac{\pi}{6}}$

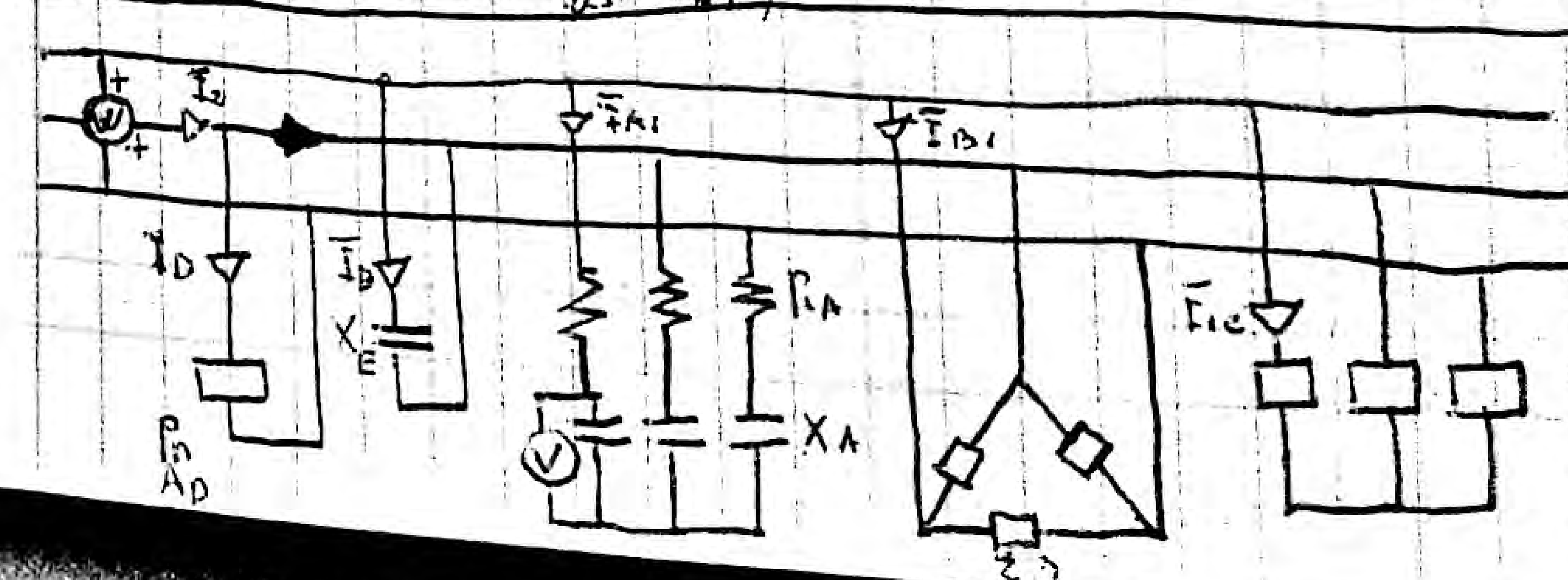
$I_C = \frac{A_C}{E}$ modulo uguale per $\bar I_C$

$\bar I_{2C} = \frac{A_C}{E} e^{j\arg\bar E_2}$ (carico puramente ohmico)

Ottengo infine:

$\bar I_2 = \bar I_{2A} + \bar I_{2B} + \bar I_{2C} + \bar I_{2D}$; $\bar I_1 = \bar I_2 e^{j\frac{2}{3}\pi}$;

L'indicazione del Wattmetro (che ancora non ha alcun significato fisico) è: $W = VI\cos(\widehat{\bar V_{23}(-\bar I_1)})$



$$\begin{cases} P_D = 1\,kW;\ A_D = \sqrt{2}\,kVA\ (\text{ind}); \\ X_E = 19\,\Omega \\ R_A = X_A = 11\sqrt{2}\,\Omega \\ \dot{z}_B = 38\,e^{j\pi/3} \\ P_C = 5\,kW;\ Q_C = -5\,kVA \\ V = 220/\sqrt{2}\ (\text{valore efficace}) \\ N_T = ?\quad W = ? \end{cases}$$

Dobbiamo scegliere arbitrariamente un riferimento di fase, in quanto di V è stato dato solo il valore efficace

$$\bar{I}_{1A} = \frac{V^*}{-jX_A}$$ (dove il meno compare essendo il componente un condensatore)

$$\bar{E}_1 = (R_A - jX_A)\,\bar{I}_{1A}$$

Posso studiare B calcolando le correnti di fase o effettuando una trasformazione triangolo-stella.

$$\bar{I}_{1B} = \frac{\bar{E}_1}{\dot{z}_{B\lambda}} = \frac{\bar{E}_1}{\frac{\dot{z}}{3}}$$

$\boxed{z_{ab} = (z_a z_b)\,\varepsilon_a}\ \boxed{z_a = \frac{z_{ab}\,z_{ac}}{z_\Omega}}$ trasf. triangolo

(avendo effettuato la trasformazione delle impedenze in stella. Il carico è ohmico-induttivo essendo in fase $\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Tale fase non varia nella trasformazione triangolo-stella, mentre cambierà il modulo del $\dot{z}$ di $\frac{1}{3}$ dello $\dot{z}$ ...)

Allo stesso risultato si può peraltro giungere calcolando le correnti di fase.

$$\bar{V}_{12} = \sqrt{3}\,\bar{E}_1\,e^{j\pi/6}$$

e dunque come prima sostituendo

$$\bar{J}_{12B} = \frac{\bar{V}_{12}}{\dot{z}_B}$$

$$\bar{I}_{1B} = \frac{3\bar{E}_1}{\dot{z}_B};$$

$$\bar{I}_{1B} = \sqrt{3}\,\bar{J}_{12B}\,e^{-j\pi/6}$$

Per il carico C (resistivo-capacitivo essendo la potenza reattiva negativa) si ha poi:

$$\varphi_C = \arctg\frac{Q_C}{P_C} = -\frac{\pi}{4};\quad I_C = \frac{P}{E\cos\varphi_C};\quad \bar{I}_{1C} = I_C\,e^{j(\arg\bar{E}_1 - \varphi_C)}$$

e non: $\underline{\underline{\bar{I}_{1C} = I_C\,e^{j\varphi_C}}}$

$$\bar{I}_E = \frac{\bar{V}_{12}}{-jX_E};$$

Rimane ora il carico D. Risulta: $\varphi_D = \arccos\frac{P_D}{A_D}$ ed è > 0 e siccome il coseno è una funzione pari devo specificare se il carico è induttivo o capacitivo. Nel nostro caso (carico induttivo) è $\varphi_D > 0$

$$\bar{I}_D = \frac{A_D}{V}\,e^{j(\arg V_{23} - \varphi_D)} =$$

$$= \frac{A_D}{V}\,e^{j(\underbrace{\arg V_{12} - \frac{2}{3}\pi}_{\arg V_{23}} - \varphi_D)}$$

$$W = V I_2 \cos(\widehat{\bar{V}_3, (-\bar{I}_2)})$$

In questo caso non è corretto mettere I al posto di I_2 in quanto siccome il sistema non è equilibrato per i carichi D ed E devo precisare quale delle correnti interessa l'amperometrica.

$$\bar{V}_{31} = \bar{V}_{12}\,e^{-j\frac{4}{3}\pi}$$

$$-\bar{I}_2 = \bar{I}_2\,e^{j\pi}$$

$$\bar{I}_2 = (\bar{I}_{1A} + \bar{I}_{1B} + \bar{I}_{1C})\,e^{-j\frac{2}{3}\pi} + \bar{I}_D - \bar{I}_E$$

$$P_T = 3R_A I_A^2 + 3 I_B^2 \cdot \overset{\text{reale}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\dot{z}_B}{3}\right) + 3P_C + P_D$$

$$\Updownarrow$$

$$3 \cdot J_B^2 \cdot \mathrm{Re}(\dot{z}_B)$$

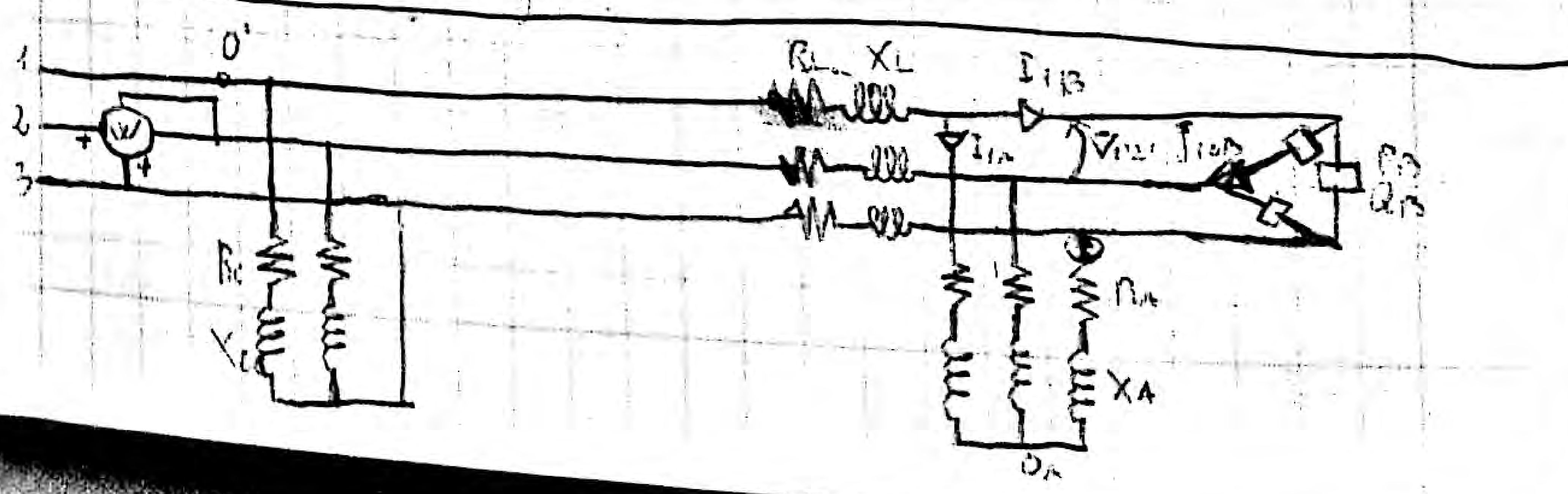
$$\Updownarrow$$

$3VJ\cos(\arg\dot{z}_B)$ Potenza attiva assorbita da ciascun lato del triangolo.

$$\Updownarrow$$

$$3EI\cos\left(\arg\frac{\dot{z}_B}{3}\right) = 3EI\cos(\arg\dot{z}_B)$$

$$Q_T = -3X_A I_A^2 + 3 I_B^2\,\underset{\text{immaginaria}}{\mathrm{Im}}(\dot{z}_B/3) + 3Q_C - X_E I_E^2 + \sqrt{A_D^2 - P_D^2}$$



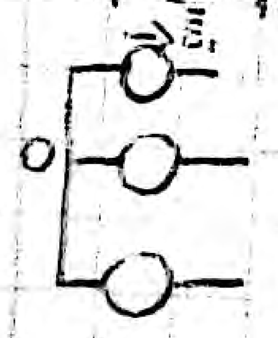
P_{AB} ? $\quad \bar{I}_{1A} = I e^{j0}$ dove I compare senza soprassegno perché è un valore efficace

$\bar{E}'_1 = (R_A + jX_A)\bar{I}_{1A}$; $\varphi_B = \operatorname{arctg}\dfrac{Q_B}{P_B}$; $J_B = \dfrac{P_B}{V' \cos\varphi_B}$

$\bar{V}_{1'2'} = \sqrt{3}\,\bar{E}_1 e^{j\pi/6}$; $\bar{J}_{12B} = J_B e^{j(\arg V_{1'2'} - \varphi_B)}$

$\bar{I}_{1B} = \sqrt{3}\,\bar{J}_{12B} e^{-j\pi/6}$; $E_1 = E'_1 + (R_L + jX_L)\bar{I}_1$;

$\bar{I}_{1'} = \bar{I}_{1A} + \bar{I}_{1B}$;

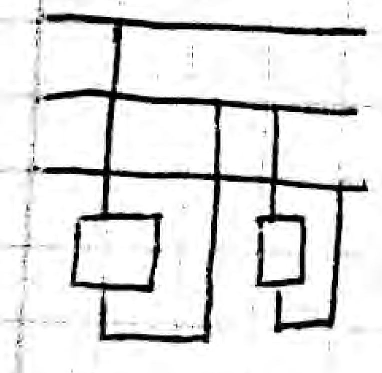


Per spiegare la relazione di E potremmo supporre che all'interno della stella vi siano tre generatori connessi a stella simmetrica. Ogni stella che metto a valle rappresenta una differenza di potenziale nulla tra il centro stella delle impedenze e dei generatori.

Anche nel nostro caso la differenza di potenziale $V_{0,0A} = 0$ e dunque $V_{0',0A} = \bar{E}_1$, cioè $\bar{E}_1$ è pari alla caduta di potenziale lungo la linea 1 più la caduta di pot $\bar{E}'_1$.

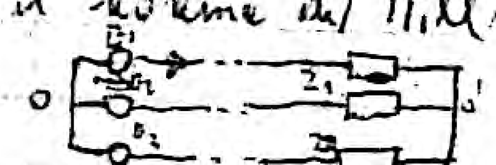
Un altro metodo è quello di osservare che:
$\bar{V}_{12} = \bar{V}_{1'2'} + (R_L + jX_L)\bar{I}_1 - (R_L + jX_L)\bar{I}_2$,
Adoperando le convenzioni.

Consideriamo ora il carico C. Potremmo ridisegnarlo in questo modo:



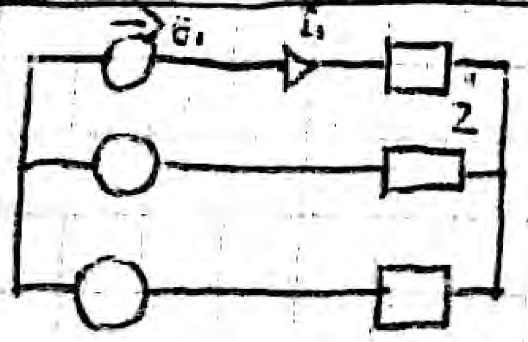
Da cui: $\bar{I}_{1C} = \dfrac{\bar{V}_{13}}{R_C + jX_C}$

Nel caso poi ci fosse stata un'impedenza anche nel terzo lato, come risposta delle prime due, si sarebbe dovuto applicare il teorema di Millmann alle stelle:



$\bar{V}_{00'} = \dfrac{\frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_2}{Z_2} + \frac{E_3}{Z_3}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}}$

$-\bar{I}_{3C} = \bar{I}_{1C} + \bar{I}_{2C}$



$\dot{Z} = Z e^{j\varphi}$;

$e_1 = E\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \alpha)$
$e_2 = E\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \alpha - 2\pi/3)$
$e_3 = E\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \alpha - 4\pi/3)$

Le equazioni temporali delle correnti sono date da:

$I = \dfrac{E}{Z}$ (Modulo, come appare chiaramente dalla simbologia)

$$\begin{cases} i_1 = I\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \alpha - \varphi) ; \\ i_2 = I\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \alpha - \varphi - \frac{2}{3}\pi) ; \\ i_3 = I\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \alpha - \varphi - \frac{4}{3}\pi) ; \end{cases}$$

Adoperando le convenzioni del quadripolo utile:

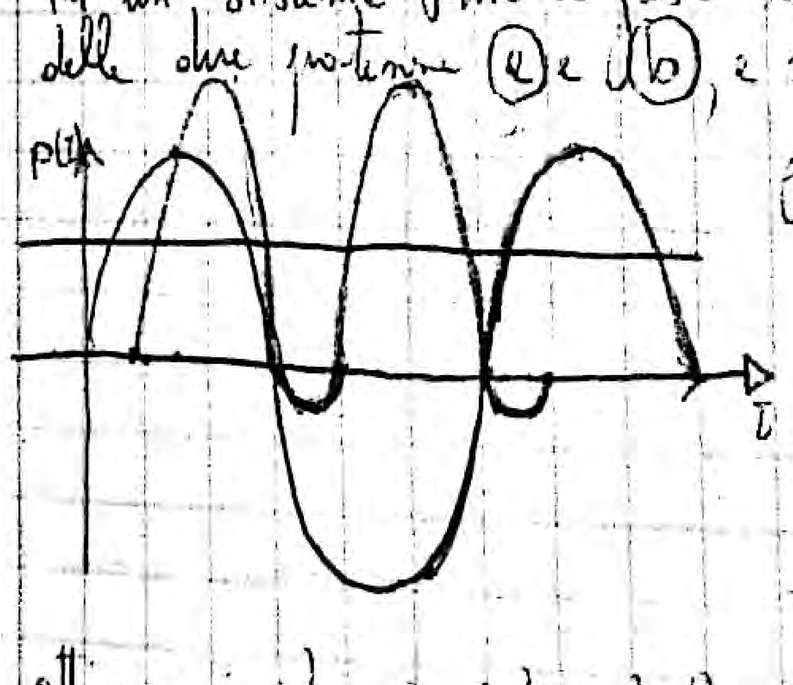
$$p(t) = \sum_i e_i i_i = 2EI\left\{\left[\frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos[2(\omega t + \alpha) - \varphi]\right] + \left[\frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos[2(\omega t + \alpha) - \frac{4}{3}\pi - \varphi]\right] + \left[\frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos[2(\omega t + \alpha) - \frac{8}{3}\pi - \varphi]\right]\right\} =$$

$= 3EI\cos\varphi$ (Infatti ho un sistema simmetrico costituito dai termini $\cos[2(\omega t + \alpha) - \varphi]$, etc., e la loro somma istante per istante è nulla.)

È dunque "La potenza istantanea di un carico equilibrato e simmetrico non è funzione del tempo". Lo stesso risultato vale per un sistema qualsiasi purché equilibrato.

Questo è uno dei motivi principali che ha determinato la fortuna dei sistemi trifase.

In un sistema monofase istantaneamente assorbo la somma delle due potenze (a) e (b), e solo mediamente la parte (b) è nulla.



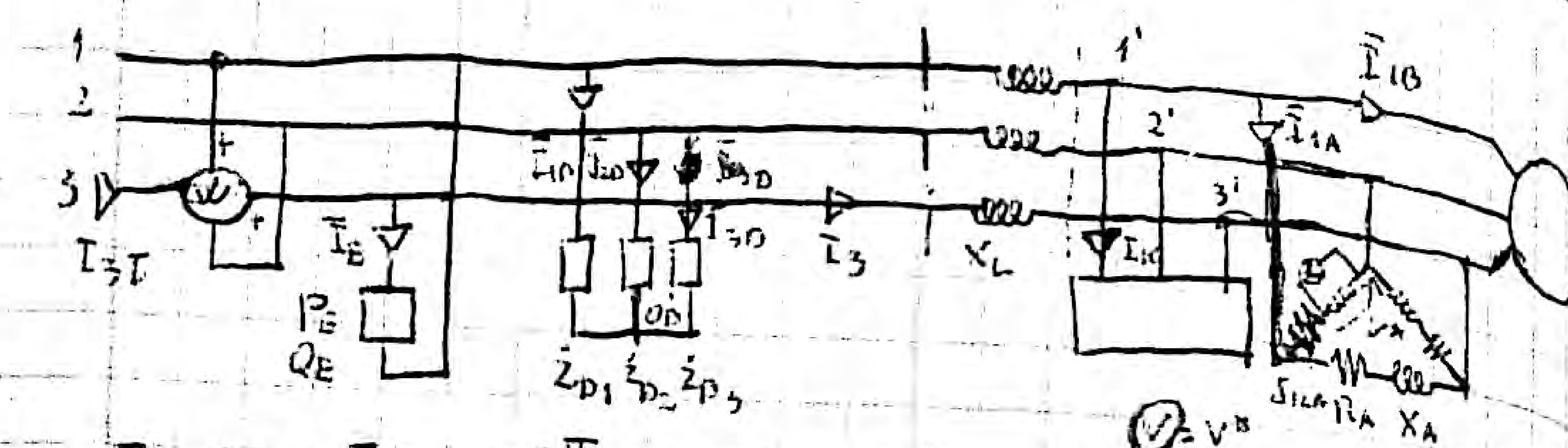
Componente a pulsazione 2ω

Un terzo vantaggio di questo tipo di correnti è quello di realizzare facilmente dei campi rotanti, che sono necessari nelle trasformazioni delle macchine asincrone. La potenza attiva coincide nei sistemi trifase con la potenza istantanea p(t). Si ha:

$P = 3EI\cos\varphi = \sqrt{3}\,VI\cos\varphi = \sqrt{3}VJ\cos\varphi$ (dove cos φ conserva il significato di angolo di ritardo di I_1 rispetto ad E_1, cioè della corrente di linea rispetto la stellata)

$Q = 3EI\sin\varphi$; $P_A = A = 3EI = \sqrt{P^2 + Q^2}$

$\dot{N} = \sum_j \bar{E}_j \check{\bar{I}}_j = 3\bar{E}_1\check{\bar{I}}_1 = P + jQ = P_A e^{j\varphi}$;



$\bar{V} = V^*$

$$\bar{I}_{1A} = \sqrt{3}\ \bar{J}_{12A}\ e^{-j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(-\frac{V^*}{jX_A}\right) e^{-j\pi/6}$$

(Convenzione del generatore tra V^* e $\bar{J}_{12A}$)) $V^* = V e^{j0}$ (rif. arbitrario)

$$\bar{V}_{1'2'} = \bar{J}_{12}\,(R_A + jX_A)\ ;$$

$$E_1' = \frac{\bar{V}_{1'2'}}{\sqrt{3}}\, e^{-j\pi/6}\ ,$$

$\varphi_B = \arccos \dfrac{P_B}{A_B}$ (>0 perché la corrente è in ritardo rispetto alla tensione, ovvero si ha un comportamento ohmico-induttivo)

$I_B = \dfrac{A_B}{3E'}$ da cui: $\bar{I}_{1B}' = I_B\, e^{j(\arg \bar{E}_1' - \varphi_B)}$

$$I_C = \frac{A_C}{3E'}\ ;\quad \varphi_C = \arcsin \frac{Q_C}{A_C}\ ;\quad \rightarrow \bar{I}_{1C} = I_C\, e^{j(\arg \bar{E}_1' - \varphi_C)}$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_{1A} + \bar{I}_{1B} + \bar{I}_{1C}\ ;\qquad \bar{E}_1 = \bar{E}_1' + jX_L \bar{I}_1$$

Ora posso trasformare in triangolo la stella equilibrata ottenendo la linea tratto punto e fare poi un parallelo con la diramazione "E", calcolando quindi le correnti di linea.

Posso anche calcolare direttamente su "E": $\bar{V}_{3i} = \bar{E}_3 \sqrt{3}\, e^{j\frac{\pi}{6}} = \bar{E}_1 e^{-j\frac{\pi}{4}\cdots}$

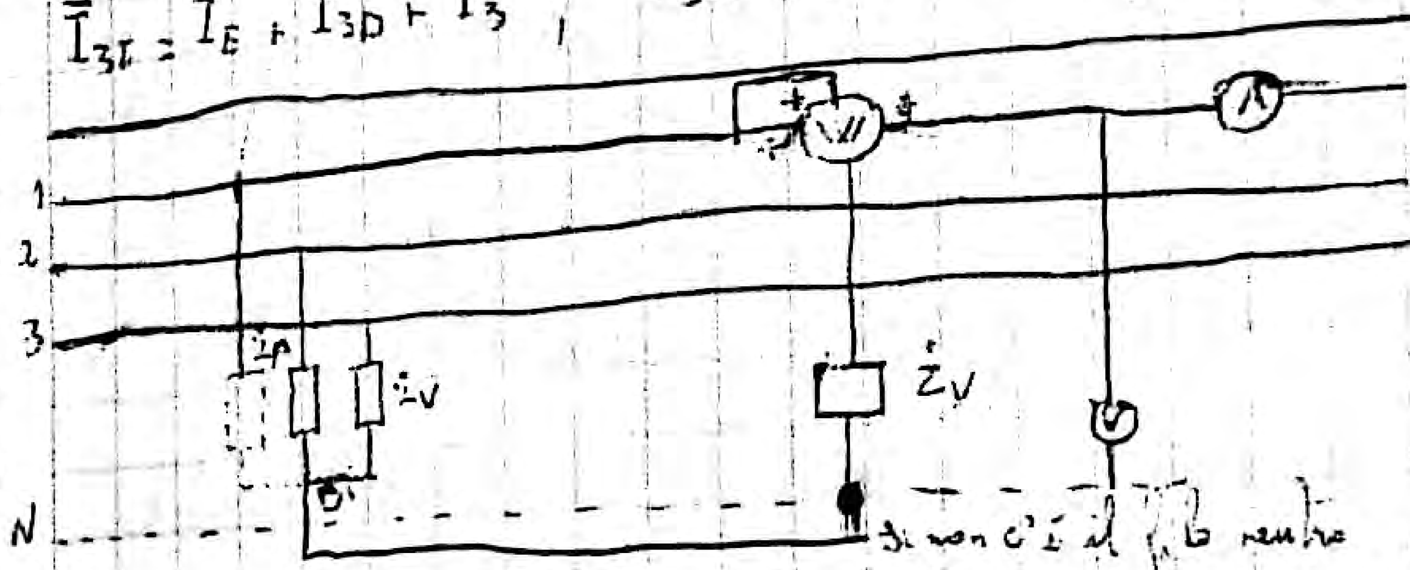
$$\varphi_E = \operatorname{arctg} \frac{Q_E}{P_E}\ ;\quad \bar{I}_E = \frac{P_E}{V\cos\varphi_E}\, e^{j(\arg V_{3i} - \varphi_E)}$$ (con la convenzione dell'utilizzatore)

Applicando poi su "D" il teorema di Millmann si ha:

$$V_{O'O} = \frac{-\dfrac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_{D1}} - \dfrac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_{D2}} - \dfrac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_{D3}}}{\dfrac{1}{\dot{Z}_{D1}} + \dfrac{1}{\dot{Z}_{D2}} + \dfrac{1}{\dot{Z}_{D3}}}$$ (Poiché le forze elettromotrici puntano verso il secondo nodo avrò tutti segni meno)

$$\bar{I}_{1D} = \frac{\bar{E}_1 + \bar{V}_{O'O}}{\dot{Z}_{1D}}$$ ed analogamente per $\bar{I}_{2D}$ e $\bar{I}_{3D}$.

$\bar{I}_{3T} = \bar{I}_E + \bar{I}_{3D} + \bar{I}_3$; $\bar{I}_3 = \bar{I}_1\, e^{-j\frac{4}{3}\pi}$; $W = V I_{3T} \cos(\widehat{\bar{V}_{12}, (-\bar{I}_{3T})})$



$P = 3EI\cos\varphi$; $P_A = 3EI$; $Q = 3EI\sin\varphi$;

Vogliamo <u>misurare</u> le potenze trasportate sulla linea trifase.

Supponiamo di considerare una linea simmetrica ed equilibrata.
Vediamo l'indicazione del Wattmetro:
$W = I_X E_X \cos(\bar{E}_1, \bar{I}_1)$ (tensione stellata) dove $\cos(\widehat{\bar{E}_1, \bar{I}_1}) = \cos\varphi$ e

dunque $W = EI\cos\varphi$. Naturalmente sbaglierei collegando la voltmetrica alla linea 2 o alla 3, poiché in tal caso non avrei più la tensione stellata.

Naturalmente mettendo un voltmetro ed un amperometro mi posso calcolare la potenza apparente. Dalle due potenze posso ricavare il fattore di potenza. Naturalmente posso calcolarmi anche il modulo della potenza reattiva (ma non posso specificare il segno a meno che non mi sia riferita un'ulteriore informazione sulla natura del carico e dalla).

Se il sistema è ancora simmetrico ed equilibrato, ma a tre fili, sono un po' in difficoltà perché non so dove collegare il secondo terminale della voltmetrica. Consideriamo un qualsiasi carico trifase equilibrato e di tipo stellare con impedenze qualunque. Naturalmente io non voglio disturbare la rete e dunque prenderò tre impedenze di modulo elevato. Su ciascuno dei lati della stelletta si ha la medesima tensione della stella (creazione di una stella artificiale, o tecnica del centro stella artificiale). e il centro stella del carico è equipotenziale col centro stella di quella

Consideriamo ora gli errori d'inserzione.

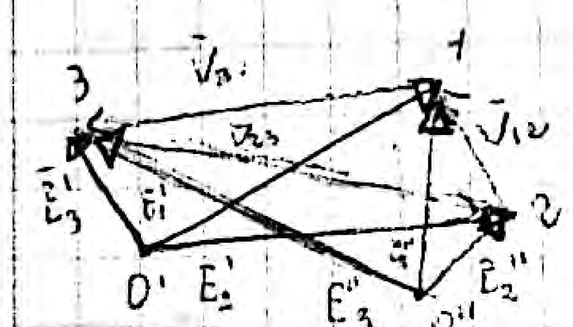
Per tenerne conto dovremo scegliere tre impedenze (per il centro-stella artificiale). Ora detta $\dot{Z}_v$ l'impedenza della voltmetrica o è infinita/limitata (ed il carico totale ~~diventa~~ è sì equilibrato, ma impossibile da realizzare fisicamente), oppure $\dot{Z}_v$ è limitata ed il carico totale è squilibrato (in quanto l'impedenza del voltmetro si colloca in parallelo

della stelletta). Il punto O non è più equipotenziale con la stelletta, in quest'ultimo caso. Buttiamo allora via una delle tre impedenze e al posto delle altre due che avevamo un valore uguale, ma arbitrario, ne mettiamo altre due con le medesime impedenze di quella del Wattmetro.

Supponiamo ora che il sistema ~~sia non~~ simmetrico oppure non equilibrato oppure che si verifichino entrambe le circostanze.

Consideriamo per risolvere questo caso il teorema dell'indifferenza o teorema di Aron.

La somma delle tensioni concatenate è uguale a "0". Non così la somma delle stellate.



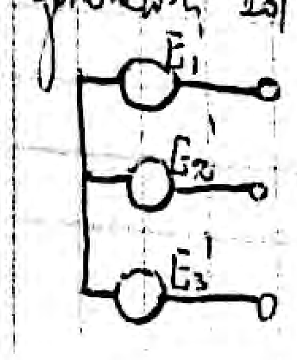
Scegliamo un punto e poniamo O'. Da O' spicchiamo tre segmenti che congiungano O' con 1, 2, 3.

Risulta per ogni E_i':

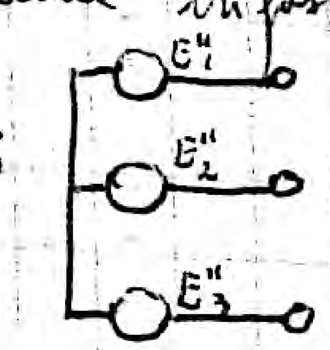
$$\begin{cases} \bar{V}_{12} = \bar{E}_1' - \bar{E}_2' \\ \bar{V}_{23} = \bar{E}_2' - \bar{E}_3' \end{cases} \rightarrow \bar{V}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1$$

Ripetendo lo stesso discorso, in un punto O''

Diamone un'interpretazione circuitale. Prendiamo una stella di tre generatori ed alimentiamo con essa la linea trifase

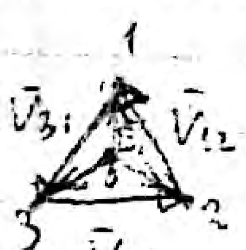


Se considero la stella:



la linea non si accorge di quale di queste stelle la sta alimentando
e dunque assorbirà le stesse potenze per ogni stellata. Tutto ciò vale rispetto le condizioni viste

Supponiamo che la terna delle tensioni concatenate sia simmetrica. Andando a prendere tra tutti i punti dello spazio il baricentro del triangolo, i tre vettori che spiccherò avranno la stessa lunghezza, il che mi consentirà (poichè il triangolo è equilatero) di dire che la terna che viene fuori è una terna simmetrica (ed è anche l'unica tale).



Bisogna ... delle terne stellate formano loro angoli di 120° ...

Se le concatenate sono simmetriche esistono infinite stellate non simmetriche che le reggono ed una che è senz'altro simmetrica. Viceversa se le concatenata non è simmetrica, non esiste alcuna stellata simmetrica che le regga.

Solo i carichi equilibrati scaricano su loro tre lati le tre tensioni dell'unico sistema simmetrico. Quindi solo se le impedenze sono eguali ottengo un sistema simmetrico. In pratica posso immaginare il sistema alimentato da infinite stellate non equilibrate, e se il carico è equilibrato esiste una stellata equilibrata.

In ogni caso,
Posso calcolare la potenza fornita dal generatore al posto di quella ~~fornita~~ assorbita dal circuito. Le correnti I_1, I_2, I_3 non cambiano col cambiare della stellata dei generatori.

$$\dot N_{ac} = \dot N_{gE'_j} = \bar E'_1 \check I_1 + \bar E'_2 \check I_2 + \bar E'_3 \check I_3 = \bar E''_1 \check I_1 + \bar E''_2 \check I_2 + \bar E''_3 \check I_3 + \bar V_{0''0'}(\check I_1 + \check I_2 + \check I_3) =$$

(dove O'' è il punto ... $\bar V_{0''0'}$)

Difatti consideriamo il vettore $V_{0''0'}$:

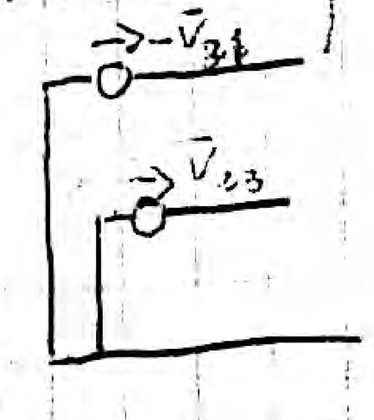
$$\begin{cases} \bar E'_1 = \bar E''_1 + \bar V_{0''0'} \\ \bar E'_2 = \bar E''_2 + \bar V_{0''0'} \\ \bar E'_3 = \bar E''_3 + \bar V_{0''0'} \end{cases}$$

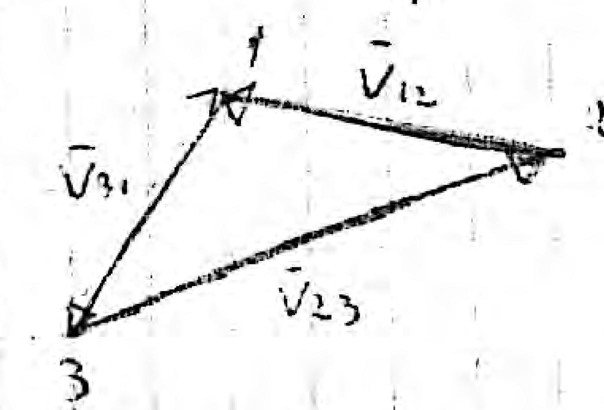
Cioè due terne che reggono le stesse concatenate differiscono per un'operazione di somma con uno stesso vettore.

Inoltre la somma delle correnti (e quindi anche quella delle loro coniugate) è uguale a 0.

Scegliendo poi come punto O'' uno dei punti 1, 2 o 3 (ad esempio 3) si ha:

$$\begin{cases} \bar E'_1 = \bar V_{13} = -\bar V_{31} \\ \bar E'_2 = \bar V_{23} \\ \bar E'_3 = 0 \end{cases}$$

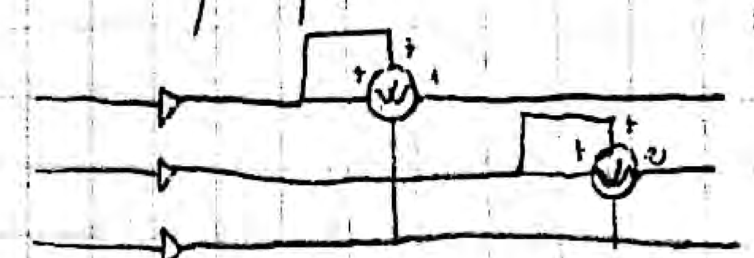




È dunque per questa scelta la $\dot N_{ac} = \bar V_{13} \check I_1 + \bar V_{23} \check I_2 + 0 =$

$$= V_{13} I_1 \cos(\widehat{\bar V_{13} \bar I_1}) + V_{23} I_2 \cos(\widehat{\bar V_{23} \bar I_2}) + j(V_{13} I_1 \sin(\widehat{\bar V_{13} \bar I_1}) + V_{23} I_2 \sin(\widehat{\bar V_{23} \bar I_2})) = P + jQ$$

e dunque posso misurare la potenza in questo modo:

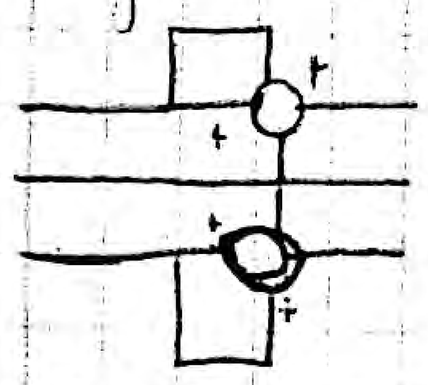


Questi due Wattmetri rilevano proprio i due addendi cercati. L'inserzione così realizzata si chiama "Inserzione Aron". Essa consente di calcolare la potenza attiva assorbita dalla linea in sistemi comunque squilibrati e dissimmetrici.

Per calcolare la potenza reattiva mi occorrerebbe uno strumento analogo al Wattmetro che però al posto di considerare il cos dell'angolo di sfasamento tenesse conto del seno dello stesso angolo. Un tale tipo di strumento esiste ed ha il nome di VARmetro, ma sono scarsamente utilizzati a motivo della loro imprecisione.

Notiamo che l'inserzione realizzata prima non è l'unica possibile.

Scegliendo ad esempio la linea 2 come riferimento si avrebbe:



$E_2 = 0$; Naturalmente i singoli Wattmetri daranno misure differenti, ma la loro somma in ogni caso sarà uguale.

Riprendiamo ora a considerare un sistema <u>simmetrico</u> ed <u>equilibrato</u>.

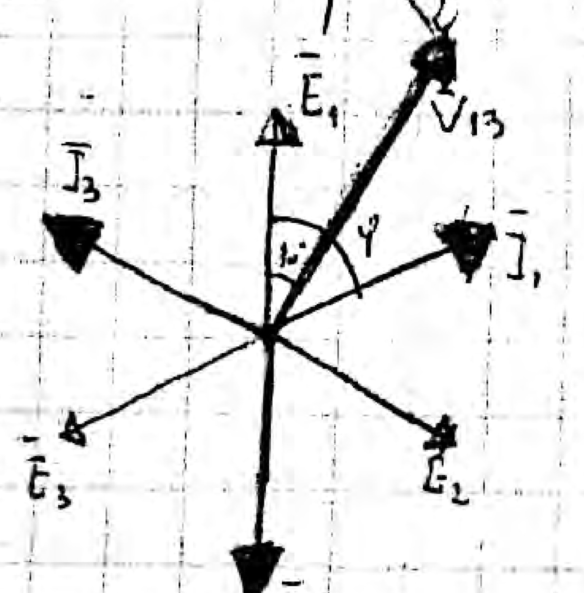
Consideriamo la differenza tenendo conto del fatto che $\begin{cases} V_{13} = V_{23} = V & \text{per la simmetria} \\ I_1 = I_2 = I & \text{per l'equilibrio} \end{cases}$

$$W_1 - W_2 = V_{13} I_1 \cos(\widehat{\bar{V}_{13}\bar{I}_1}) - V_{23} I_2 \cos(\widehat{\bar{V}_{23}\bar{I}_2}) = VI\left[\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= VI\left[\left(\cos\varphi \cos\frac{\pi}{6} + \sin\varphi \sin\frac{\pi}{6}\right) - \left(\cos\varphi\cos\frac{\pi}{6} - \sin\varphi \sin\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 2\,VI \sin\varphi \cdot \frac{1}{2} = VI \operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}\, Q$$

(Ricordando che $Q = 3EI \operatorname{sen}\varphi$ e che $E = \sqrt{3}\,V$)

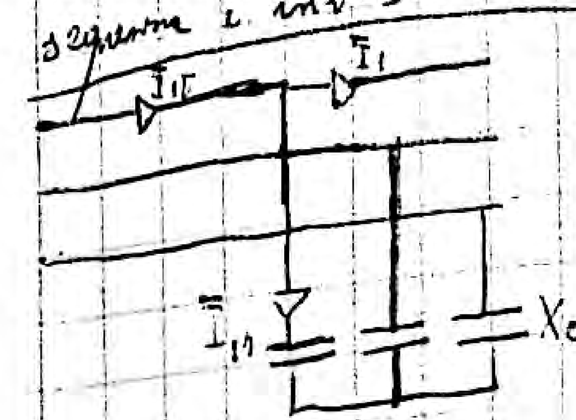


Ed abbiamo così <u>calcolato</u> anche la potenza reattiva (<u>calcolata</u>, non <u>misurata</u>).

Se avessi inserito i Wattmetri sulle linee 2 e 3 avrei dovuto fare $W_2 - W_3$ mentre per le linee 3 ed 1 si sarebbe scelto $W_3 - W_1$. Ciò naturalmente per i sistemi simmetrici e sequenza diretta, cioè se la seconda componente è in ritardo rispetto la prima, etc.

Quest'inserzione consente anche l'individuazione del tipo di sequenza (a patto di conoscere la natura del carico e viceversa). Supponiamo di non conoscere la sequenza. In questo caso non so se fare $W_1 - W_2$ oppure $W_2 - W_1$. Devo dunque stabilire il tipo di sequenza. Se non so cosa c'è e viceversa il problema non ammette soluzione.

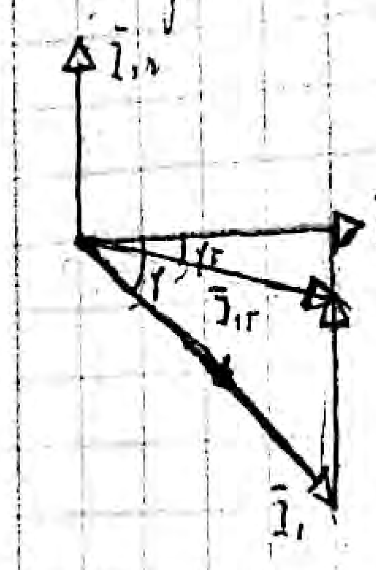
Supponiamo invece di sapere che il carico sia di tipo ohmico-induttivo, allora se $W_1 - W_2$ è positivo la sequenza è diretta, se è negativo la sequenza è inversa. Viceversa se il carico è ohmico-capacitivo.



$P = 3EI\cos\varphi$

Abbiamo visto che al crescere del fattore di potenza crescono le potenze assorbite sulla linea e dunque per rimediare si provvede al rifasamento della linea.

Analogamente si procede nel caso trifase.



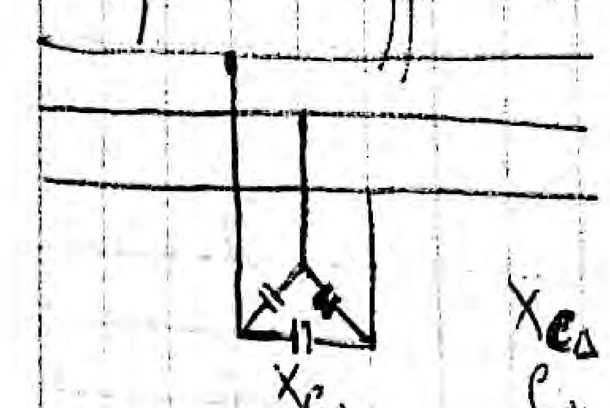
L'utente può più precisamente collocare dei capacitori sulla linea in modo tale da assorbire potenza reattiva negativa ed equilibrare la potenza reattiva assorbita dal carico induttivo (se il carico è ad esempio un motore). Naturalmente:

$$\bar{I}_{1\gamma} = \frac{\bar{E}_1}{-jX_c} = j\bar{E}_1\omega C \text{; e come si vede dalla figura: } I_1\cos\varphi = I_{1T}\cos\varphi_T$$

$$\text{Da cui: } I_{1\gamma} = (I_1 \operatorname{sen}\varphi - I_{1T}\operatorname{sen}\varphi_T) = I_1 \operatorname{sen}\varphi - I_1 \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_T}\operatorname{sen}\varphi_T = I_1\cos\varphi\,[\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_T];$$

$$C = \frac{1}{\omega E} I_{1\gamma} = \frac{I\cos\varphi}{\omega E}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi') = \frac{P}{3\omega E^2}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')$$

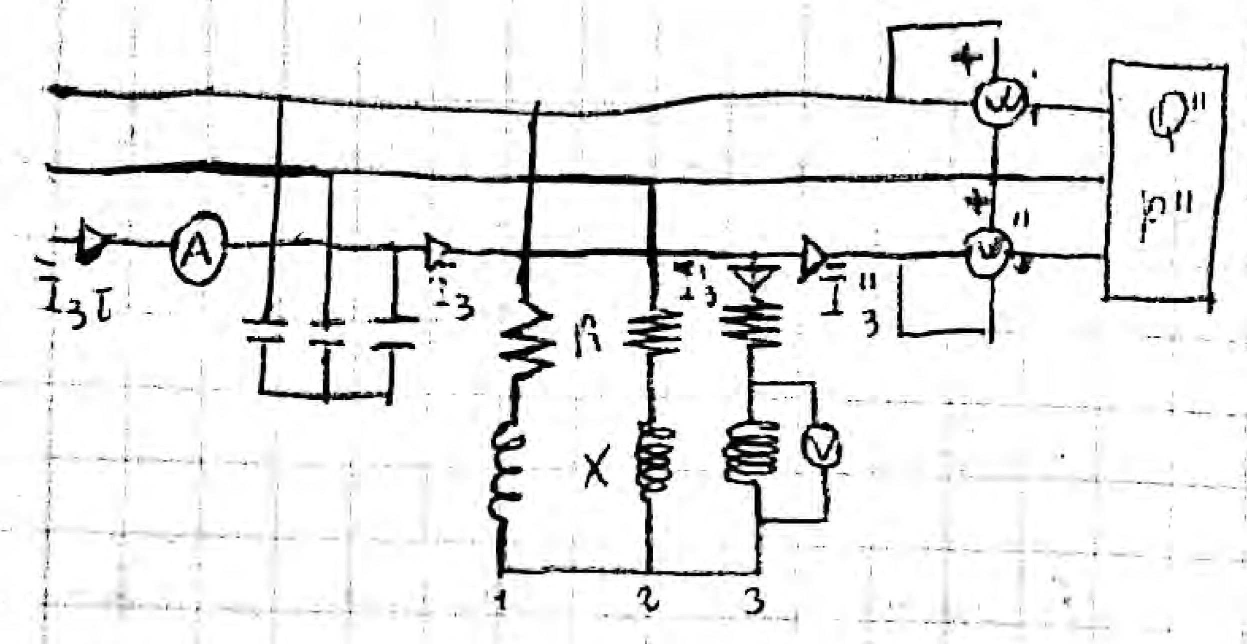
Si potrebbe effettuare il rifasamento con un triangolo al posto della stella.



$X_{C\Delta} = 3X_c$

$C_\Delta = \frac{C}{3}$

In questo caso servirebbero dei condensatori di capacità più piccola. La cosa dunque potrebbe per ragioni economiche far preferire quest'ultima configurazione. Siccome però il costo del condensatore dipende anche dalla tensione massima che è capace di sopportare, e aumentando questa nella concatenata di $\sqrt{3}$ volte, si sceglierà di volta in volta la configurazione più economica. Precisamente, non essendo il costo semplicemente proporzionale alla tensione stabilita, ma aumentando notevolmente oltre certi valori, si preferisce la seconda conf. a tensioni medio-basse, e la stella ad alte tensioni.



Carico Ohmico-Induttivo

$V = 500\,V$
$R = X = 50\,\Omega$
$W' = 10.000$
$W'' = 20000$

Vogliamo conoscere l'indicazione dell'amperometro ed effettuare un rifasamento ~~totale~~ del sistema. Calcoliamo la differenza percentuale dell'amperometro (sperando che segni di meno, indice questo del fatto che abbiamo veramente rifasato la rete).

Scelta arbitraria: $\bar I'_3 = I' e^{j0} = 10$ in quanto $I'_3 = I' = \frac{V}{X} = \frac{500}{50} = 10$

Si badi che $\bar V = jX \bar I'_3 = 500j$ e dunque $\bar V$ ha un argomento ($\frac{\pi}{2}$) coerente con quello scelto di $\bar I'_3$.

$\bar E_3 = \bar V_{30} = (R + jX)\bar I'_3 = 50\sqrt2\, e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot 10 = 500\sqrt2\, e^{j\frac{\pi}{4}}$

(questo non è la corrente ma la caduta di tensione sull'induttore)

$P'' = W' + W''$; (Questa è la potenza assorbita a valle della sezione ove sono gli strumenti)
$P'' = 3 \cdot 10^4$;

$Q'' = \sqrt3\,(W'' - W') = 1 \cdot 10^4 \sqrt3$
(Si badi al segno che deve essere positivo essendo il carico ohmico-induttivo)

$\varphi'' = \operatorname{arctg} \frac{Q''}{P''} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt3}{3} = \frac{\pi}{6}$; $\bar I''_3 = I'' e^{j(\arg \bar E_3 - \varphi_2)} = 16.3\, e^{j(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})} = 16.3\, e^{j\frac{\pi}{12}}$

$I'' = \frac{P''}{3E\cos\varphi} = \frac{3 \cdot 10^{4}}{3 \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot \sqrt2 \cdot \frac{\sqrt3}{2}} = \frac{\sqrt2}{\sqrt3} \cdot \frac{1}{5} \cdot 10^2 = \frac{2\sqrt2}{\sqrt3} \cdot 10 \simeq 16.3$

$\bar I_3 = \bar I'_3 + \bar I''_3 = 10 + 16.3 \cos\frac{\pi}{12} + 16.3\, j \sin\frac{\pi}{12} \simeq 25.7 + 4.2j \simeq 26\, e^{j\frac{\pi}{30}}$

$I = 26$ $\quad \varphi = \arg \bar E_3 - \arg \bar I_3 \simeq 36°$ $\quad P' = \begin{cases} 3RI'^2 = 3 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10^2 = 1.5 \cdot 10^4 \\ 3EI\cos\varphi = 14873 \simeq 1.5 \cdot 10^4 \end{cases}$

Supposto $\omega = 2\pi\nu = 2\pi\, 50$;
dove ν è la frequenza che per i regimi industriali ha il valore di 50 Hz;
Volendo rifasare a 0.9, si avrà: $\operatorname{tg}(\arccos 0.9) = 0.5$

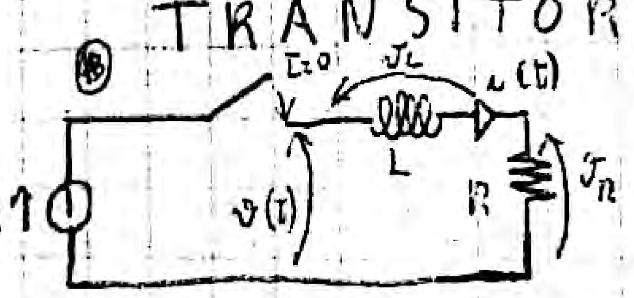
$C = \frac{P}{3\omega E^2}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi') = \frac{1.5\,(10^4)(0.72 - 0.5)}{3 \cdot 3.14 \cdot 10^2 \cdot 25 \cdot 10^4} = 7.0 \cdot 10^{-6}\,F = 7\,\mu F$;

$\bar I_{3\pi} = \frac{\bar E_3}{-j\frac{1}{\omega C}} = j\, 3.14 \cdot 10^2\, e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot 5\sqrt2 \cdot 10^2 \cdot 7 \cdot 10^{-6} = 1.5\, j\, e^{j\frac{\pi}{4}}$,

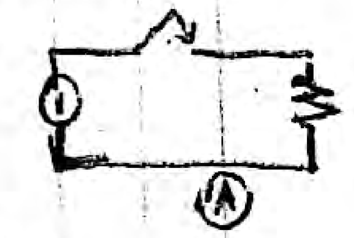
$\bar I_{3T} = 26\, e^{j\frac{\pi}{30}} + 1.5\, j\, e^{j\frac{\pi}{4}} = 25.7 + 4.2j + 1.06j - 1.06 = 25.2\, e^{j\frac{\pi}{15}}$

quindi la variazione di corrente è $\Delta I\% = \frac{25.2 - 26}{26} \cdot 100 \simeq 3\,\%$;

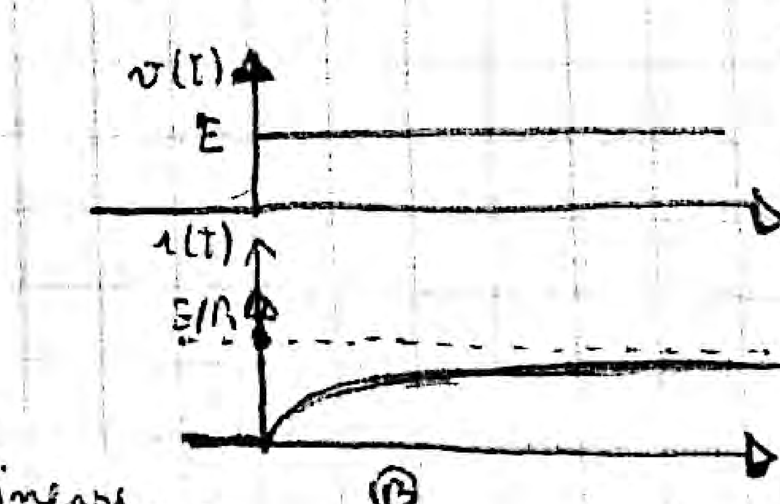
TRANSITORI

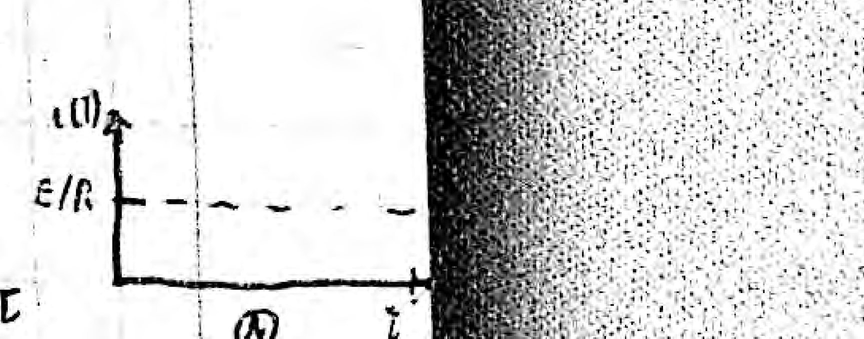


$\begin{cases} v(t) = 0 & t < 0 \\ v(t) = E & t > 0 \\ i(t) = 0 & t < 0 \end{cases}$ Queste sono le condizioni iniziali.



(A) $\boxed{v(t) = E = R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt}}$ $\quad t > 0$





L'operatore è sempre lineare.
Se R(t) invece l'operatore sarebbe tempo-variante, ma comunque lineare.
Se fosse $R = R(i)$ l'op. non sarebbe lineare.

$i(t) = i_g(t) + i_p(t)$ $\quad \begin{cases} i_p(t): \text{integrale particolare}; \\ i_g(t): \text{integrale generale}; \end{cases}$