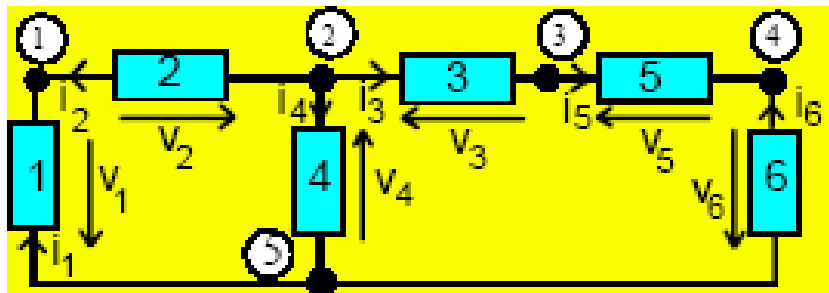


Formulazione matriciale dei problemi circuitali

Verranno ora richiamate alcune nozioni di teoria dei grafi e presentate alcune possibili formulazioni dei problemi circuitali utili per ricavare in maniera generale ed automatica le equazioni risolventi di un dato circuito elettrico, statico oppure dinamico. Il modello matematico cui si perviene sarà costituito, a seconda dei casi, da un sistema di equazioni algebriche o differenziali e le metodologie per la sua soluzione numerica costituiranno l'oggetto dei capitoli successivi.

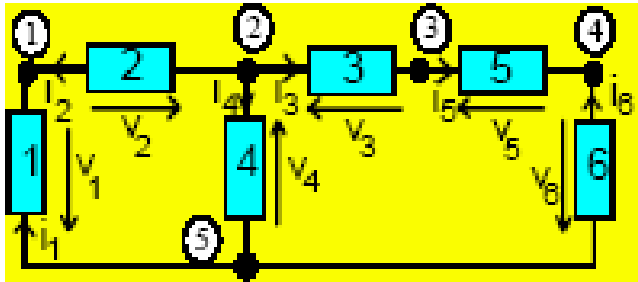
RICHIAMI DI CONCETTI FONDAMENTALI DI ELETTROTECNICA

Si è visto nei corsi di elettrotecnica che la teoria dei circuiti si basa essenzialmente su (facciamo riferimento per semplicità al solo caso di reti di bipoli, ma il discorso si estende facilmente alle reti formate da componenti generici):

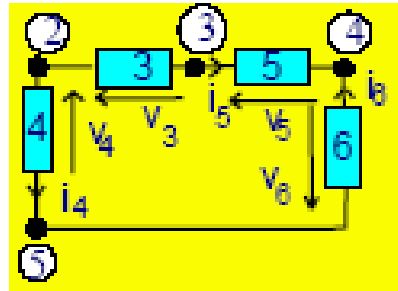
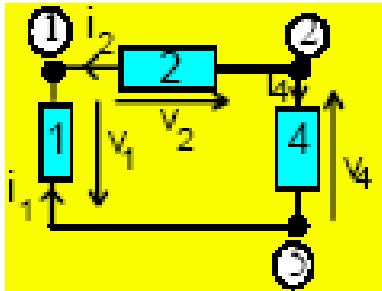


Il modello circuitale (le equazioni che descrivono il funzionamento del circuito) è costituito da:

- Leggi di Kirchhoff per le correnti (LKC)
- Leggi di Kirchhoff per le tensioni (LKT)
- Relazioni caratteristiche (legami tra tensioni e correnti dei componenti)



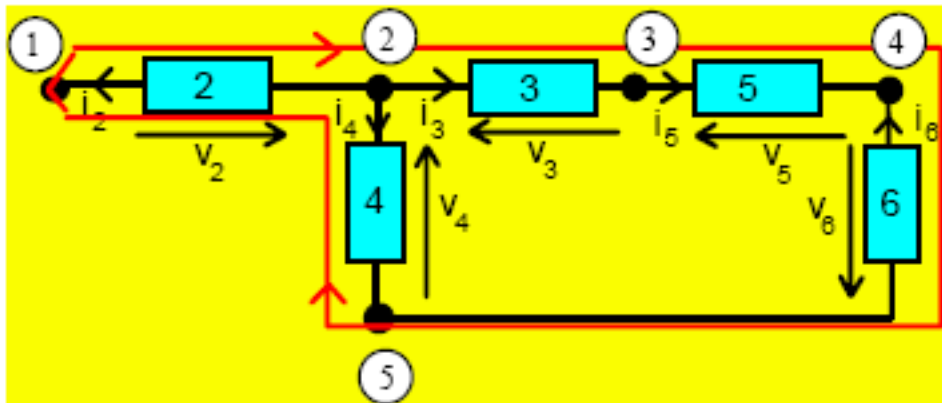
Nodo: giunzione fra due o più terminali.



Maglia: cammino chiuso che si svolge sui lati (i bipoli) del circuito avente inizio e termine nello stesso nodo ed in cui due e solo due lati incidono in ciascun nodo.

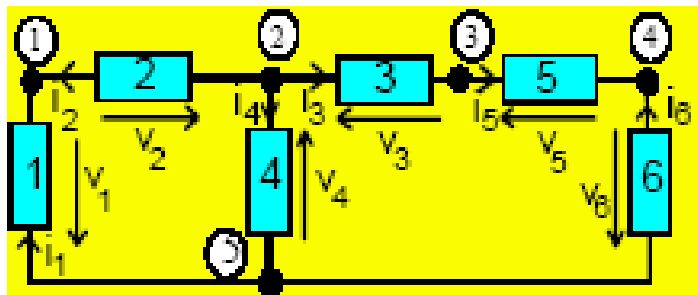
Possibili maglie

Cammino chiuso che non costituisce una maglia



Le leggi di Kirchhoff per i circuiti

Legge di Kirchhoff per le correnti (LKC): in ogni nodo la somma algebrica delle correnti è uguale a zero in ogni istante.



Al nodo 2:

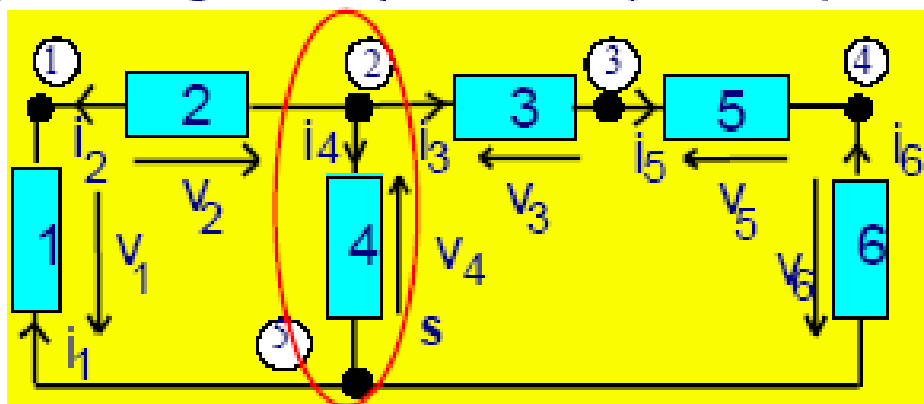
$$i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

Al nodo 5:

$$i_1 - i_4 + i_6 = 0$$

Fissato ad arbitrio il riferimento per il verso della corrente su ogni bipolo, si considerano con il segno + le correnti entranti nel (uscenti dal) nodo e con il segno - quelle uscenti (entranti).

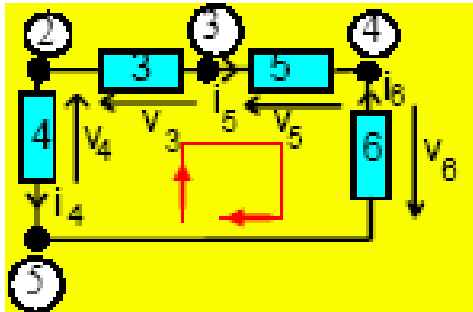
La LKC può essere formulata anche per superfici che comprendono più nodi: tale superficie (la *S* in figura) non deve però mai tagliare la superficie limite (l'involucro) dei bipoli.



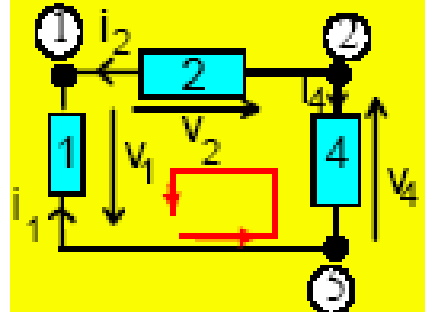
Sulla superficie *S* (che include i nodi 2 e 5):

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_6 = 0$$

Legge di Kirchhoff per le tensioni (LKT): per ogni maglia di un circuito la somma algebrica delle tensioni è, in ogni istante, uguale a zero.

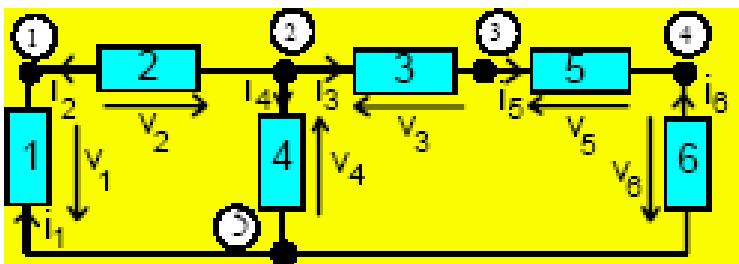


$$v_4 - v_3 - v_5 + v_6 = 0$$



$$v_4 - v_2 + v_1 = 0$$

Fissato su ogni bipolo il riferimento per la tensione, si considera con il segno + la tensione che si incontra concordemente al verso di percorrenza della maglia e con il segno - quella che si incontra in verso opposto.



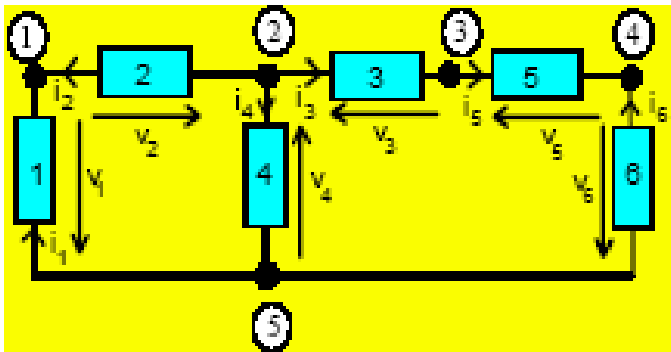
Legge di Kirchhoff per le correnti (LKC): se ne possono scrivere tante quanti sono i nodi.

Legge di Kirchhoff per le tensioni (LKT): se ne possono scrivere tante quante sono le maglie.

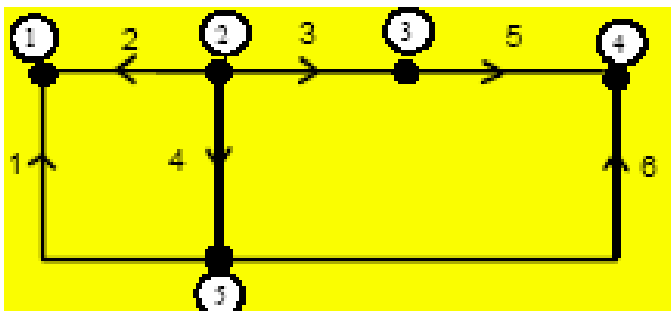
Una equazione di un sistema si dice indipendente quando non contiene informazioni già contenute in altre equazioni del sistema.

- Le leggi fondamentali del modello circuitale (LKC e LKT) non dipendono dalla struttura interna dei componenti, ma solo dal modo in cui essi sono collegati (topologia del circuito).
- Si tratta di equazioni lineari, algebriche ed a coefficienti costanti.
- Esiste un insieme massimale di LKC e LKT indipendenti

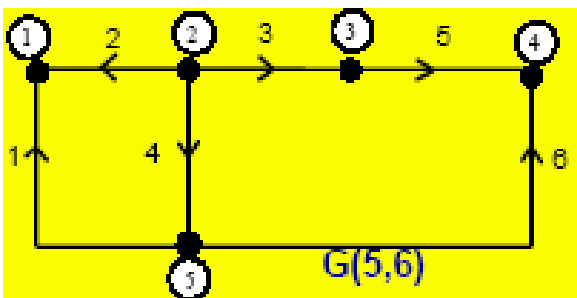
Elementi di teoria dei grafi



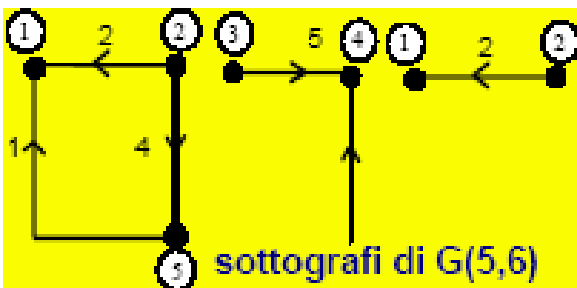
Circuito di bipoli



Grafo orientato associato al circuito



Un grafo $G(N,L)$ è l'insieme dei nodi N (1,2, ..., n), dei lati L (1,2, ..., b) e la relazione (relazione di incidenza) che ad ogni lato associa la coppia di nodi in cui incide.

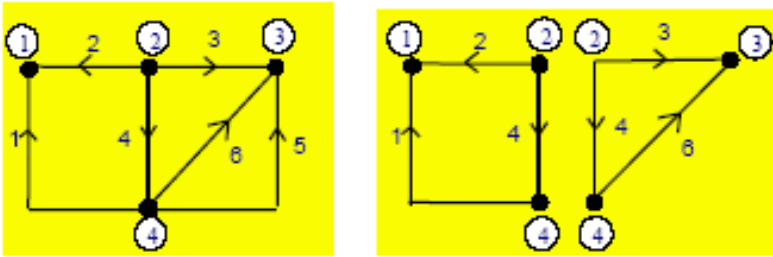


Una qualsiasi parte $G_i(N_i,L_i)$ del grafo si dice sottografo di $G(N,L)$.

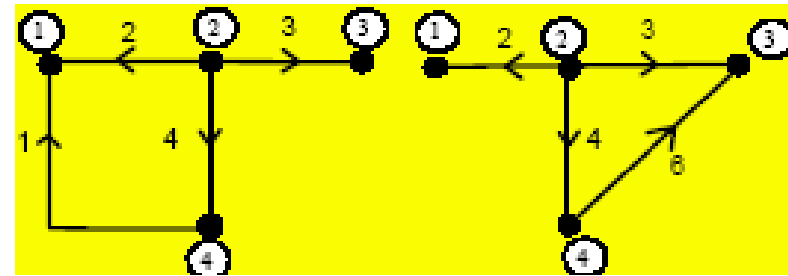
Un grafo si dice connesso se ogni nodo è collegato a qualsiasi altro nodo attraverso uno o più lati.

- Le leggi fondamentali del modello circuitale (LKC e LKT) non dipendono dalla struttura interna dei componenti: le curve e le superfici non tagliano le superfici limiti dei componenti.
- E' possibile far riferimento ad una struttura astratta geometrica, detta grafo, che descriva come sono collegati tra loro i bipoli.

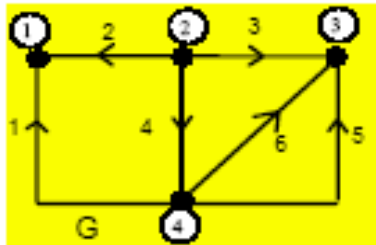
Una maglia di G è un sottografo connesso in cui in ogni nodo incidono due e solo due lati.



Possibili maglie

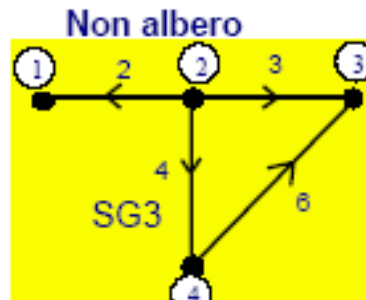
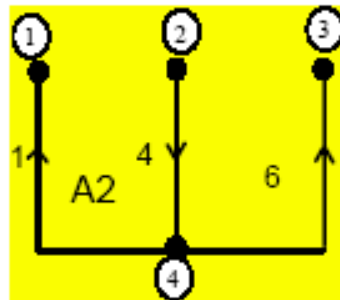
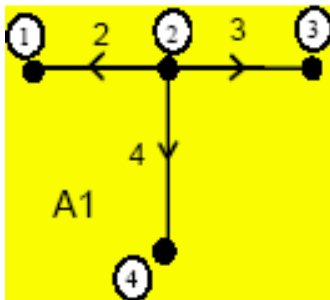


Non maglie

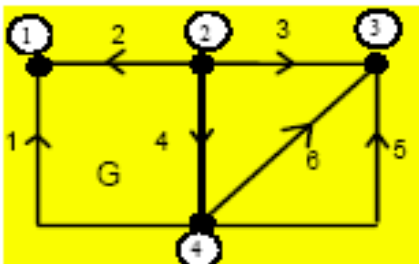


Un albero di G è un suo sottografo connesso costituito da tutti i nodi e che non contiene maglie.

Possibili alberi di G

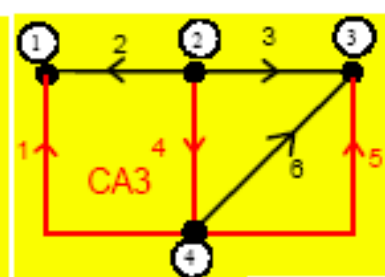
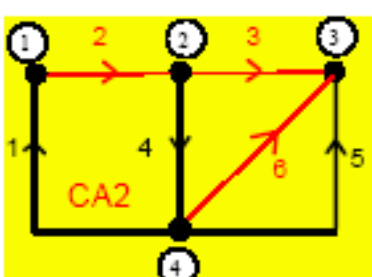
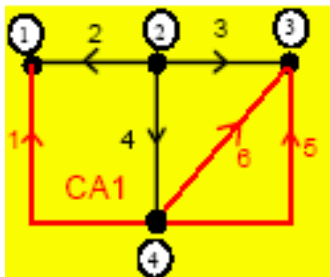


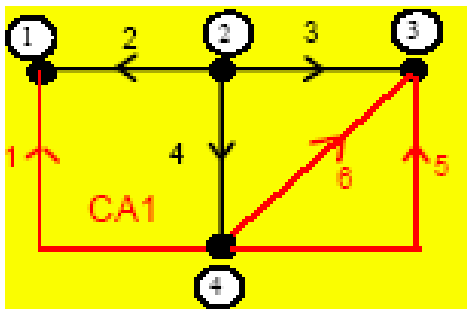
Non albero



Un coalbero di G è il sottografo complementare all'albero; esso è costituito da tutti i lati del grafo non appartenenti all'albero.

Possibili alberi (linea spessa) e corrispondenti coalberi (linea sottile) di G .





Proprietà fondamentale dell'albero: un albero di un grafo orientato avente n nodi è costituito da $n-1$ lati.

Proprietà fondamentale del coalbero: un coalbero di un grafo orientato avente n nodi e b lati è costituito da $b-(n-1)$ lati.

Si chiama maglia fondamentale una maglia ottenuta aggiungendo all'albero un qualsiasi lato del coalbero ed eliminando gli eventuali lati appesi.

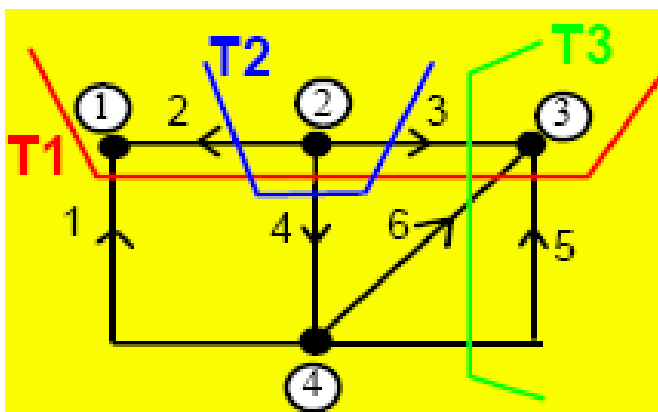
Ogni lato di coalbero appartiene e definisce una ed una sola maglia fondamentale.

Un grafo orientato (circuito) contiene $b-(n-1)$ maglie fondamentali.

Poiché una maglia fondamentale contiene un lato in esclusiva, quello appartenente al coalbero, le LKT scritte per tali maglie costituiscono un sistema linearmente indipendente.

Un insieme di taglio è un sottografo costituito da soli lati che soddisfa alle seguenti due proprietà:

- a) la rimozione dal grafo di tutti i lati dell'insieme di taglio conduce ad un grafo non connesso.
- b) la rimozione dal grafo di tutti i lati dell'insieme di taglio, tranne uno arbitrario, lascia il grafo connesso.



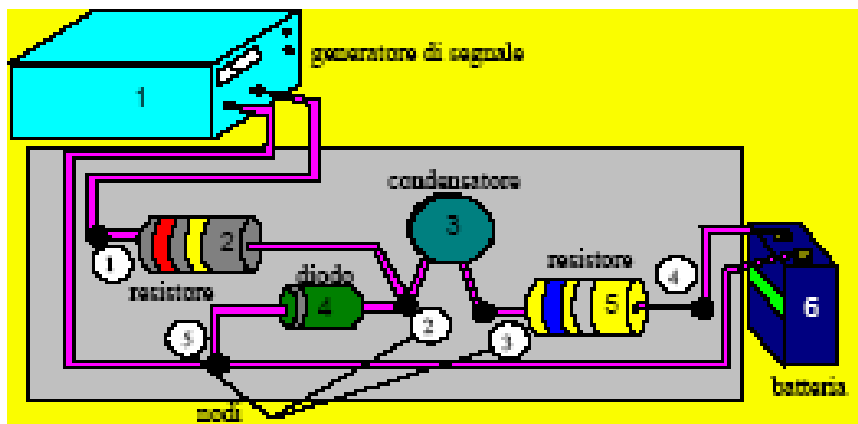
$$T1 = [1, 4, 6, 5]$$

$$T2 = [2, 4, 3]$$

$$T3 = [3, 6, 5]$$

Per T1: $-i_1 + i_4 - i_5 - i_6 = 0$

Relazioni caratteristiche dei componenti



In un circuito con n nodi e b lati si possono scrivere

- $n-1$ LKC indipendenti
- $b-n+1$ LKT indipendenti

In totale le LKC+LKT forniscono b equazioni indipendenti.

Le altre b relazioni si ricavano dalle caratteristiche dei bipoli.

Il comportamento del bipolo è descritto dalla "relazione costitutiva" che lega tensione e corrente ai morsetti.

Bipoli Fondamentali

Bipolo statico: un bipolo in cui la corrente all'istante t è legata alla tensione nello stesso istante, ovvero soddisfa all'equazione:

$$f[v(t),i(t)]=0$$

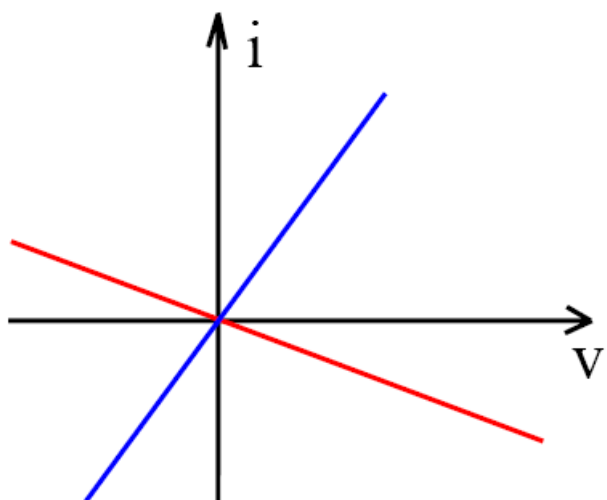
La funzione $f(v,i)=0$ è una funzione di tipo algebrico e descrive una curva nel piano $v-i$ che sarà chiamata la caratteristica del bipolo.

I bipoli statici vengono anche detti senza memoria.

Bipolo dinamico: un bipolo in cui la corrente (tensione) all'istante t^* è legato alla storia precedente per $t \leq t^*$ della tensione (corrente), ovvero soddisfa alla relazione:

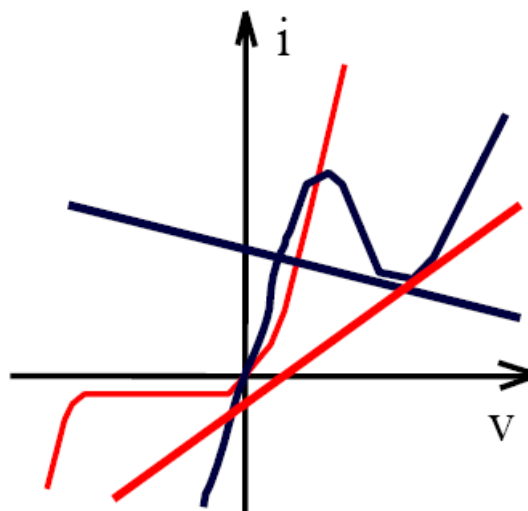
$$F[v(.),i(.)] = 0$$

Caratteristica $f(v,i)=0$ di bipoli statici
bipoli lineari



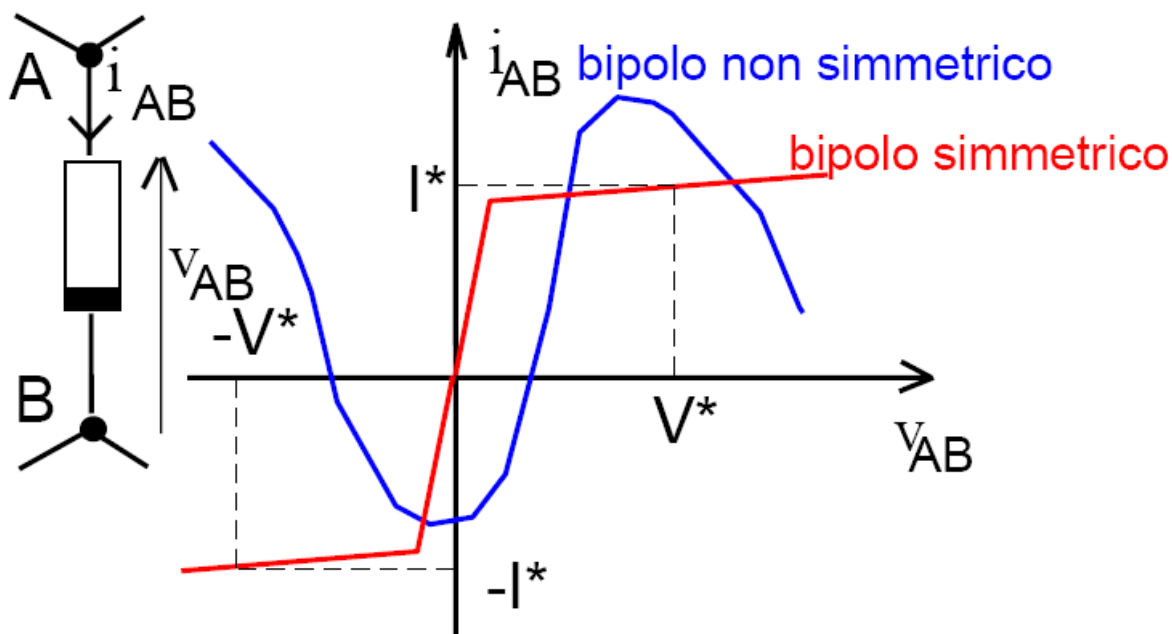
Bipolo lineare: un bipolo la cui caratteristica $f(v,i)=0$ sia una retta passante per l'origine del piano $v-i$ di equazione $v=ri$ (oppure $i=gv$).

bipoli non lineari

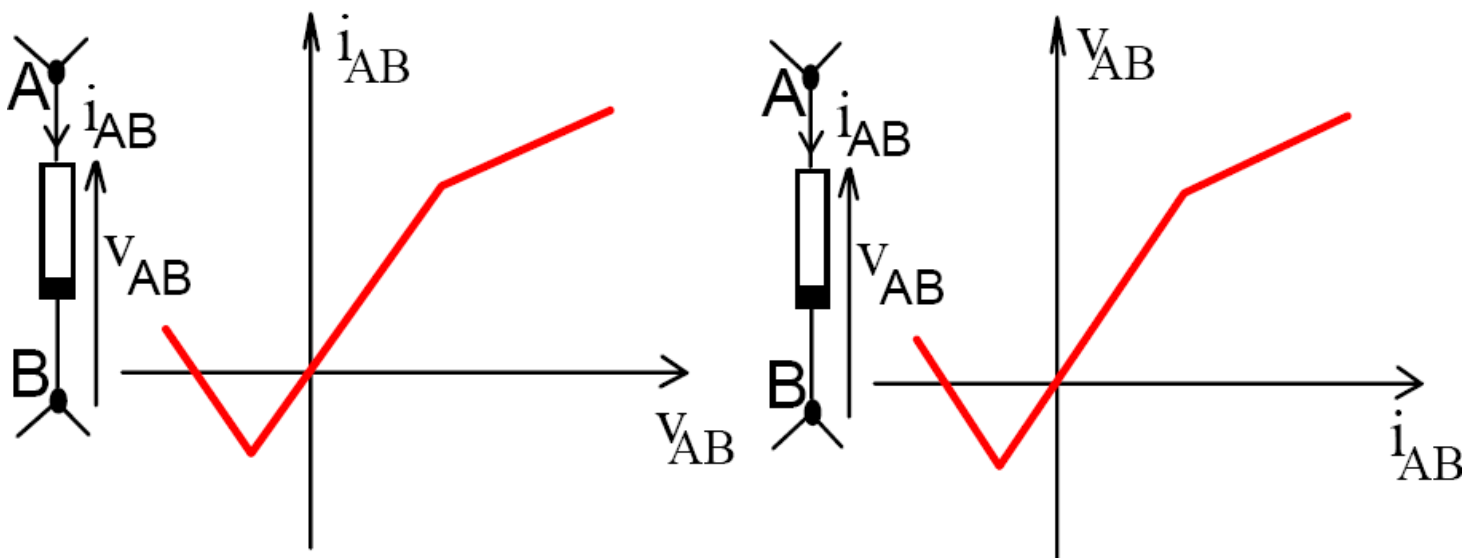


Bipolo non lineare: un bipolo la cui caratteristica $f(v,i)=0$ non sia una retta passante per l'origine del piano $v-i$.

In generale il ruolo dei due morsetti del bipolo non si può scambiare

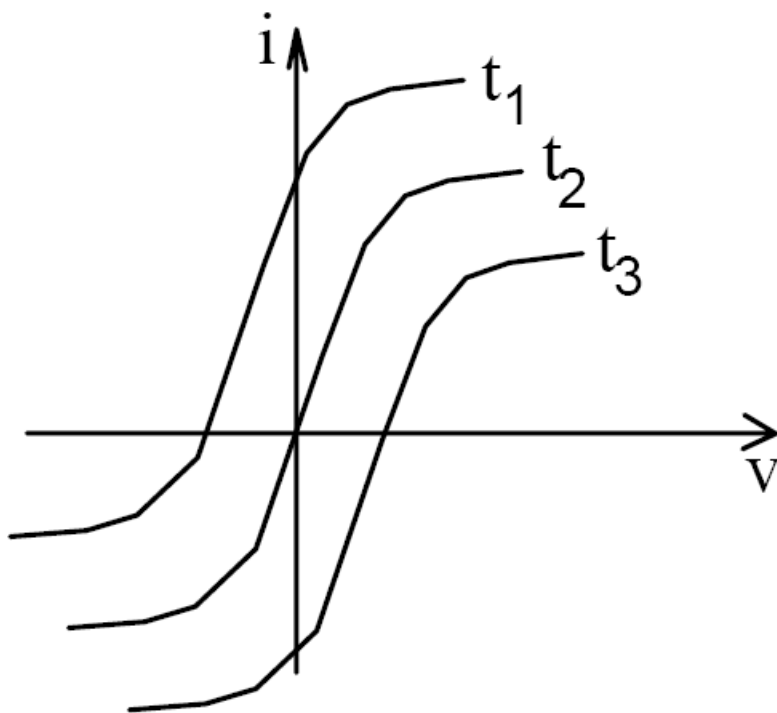


Bipolo statico simmetrico: appartengono alla curva caratteristica sia i punti (i,v) che quelli $(-i,-v)$.



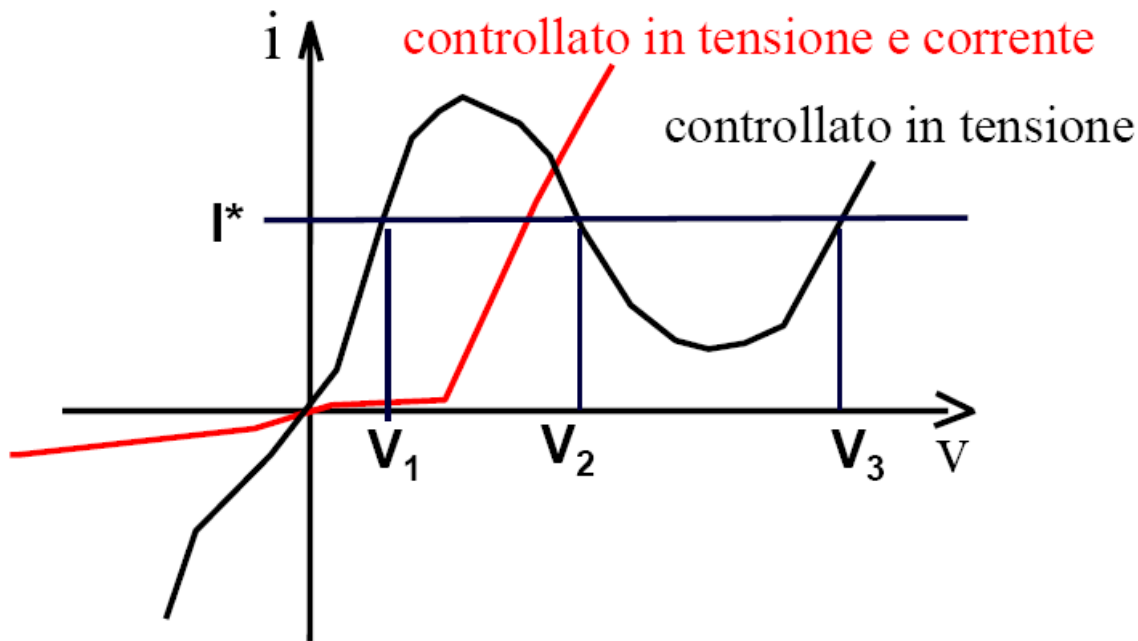
Bipoli duali: la curva caratteristica è invariante rispetto alla permutazione degli assi coordinati.

Bipoli equivalenti: bipoli che hanno la stessa caratteristica.

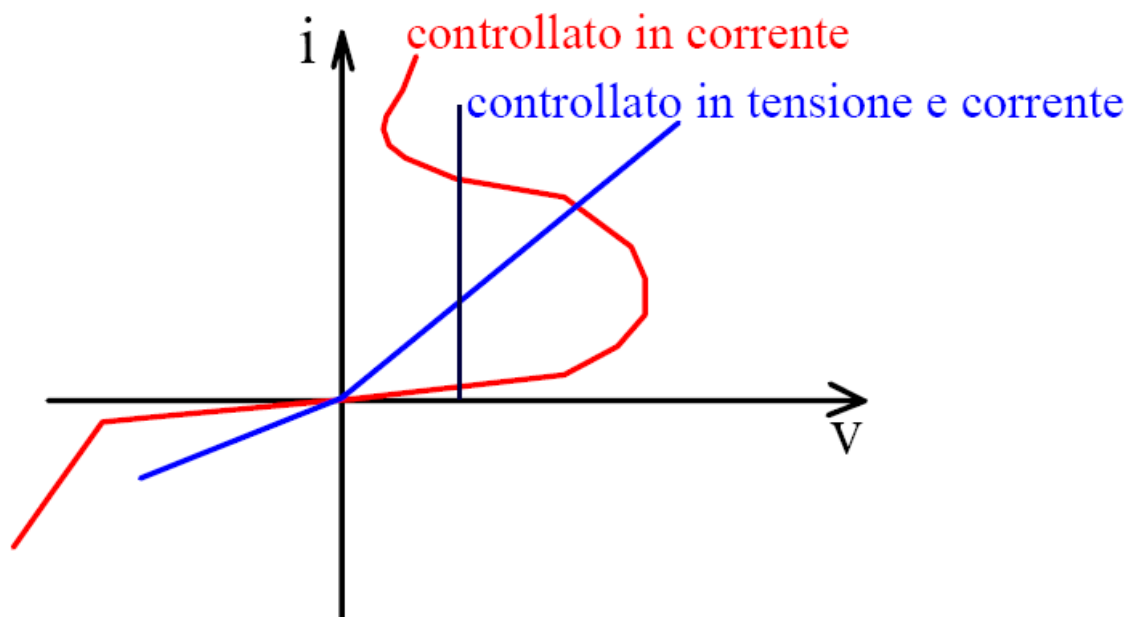


Bipolo statico tempo variante: se la curva caratteristica dipende dal tempo.

Bipolo statico tempo invariante: se la curva caratteristica non dipende dal tempo.

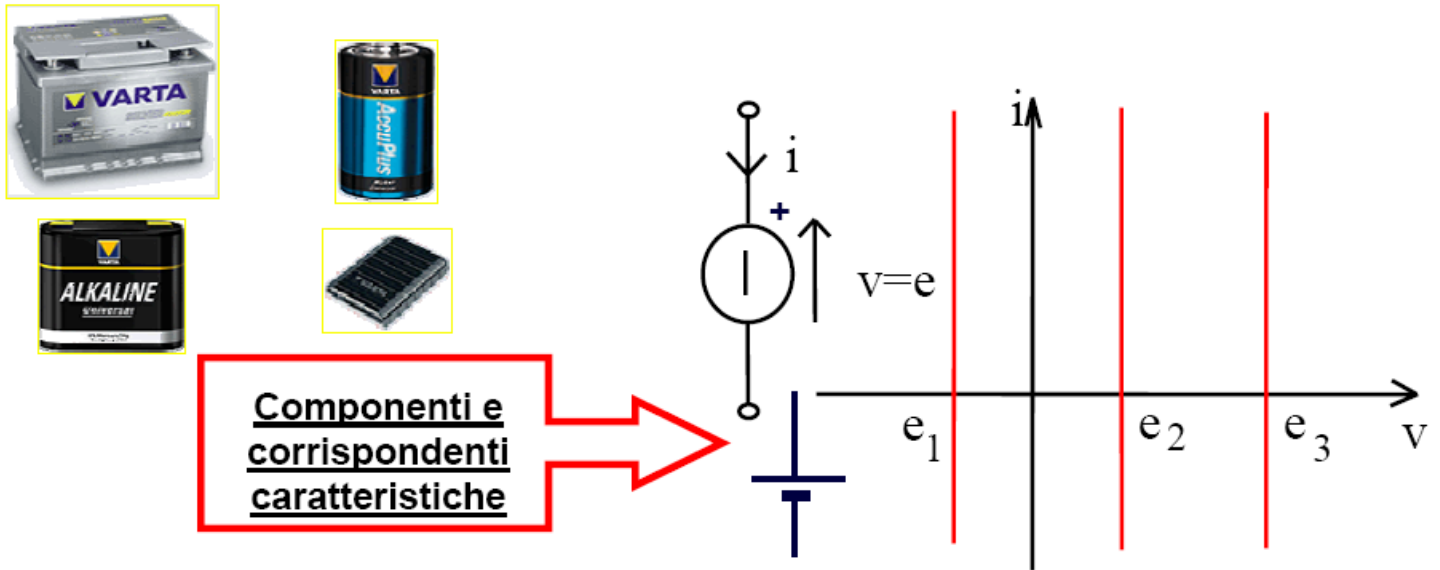


Bipolo statico controllato in tensione: se la caratteristica $f(v,i)=0$ può essere posta in forma esplicita e ad ogni valore di v corrisponde uno ed un solo valore di i : $i=g(v)$.



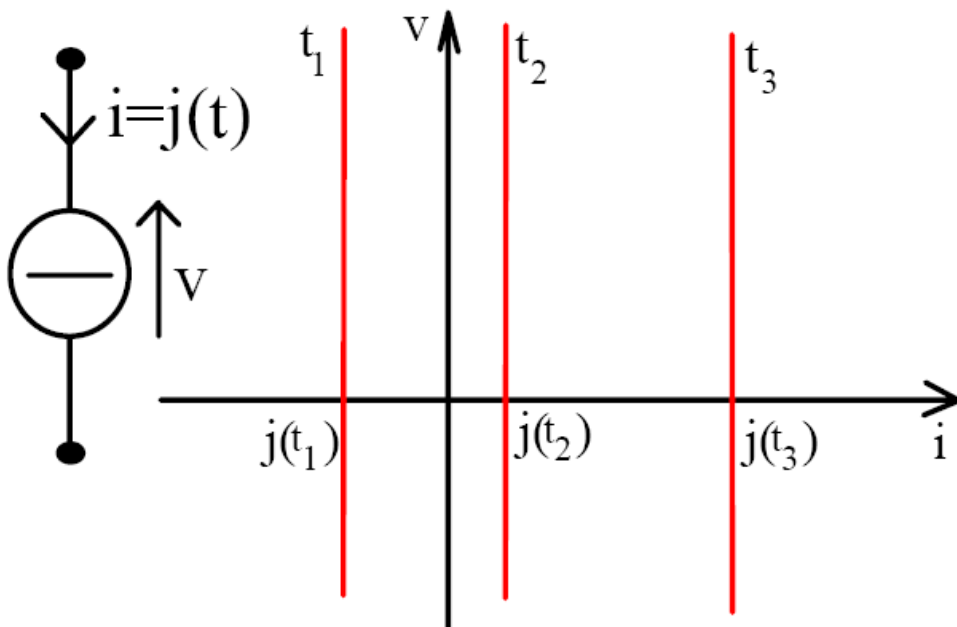
Bipolo statico controllato in corrente: se la caratteristica $f(v,i)=0$ può essere posta in forma esplicita e ad ogni valore di i corrisponde uno ed un solo valore di v : $v=r(i)$; la funzione r è in generale non lineare.

Componenti fondamentali



Generatore ideale di tensione: caratteristica: $v=e(t)$.

Componenti fondamentali



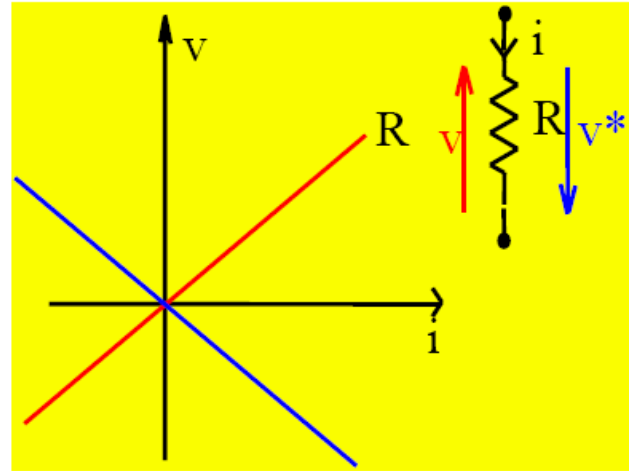
Generatore ideale di corrente
caratteristica: $i=j(t)$.

Componenti fondamentali

Resistore



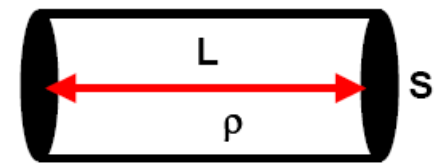
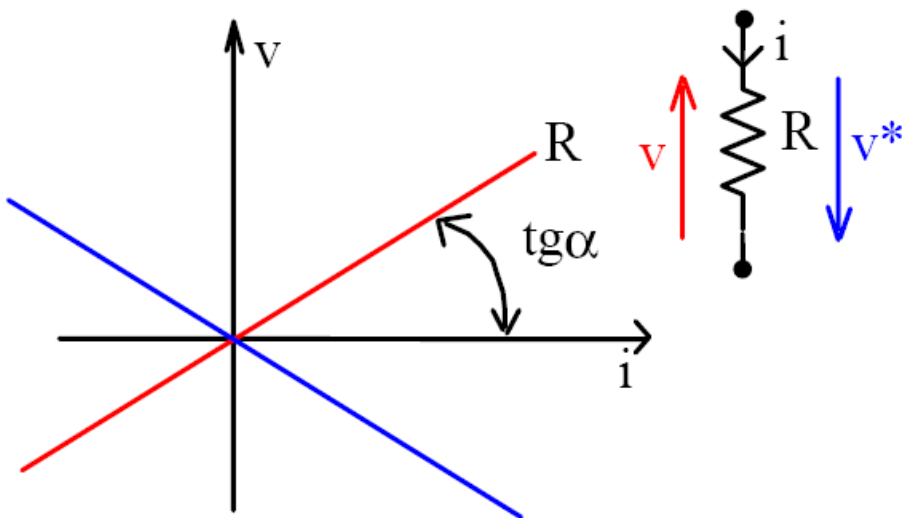
Componenti e
corrispondenti
caratteristiche



caratteristica: $v = Ri$ (legge di Ohm)

R si chiama la resistenza del componente e si misura in Ohm [Ω].

Resistore lineare

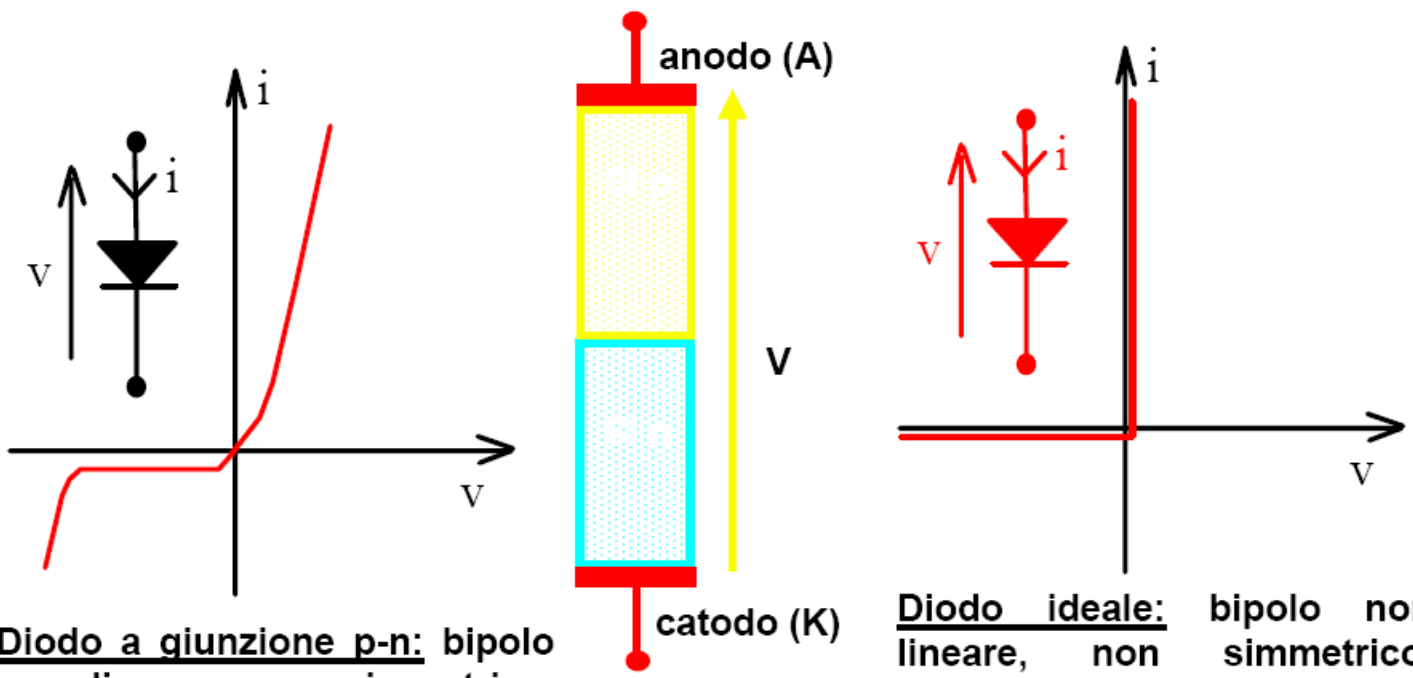


Resistenza di un
conduttore cilindrico
di resistività ρ :

$$R = \rho \cdot L/S$$

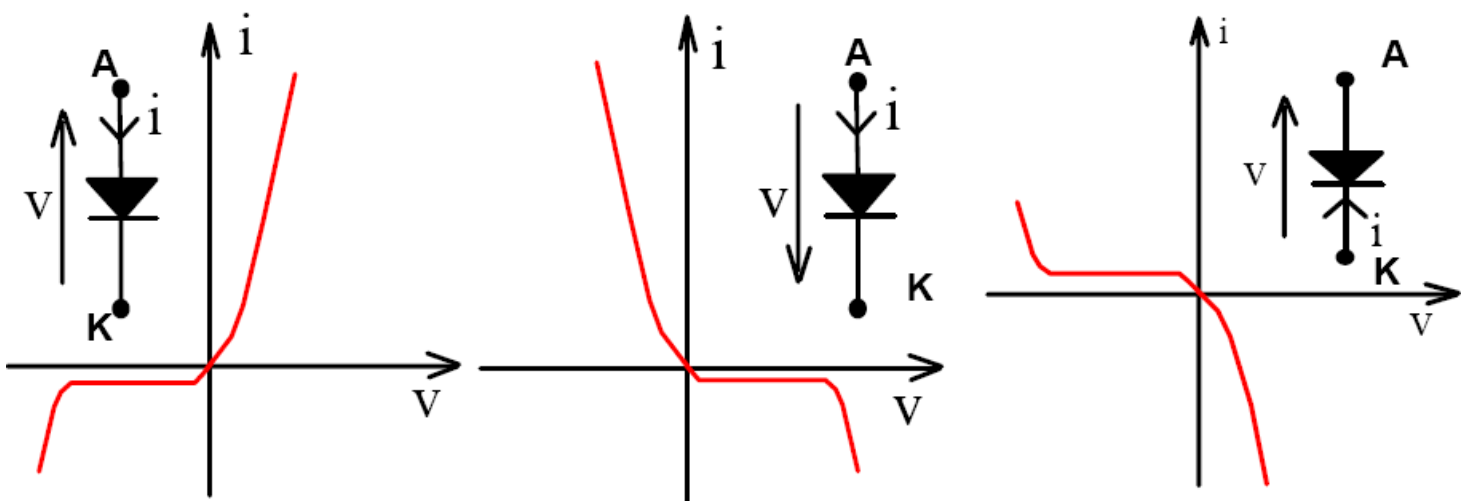
caratteristica: $v = Ri$ (conv. utilizzatore)

caratteristica: $v = - Ri$ (conv. generatore)

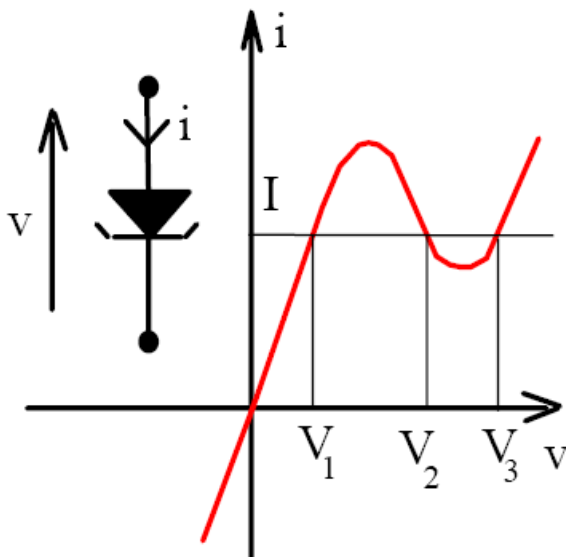


Diodo a giunzione p-n: bipolo non lineare, non simmetrico, tempo invariante, controllato in tensione ed in corrente.

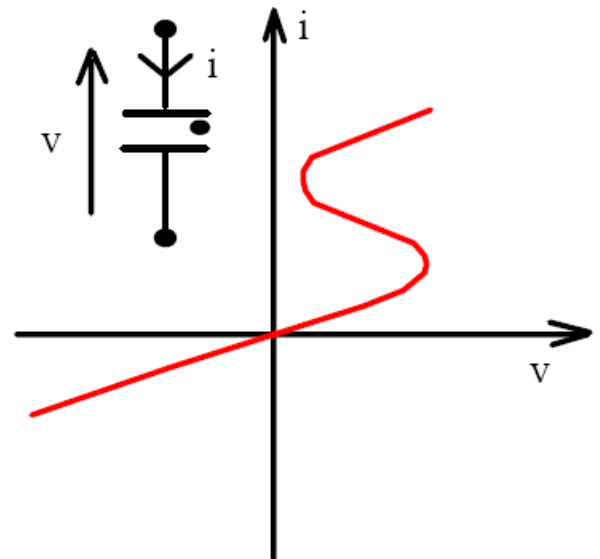
Diodo ideale: bipolo non lineare, non simmetrico, tempo invariante, controllato in tensione ed in corrente.



Caratteristica non simmetrica del diodo a giunzione p-n



Diodo tunnel: bipolo non lineare, tempo invariante, non simmetrico, controllato in tensione.



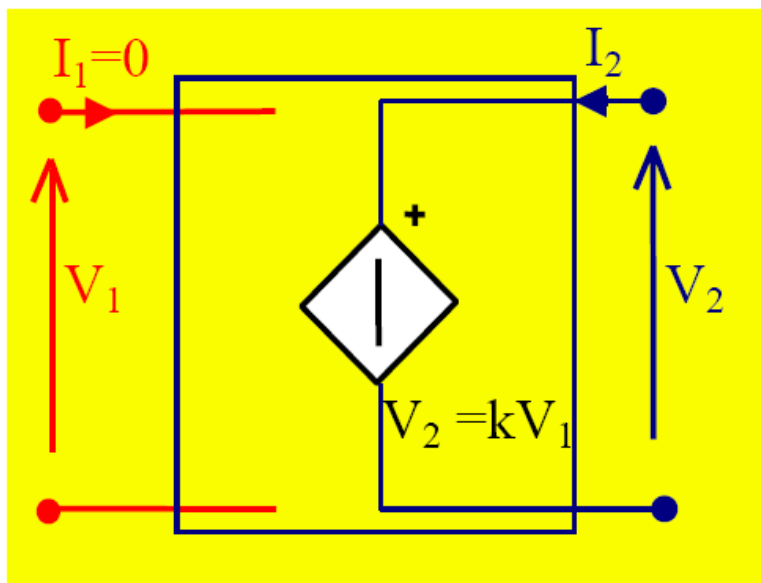
Diodo a gas: bipolo non lineare, tempo invariante, non simmetrico, controllato in corrente.

Generatori controllati

- Vengono spesso adoperati per rappresentare, entro certi limiti, il comportamento di dispositivi elettronici.
- Forniscono una tensione o una corrente in dipendenza del valore assunto dalla tensione o corrente in un altro lato del circuito.
- Si tratta di doppi bipoli.
- Se la dipendenza della grandezza controllata da quella di controllo è tramite una costante, il comportamento è lineare.

Generatori di tensione controllati

Generatore di tensione controllato in tensione (GTCT): le equazioni che descrivono il suo funzionamento sono:



$$I_1 = 0$$

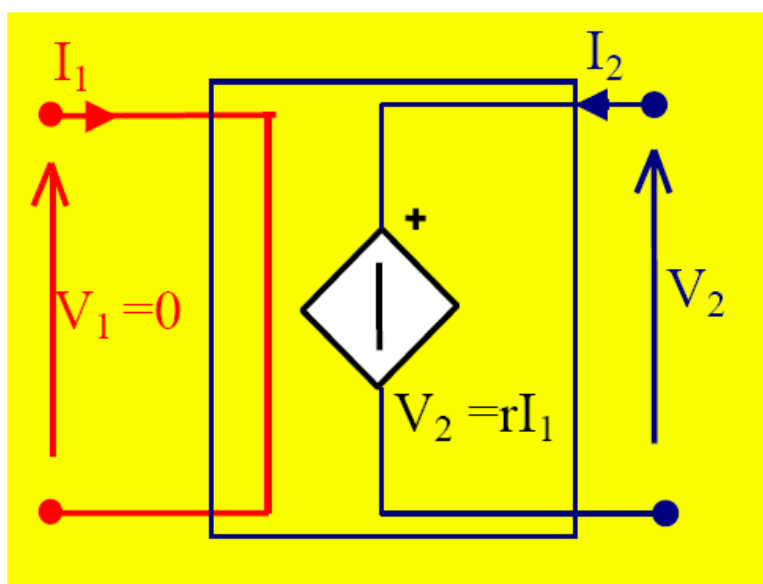
$$V_2 = kV_1$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$



Generatore di tensione controllato in corrente (GTCC).

Le equazioni che descrivono il suo funzionamento sono:



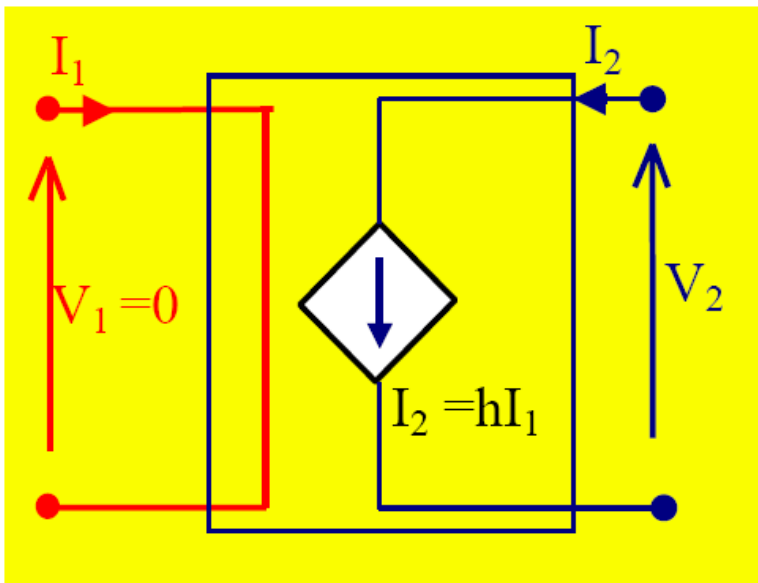
$$V_1 = 0$$

$$V_2 = rI_1$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$



Generatore di corrente controllato in corrente (GCCC).
 Le equazioni che descrivono il suo funzionamento sono:



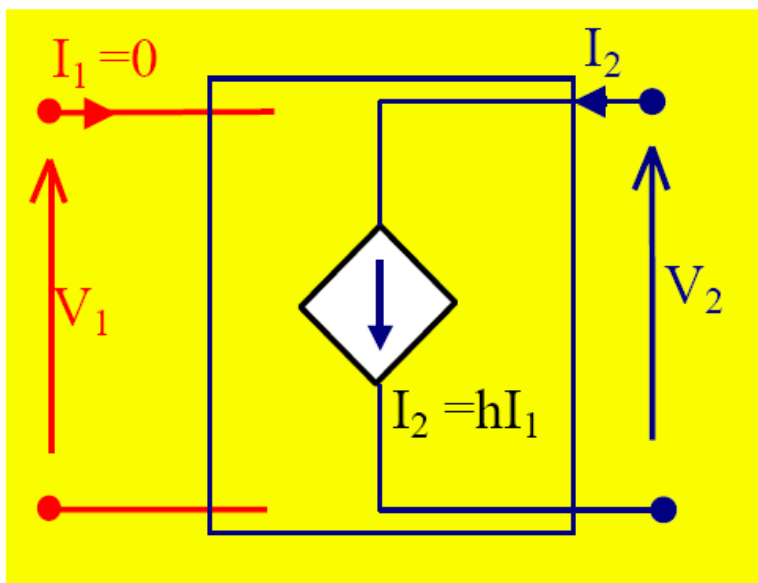
$$V_1 = 0$$

$$I_2 = hI_1$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$



Generatore di corrente controllato in tensione (GCCT).
 Le equazioni che descrivono il suo funzionamento sono:



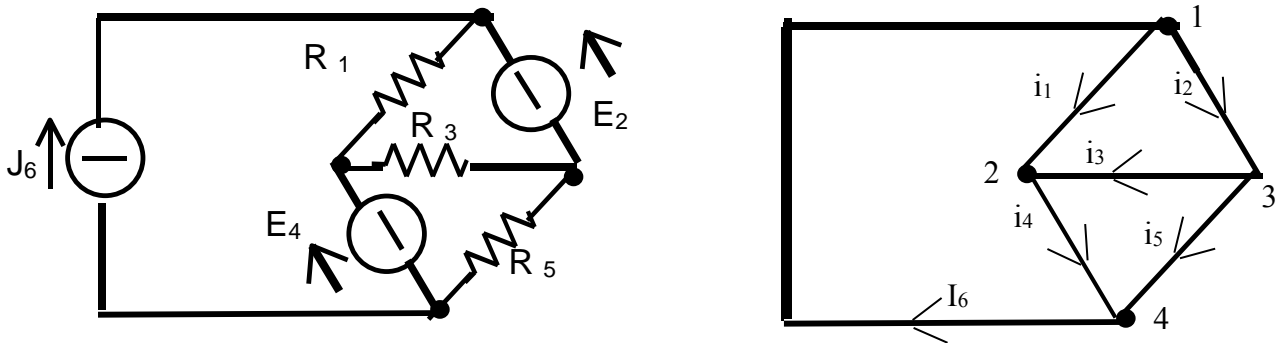
$$I_1 = 0$$

$$I_2 = gV_1$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$



Leggi di Kirchhoff in forma Matriciale



Con riferimento al circuito in figura, costituito da soli bipoli, si mostra come è possibile pervenire in forma automatica alle equazioni circuitali.

- Si assume per ogni bipolo della rete la convenzione dell'utilizzatore tra le variabili di porta (con rif. alla figura, il riferimento positivo della corrente del lato "h" del grafo entra nel terminale "i" contrassegnato dal + del riferimento positivo della tensione di porta del componente. La tensione di porta sarà allora $v_h = \phi^+ - \phi^- = \phi_i - \phi_j$, dove ϕ_i , ϕ_j denotano i potenziali dei nodi i e j rispettivamente.

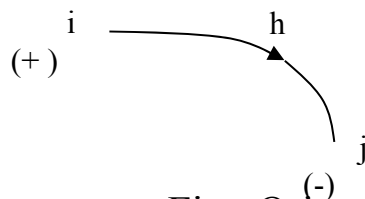


Fig. Orientamento di un lato

- Si consideri una generica rete con n nodi e b lati. Introduciamo la matrice di incidenza A_a del grafo di dimensione n righe \times b colonne. Il generico coefficiente a_{kh} vale:

$$\begin{cases} a_{kh} = +1 & \text{se il lato } h \text{ esce dal nodo } k \\ a_{kh} = -1 & \text{se il lato } h \text{ entra nel nodo } k \\ a_{kh} = 0 & \text{se il lato } h \text{ non incide nel nodo } k \end{cases} \quad (1)$$

LEGGE DI KIRCHHOFF ALLE CORRENTI

La matrice di incidenza diventa

$$\underline{\underline{\mathbf{A}_a}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Usando la matrice di incidenza $\underline{\underline{\mathbf{A}_a}}$ e denotando con i_h , $h=1:6$ le correnti dei lati del circuito e con $\underline{\mathbf{i}}$ il vettore delle correnti di lato la legge di Kirchhoff alle correnti può essere scritta nella forma

$$\underline{\underline{\mathbf{A}_a}} \underline{\mathbf{i}} = \mathbf{0} \quad (3)$$

MATRICE DI INCIDENZA RIDOTTA

Poiché ciascun lato ha sempre come estremi due soli nodi (in uno dei quali la corrente è entrante e nell'altro è uscente), allora in ciascuna colonna comparirà sempre un solo coefficiente +1 e un solo coefficiente -1. Per questo motivo la somma di tutte le righe di $\underline{\underline{\mathbf{A}_a}}$ è uguale a 0 e, conseguentemente, la matrice è singolare e il suo rango inferiore a n e precisamente sempre pari a “ $n-1$ ”, come si può facilmente verificare.

Eliminando da $\underline{\underline{\mathbf{A}_a}}$, una riga qualunque si ottiene la cosiddetta “matrice di incidenza ridotta” $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ non singolare e di dimensione pari a $(n-1) \times l$

Nell'esempio precedente si ottiene:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Pertanto $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\mathbf{i}} = \mathbf{0}$ (5) costituisce un insieme indipendente di LKC

LEGGE DI KIRCHHOFF ALLE TENSIONI

Facendo sempre riferimento all'esercizio precedente, è noto dal corso di Elettrotecnica che un modo per imporre la LKT è di esprimere le tensioni di lato v_h in funzione dei potenziali nodali. Ad esempio per il lato h compreso tra i nodi i e k la LKT si può scrivere come: $v_h = c_i \phi_i + c_k \phi_k$ dove c_i, c_k sono i coefficienti di incidenza tra il lato h e i nodi j e k . Considerando la rete dell'esempio precedente si ottiene:

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\underline{\mathbf{A}_a^T}} \underline{\mathbf{\Phi}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{\Phi}} \quad (6)$$

dove $\underline{\underline{\mathbf{A}_a^T}}$ coincide con la trasposta della matrice di incidenza a patto che si sia usata la convenzione dell'utilizzatore per tutti i lati della rete.

Poiché il rango di $\underline{\underline{\mathbf{A}_a^T}}$ è pari a $n-1$ per ottenere le LKT si rimuove la n -ma colonna, corrispondente al nodo di massa già eliminato scrivendo le LKC.

E dunque, usando la matrice di incidenza ridotta, ed assumendo come incognite il vettore $\underline{\mathbf{u}} = [u_1, u_2, u_3]$ delle $n-1$ tensioni dei nodi rispetto al nodo di massa 4, le equazioni indipendenti per le tensioni diventano:

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\underline{\mathbf{A}^T}} \underline{\mathbf{u}} \quad (7)$$

MATRICE Q DEGLI INSIEMI DI TAGLIO FONDAMENTALI

Abbiamo dato in precedenza la definizione di insieme di taglio per un circuito. La ricordiamo: un insieme di taglio è un sottografo costituito da soli lati che soddisfa alle seguenti due proprietà:

- a) la rimozione del grafo di tutti i lati dell'insieme di taglio conduce ad un grafo non connesso.
- b) La rimozione dal grafo di tutti i lati dell'insieme di taglio, tranne uno arbitrario, lascia il grafo connesso.

Si può dimostrare che a partire dai lati dell'albero di una rete è possibile individuare $n-1$ insiemi di taglio fondamentali, ciascuno dei quali consiste in un lato dell'albero e in un certo numero di lati del coalbero. Agli insiemi di taglio così ottenuti è possibile associare $n-1$ LKC indipendenti.

Considerando la rete precedente, dove i rami dell'albero sono stati rappresentati in linea marcata e quelli del coalbero in linea sottile, si sono individuati i tre insiemi di taglio fondamentali (ciascuno orientato con lo stesso riferimento del lato dell'albero su cui si basa). Si noti come la numerazione dei lati è stata modificata in modo da mettere prima i lati dell'albero e successivamente quelli del coalbero.

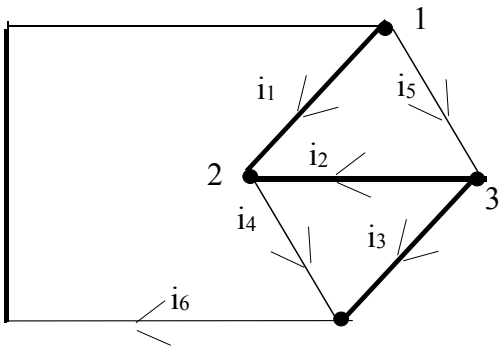


Fig.: albero e coalbero

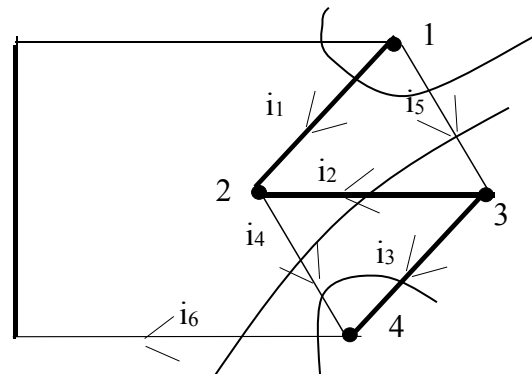


Fig.: insieme di taglio fondamentale

Per un qualunque lato i del grafo si introduce un numero di incidenza rispetto all'insieme di taglio j .

$$q_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se il lato } i \text{ è orientato coerentemente con } j \\ -1 & \text{se il lato } i \text{ è orientato in modo discorde rispetto a } j \\ 0 & \text{se il lato } i \text{ non appartiene all'insieme di taglio } j \end{cases} \quad (8)$$

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{e le LKC si possono scrivere come } \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{i}} = \underline{\underline{0}} \quad (9)$$

$\underline{\underline{Q}}$ è partizionabile nella sottomatrice unitaria di ordine $n-1$ ed in una sottomatrice

$$\underline{\underline{Q}}_c \text{ di dimensione } (n-1) \times m, \text{ dove } m \text{ sono i lati del coalbero. } \underline{\underline{Q}} = [\underline{\underline{I}} \quad \underline{\underline{Q}}_c] \quad (10)$$

MATRICE **B** DI MAGLIA FONDAMENTALE

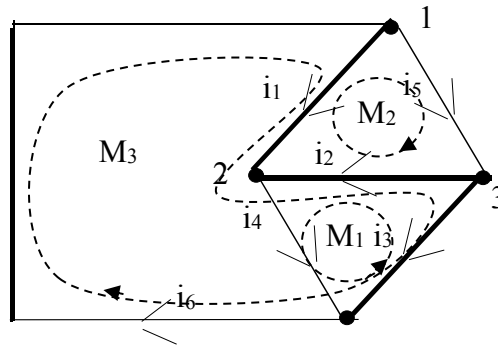


Fig.: albero e coalbero

Per una rete assegnata si fissi l'albero e il corrispondente coalbero. Com'è noto, l'insieme delle maglie, ottenute, considerando uno per volta i lati del coalbero (che serve anche per definire l'orientamento della maglia) e un certo numero di lati dell'albero, prende il nome di insieme delle *maglie fondamentali*. Tale insieme è costituito da $m=l-(n-1)$ maglie a ciascuna delle quali è possibile associare una Legge di Kirchhoff alle Tensioni. L'insieme di equazioni, così ottenuto, costituisce un insieme massimale di LKT indipendente. Ad esempio, in figura, $\{M_1, M_2, M_3\}$ costituisce un insieme di maglie fondamentali.

E' possibile introdurre la matrice delle maglie fondamentali, **B**, i cui coefficienti b_{ij} sono definiti nel modo seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{ij} = \begin{array}{l} +1 \text{ se il lato } i \text{ è orientato coerentemente alla maglia } j \\ -1 \text{ se il lato } i \text{ è orientato in modo discorde rispetto alla maglia } j \\ 0 \text{ se il lato } i \text{ non appartiene alla maglia fondamentale } j \end{array} \end{array} \right. \quad (11)$$

Per la rete dell'esempio, la matrice **B** diventa

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{e le LKT si possono scrivere come } \underline{\underline{\mathbf{B}}} \underline{\underline{\mathbf{v}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad (12)$$

dove $\underline{\underline{\mathbf{v}}} = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6]^T$ è il vettore delle tensioni di lato orientate per ciascun lato secondo la convenzione dell'utilizzatore.

B = [**B_a** **I**] ha dimensioni $m \times l$ ed è partizionabile in una sottomatrice **B_a** di dimensioni $m \times (n-1)$ e nella sottomatrice unitaria di ordine m relativa ai lati del coalbero.

LKT SULLA BASE DELLE TENSIONI DI ALBERO

Come visto al passo precedente è possibile scrivere le LKT utilizzando la matrice delle maglie fondamentali.

Usando la ripartizione $\underline{\underline{B}} = [\underline{\underline{B}}_a \ \underline{\underline{I}}]$ è possibile esprimere le tensioni dei lati di coalbero, $\underline{\underline{v}}_c = [v_4, v_5, v_6]^T$ in funzione delle tensioni dei lati d'albero $\underline{\underline{v}}_a = [v_1, v_2, v_3]^T$.

$$\text{Infatti, risulta } \underline{\underline{v}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{v}}_a \\ \underline{\underline{v}}_c \end{bmatrix} \text{ e dunque } \underline{\underline{B}} \underline{\underline{v}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}_a & \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{v}}_a \\ \underline{\underline{v}}_c \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}} \rightarrow \underline{\underline{v}}_c = -\underline{\underline{B}}_a \underline{\underline{v}}_a \quad (13)$$

Aggiungendo per prime le identità per le tensioni dei lati d'albero, si ottiene infine:

$$\underline{\underline{v}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} \\ -\underline{\underline{B}}_a \end{bmatrix} \underline{\underline{v}}_a \quad (14)$$

La (14) è una generalizzazione della (7) che lega le tensioni di lato ai potenziali nodali. Si può notare come essa sia pari a $\underline{\underline{Q}}^T$. Nel caso in esempio si ha:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} \\ -\underline{\underline{B}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}}^T = \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{Q}}_c \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

$$\text{E dunque risulta: } -\underline{\underline{B}}_a = \underline{\underline{Q}}_c^T \quad (15a) \quad \text{ed infine: } \underline{\underline{v}} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{v}}_a \quad (16)$$

RELAZIONE TRA $\underline{\underline{Q}}$ e $\underline{\underline{B}}$

Dalla (16) è possibile scrivere $\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{v}}_a$. Dalla (12) risulta $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{v}} = \underline{\underline{0}}$.

Si ottiene pertanto $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{v}}_a = \underline{\underline{0}} \quad \forall \underline{\underline{v}}_a$.

Questa relazione implica $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{0}}$ e cioè l'ortogonalità tra le righe di $\underline{\underline{B}}$ e $\underline{\underline{Q}}$.

LKC sulla base delle correnti di coalbero

Sulla base dell'albero si individuano n-1 insiemi di taglio fondamentali ai quali scrivere n-1 LKC indipendenti: $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\underline{\underline{\mathbf{i}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$ (9)

Queste equazioni consentono di esprimere le correnti dell'albero in funzione delle correnti dei lati del coalbero.

Con riferimento all'esempio precedente risulta: $\underline{\underline{\mathbf{i}}}_c = [i_4, i_5, i_6]^T$ in funzione delle

tensioni dei lati d'albero $\underline{\underline{\mathbf{i}}}_a = [i_1, i_2, i_3]^T$. E dunque il vettore delle correnti di lato si

può esprimere come : $\underline{\underline{\mathbf{i}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{i}}}_a \\ \underline{\underline{\mathbf{i}}}_c \end{bmatrix}$. (17)

Sostituendo nella (9) risulta: $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\underline{\underline{\mathbf{i}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{I}}} & \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{i}}}_a \\ \underline{\underline{\mathbf{i}}}_c \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{i}}}_a = -\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_c \underline{\underline{\mathbf{i}}}_c$ (18)

Aggiungendo per seconde le identità per le correnti dei lati di coalbero, si ottiene:

$$\underline{\underline{\mathbf{i}}} = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_c \\ \underline{\underline{\mathbf{I}}} \end{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{i}}}_c \quad (19)$$

Nel caso in esempio la matrice della (19) vale

$$\begin{bmatrix} -\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_c \\ \underline{\underline{\mathbf{I}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{B}}}_a \\ \underline{\underline{\mathbf{I}}} \end{bmatrix}^T \quad (20)$$

Da cui segue : $-\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_c = \underline{\underline{\mathbf{B}}}_a^T$ (21) che coincide con la (15a) a meno di una trasposizione.

Pertanto la (19) si può riscrivere come: $\underline{\underline{\mathbf{i}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T \underline{\underline{\mathbf{i}}}_c$ (22)

ANALISI DI TABLEAU PER I CIRCUITI RESISTIVI

L'analisi di Tableau è una tecnica generale per la ricerca della soluzione di un generico circuito resistivo lineare. Il metodo si articola nei seguenti passi:

- 1) Si definisca il grafo orientato al circuito assegnato e si scriva la matrice di incidenza ridotta $\underline{\mathbf{A}}$, avendo fissato un nodo di massa arbitrario.
- 2) Si scriva un sistema completo di $n-1$ LKC indipendenti usando la (5)
 $\underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{i}} = \underline{\mathbf{0}}$
- 3) Si scriva un sistema completo di l LKT indipendenti usando la (7)
 $\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{u}}$
- 4) Si scrivano le l relazioni caratteristiche per i lati della rete. Queste, per una rete lineare possono essere poste nella forma affine:

$$\underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{N}} \underline{\mathbf{i}} = \underline{\mathbf{f}} \quad (23)$$

dove $\underline{\mathbf{M}}$ e $\underline{\mathbf{N}}$ sono in generale matrici tempo-varianti di dimensione $l \times l$ mentre $\underline{\mathbf{f}}$ è il vettore (in generale tempo-variante) delle sorgenti impresse (f.e.m. oppure correnti impresse) dai generatori indipendenti di tensione o di corrente.

Si perviene così ad un sistema lineare di $(n-1 + 2 l)$ equazioni in altrettante incognite. In forma matriciale il sistema si può scrivere come:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{A}} \\ -\underline{\mathbf{A}}^T & \underline{\mathbf{I}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{M}} & \underline{\mathbf{N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{v}} \\ \underline{\mathbf{i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{f}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

dove la matrice del sistema prende il nome di matrice di Tableau. Quando tale matrice è non singolare l'unicità della soluzione è assicurata.

Nel caso di circuiti resistivi non lineari i passi 1), 2) e 3) restano immutati.

Il passo 4) va invece modificato in quanto le equazioni di lato adesso possono essere non-lineari del tipo:

$$h_1(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{i}}, t) = 0; \dots; h_k(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{i}}, t) = 0; \dots; h_l(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{i}}, t) = 0; \quad (25)$$

essendo le h_k , con $k=1, \dots, l$ funzioni non lineari dei vettori delle tensioni di lato $\underline{\mathbf{v}}$, delle correnti di lato $\underline{\mathbf{i}}$, oltre che delle funzioni del tempo.

In forma compatta: $\underline{\mathbf{h}}(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{i}}, t) = 0 \quad (26)$

In tal caso il sistema delle eq. Di tableau non lineari diventa:

$$\underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{i}} = \underline{\mathbf{0}}; \quad \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{0}} \quad \underline{\mathbf{h}}(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{i}}, t) = 0 \quad (27)$$

GENERALIZZAZIONE DELL'ANALISI DI TABLEAU

- Nell'analisi di tableau **basata sui nodi** si sono considerate le LKC e le LKT rispettivamente nella forma :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{i}=\mathbf{0}; \quad \underline{\underline{\mathbf{v}}}-\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{u}=\mathbf{0} \quad (28)$$

- Nell'analisi di tableau **basata sugli insiemi di taglio fondamentali** si considerano le LKC e le LKT rispettivamente nella forma:

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\mathbf{i}=\mathbf{0}; \quad \underline{\underline{\mathbf{v}}}-\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\mathbf{v}_a=\mathbf{0} \quad (29)$$

- Infine, nell'analisi di tableau **basata sulle maglie fondamentali** si considerano le LKC e le LKT rispettivamente nella forma:

$$\mathbf{i}-\underline{\underline{\mathbf{B}}}\mathbf{i}_c=\mathbf{0}; \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}}\mathbf{v}=\mathbf{0}; \quad (30)$$

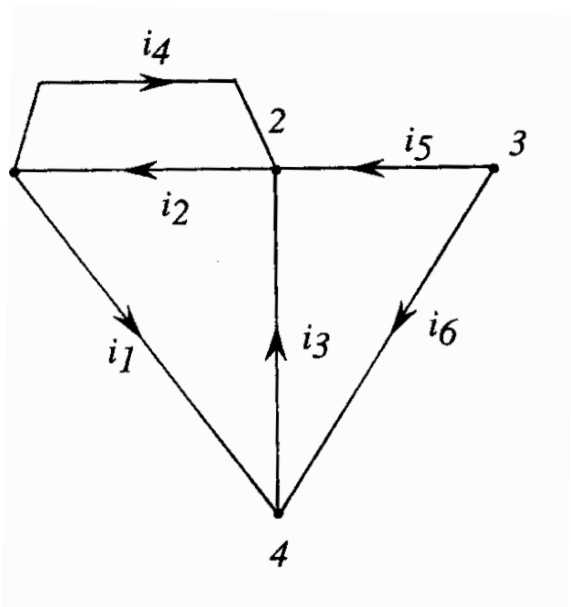
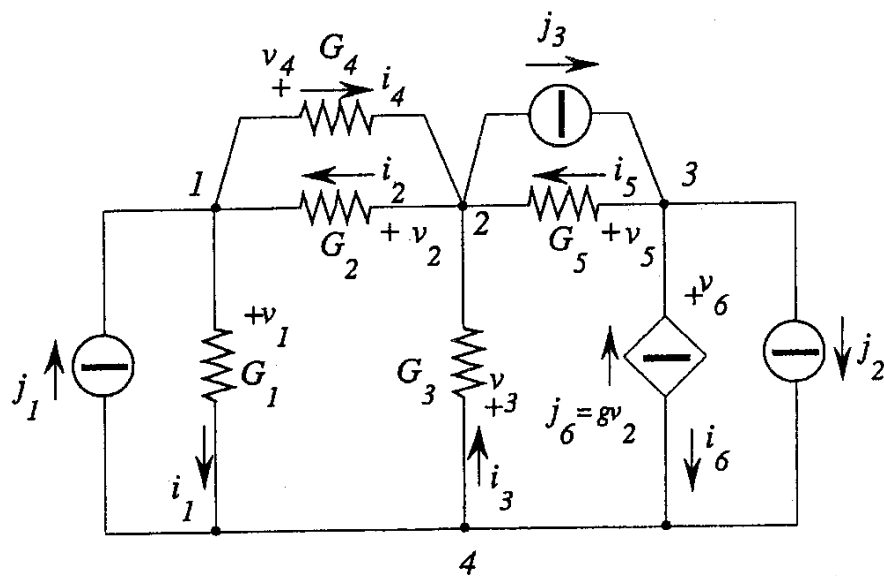
Un ulteriore insieme di equazioni è costituito dalle equazioni di lato relative al singolo componente.

EQUAZIONI DI NODO PER I CIRCUITI RESISTIVI

Dal punto di vista numerico l'analisi di Tableau comporta di dover risolvere sistemi lineari o non lineari di grandi dimensioni con matrici fortemente sparse.

Un approccio più efficiente riguardo agli aspetti computazionale si basa sulla **formulazione dell'equazione di nodo**.

Per mostrare questo approccio si faccia inizialmente riferimento ad un circuito resistivo, lineare, connesso, contenente resistori lineari controllati in tensione a due o più terminali, anche tempo-varianti; generatori indipendenti di corrente; generatori di corrente pilotati in tensione. Per il momento non si considerano lati contenenti generatori di tensione o componenti non controllabili in tensione. Successivamente si vedrà come è possibile estendere il metodo per tener conto anche della presenza di siffatti bipoli. Si faccia riferimento alla rete in figura e si assuma il nodo 4 come nodo di massa.



Primo passo: si scrive la LKC sfruttando la matrice di incidenza ridotta A .

Risulta comodo evidenziare nelle equazioni di nodo le correnti impresse dai generatori indipendenti rispetto a quelle incognite.

Ad esempio per il nodo 3, si scrive: $i_5 + i_6 - j_3 + j_2 = 0$; (31)

ovvero, raggruppando le correnti impresse al nodo 3 nella forma: $j_{t3} = -j_3 + j_2$, (32)

l'equazione precedente diventa: $i_5 + i_6 + j_{t3} = 0$ (33)

Si introduce allora il vettore delle correnti totali impresse nei nodi:

$$\mathbf{j}_t = [j_{t1}, \dots, j_{tn-1}]^T \quad (34)$$

Si consideri ora la matrice di incidenza ridotta $\underline{\underline{A}}_S$ associata al sottografo della rete ottenuto **aprendo i lati relativi ai generatori indipendenti di corrente.**

Indicato con b il numero dei lati appartenenti al sottografo, $\underline{\underline{A}}_S$ ha dimensioni $(n-1) \times b$. Nel caso in esempio si aprono i lati relativi ai generatori indipendenti di corrente j_1, j_2, j_3 . Da cui il sottografo rappresentato in figura. Si assume che il sottografo così ottenuto sia connesso e cioè che nella rete non vi siano maglie formate da soli generatori di corrente impressa. Le equazioni relative alle LKC diventano:

$$\underline{\underline{A}}_S \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{i}}_t = \mathbf{0} \quad (35)$$

Per il sottografo che stiamo considerando si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} + \underline{\mathbf{j}}_t = 0 \quad \text{dove } \underline{\mathbf{j}}_t = [j_{t1}, j_{t2}, j_{t3}]^T = [-j_1, j_3, j_2 - j_3]^T$$

(36)

Secondo passo Con riferimento al sottografo in figura di b lati si consideri il vettore delle tensioni di lato $\underline{\mathbf{v}} = [v_1, \dots, v_b]^T$ relativo alle porte dei diversi elementi circuitali fatta eccezione per i generatori indipendenti di corrente. Poiché la rete è lineare il legame sarà del tipo:

$$\underline{\mathbf{i}} = \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{v}} \quad (37)$$

Dove $\underline{\mathbf{Y}}$ è la matrice di ammettenza di lato di dimensioni $b \times b$.
Ad esempio per la rete in figura la matrice diventa:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Si noti che la matrice $\underline{\mathbf{Y}}$ è diagonale solo se la rete è costituita da resistori lineari a due terminali e da generatori indipendenti di corrente. Se i resistori sono tempo varianti allora $\underline{\mathbf{Y}}(t)$ diventa tempo variante.

Sostituendo nella (35) la (37) si ottiene: $\underline{\mathbf{A}}_s \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{j}}_t = \mathbf{0} \quad (39)$

Terzo passo. La LKT si scrive nella forma (7): $\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{A}}_s^T \underline{\mathbf{u}} \quad (40)$

e sostituendo nella (39), si ottiene: $\underline{\mathbf{A}}_s \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{A}}_s^T \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{j}}_t = \mathbf{0} \quad (41)$

La (41) costituisce il sistema delle equazioni di nodo che consente di calcolare il vettore delle tensioni $\underline{\mathbf{u}}$ rispetto al nodo di massa del circuito.

La matrice $\underline{\mathbf{Y}}_n = \underline{\mathbf{A}}_s \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{A}}_s^T$ viene detta **matrice di ammettenza di nodo** ed ha dimensioni $(n-1) \times (n-1)$ indipendentemente dal numero di lati b del sottografo. Con riferimento alla rete dell'esempio $b=6$ mentre la matrice di ammettenza di nodo ha dimensione $(n-1)=3$

Pertanto risolvendo il sistema (41), si perviene al calcolo del vettore delle tensioni nodali $\underline{\mathbf{u}}$. Quindi tramite la (40) si passa dalla $\underline{\mathbf{u}}$ alla $\underline{\mathbf{v}}$, mentre tramite la (37) si ottiene il vettore delle correnti di lato.

OSSERVAZIONE

Se la rete è costituita da resistori lineari a due terminali e da generatori indipendenti, allora la matrice $\underline{\mathbf{Y}}_n = \underline{\mathbf{A}}_s \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{A}}_s^T$ è simmetrica. Infatti, essendo $\underline{\mathbf{Y}}$ diagonale si ha:

$$(\underline{\mathbf{Y}}_n)^T = (\underline{\mathbf{A}}_s \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{A}}_s^T)^T = \underline{\mathbf{A}}_s \underline{\mathbf{Y}} \underline{\mathbf{A}}_s^T = \underline{\mathbf{Y}}_n$$

Se poi le conduttanze sono tutte positive, dal criterio di Sylvester segue che la matrice $\underline{\mathbf{Y}}$ è definita positiva e dunque anche $\underline{\mathbf{Y}}_n$ risulta definita positiva.

Pertanto $\underline{\mathbf{Y}}_n$ è simmetrica e definita positiva e, pertanto, invertibile. Ciò significa che è unica la soluzione in termini di tensioni e di correnti di lato della rete contenente esclusivamente resistori lineari a due terminali e generatori indipendenti di corrente.

Se la rete contiene resistori non-lineari controllati in tensione a due o più porte, oltre che generatori indipendenti di corrente, le equazioni caratteristiche allora diventano non-lineari, del tipo:

$$\begin{aligned} i_1 &= g_1(v_1, \dots, v_b) \\ &\rightarrow \underline{\mathbf{i}} = \underline{\mathbf{g}}(v_1, \dots, v_b) \\ i_b &= g_b(v_1, \dots, v_b) \end{aligned}$$

Pertanto la (39) diventa $\underline{\mathbf{A}}_s \underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{v}}) + \underline{\mathbf{i}}_t = \mathbf{0}$

Ed esprimendo le tensioni di lato in funzione dei potenziali di nodo si ottiene:

$$\underline{\mathbf{A}}_s \underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{A}}_s^T \underline{\mathbf{u}}) + \underline{\mathbf{i}}_t = \mathbf{0}$$

che costituisce un sistema di $n-1$ eq. non lineari nelle $n-1$ incognite tensioni nodali.

Circuiti dinamici generali: componenti dinamici

Condensatori

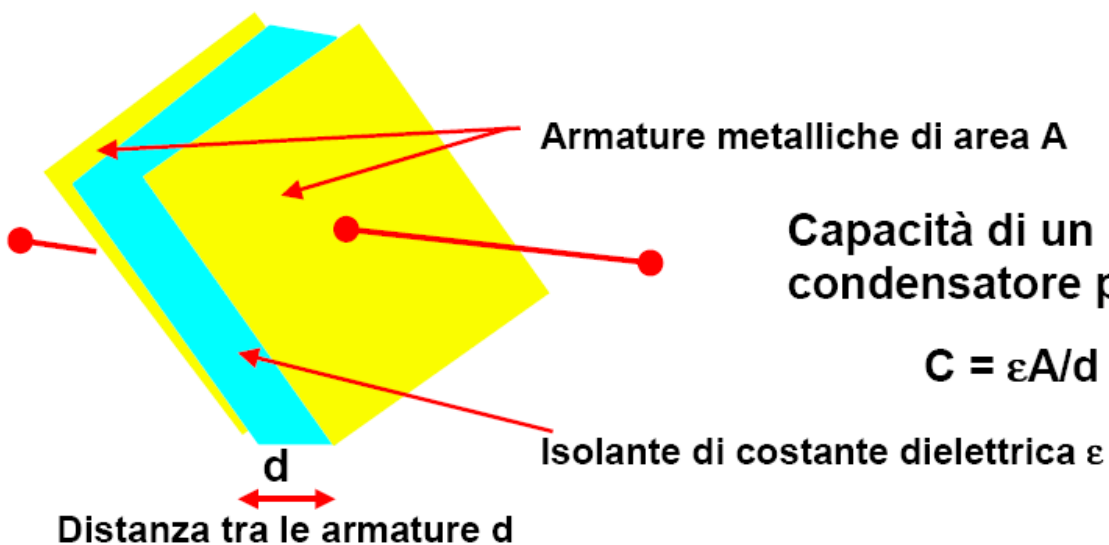


Bipoli dinamici fondamentali

Condensatore: un condensatore di capacità C è un bipolo nel quale la carica elettrica su una armatura è proporzionale alla tensione V tra le due armature:

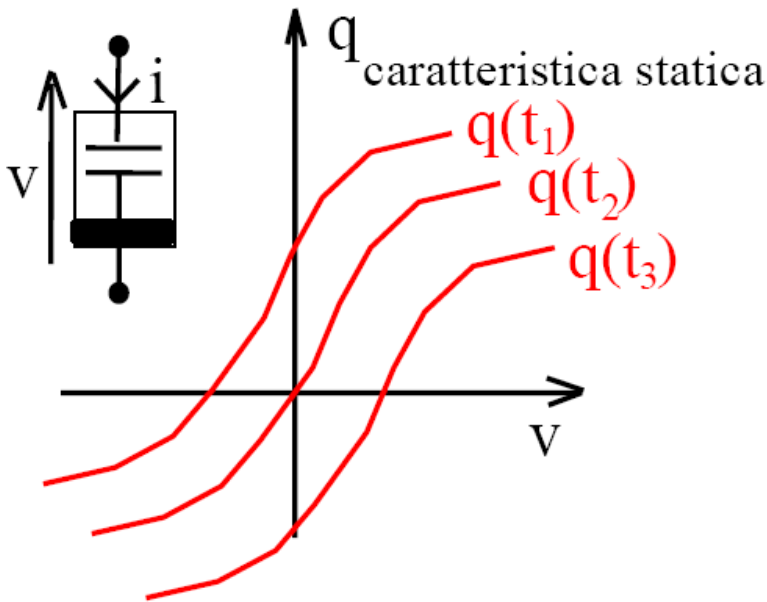
$$Q = C V$$

Q è la carica del condensatore (su una sola armatura) e V è la tensione tra le due armature.



Bipoli dinamici fondamentali

condensatore non lineare
tempo variante



Bipolo Condensatore

Caratteristica:

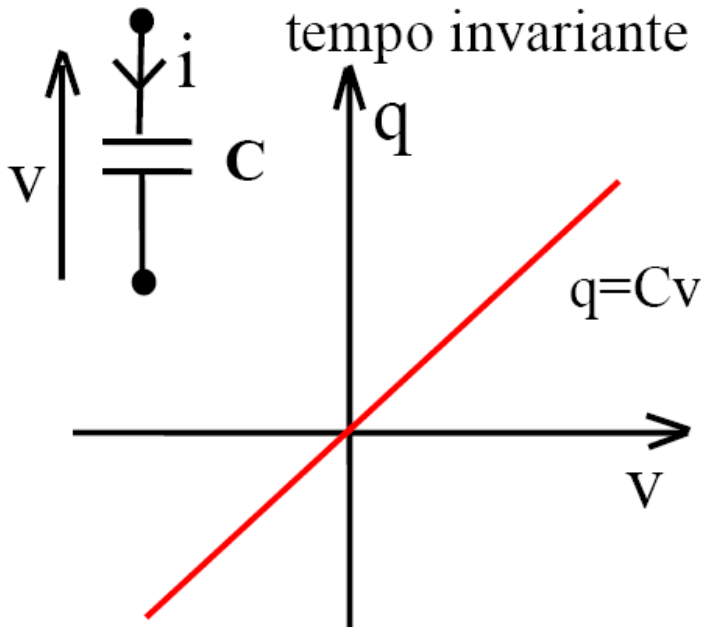
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$q(t) = Q(v; t)$$

q è la carica del condensatore (su una sola armatura) e Q è una funzione non lineare di v .

Bipoli dinamici fondamentali

condensatore lineare
tempo invariante

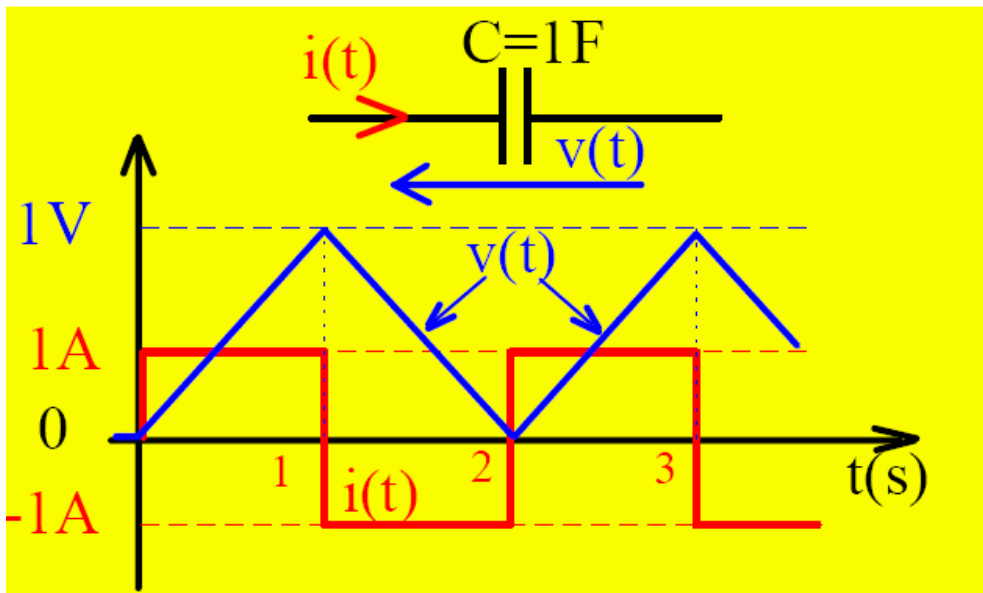


Caratteristica statica:

$$q(t) = Cv(t)$$

C è la capacità del condensatore; unità di misura il Farad:

$$[F] = 1[C] / 1[V].$$

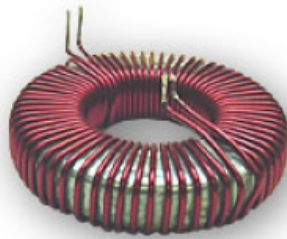


Caratteristica
dinamica
condensatore
lineare tempo
invariante
(convenzione
dell'
utilizzatore):

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \quad v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0)$$

Nel caso di condensatore non lineare tempo-invariante, con la convenzione dell'utilizzatore la caratteristica $q=q(v)$ diventa: $i = \frac{dq(v)}{dt} = \frac{dq(v)}{dv} \frac{dv}{dt} = C(v) \frac{dv}{dt}$

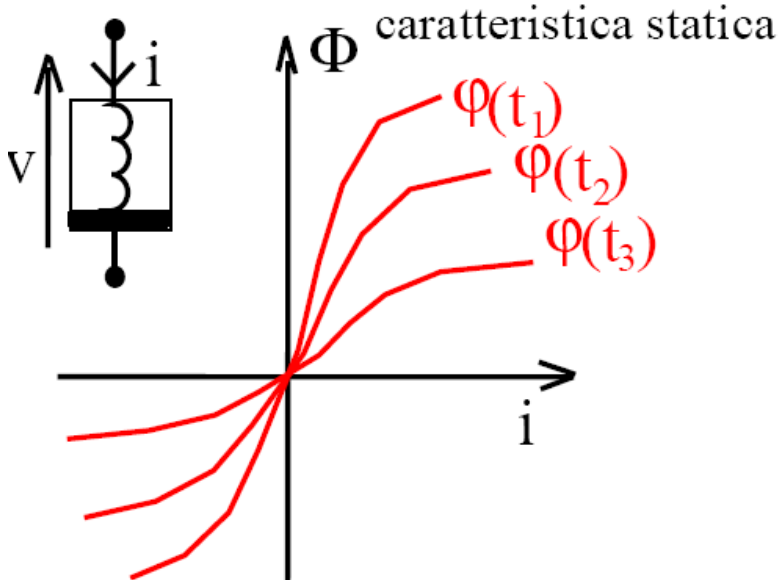
Bipolo induttore



Bipolo induttore

induttore non lineare
tempo variante

Caratteristica:



$$v(t) = \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi(t) = \varphi(i; t)$$

Φ è il flusso (del campo di induzione magnetica) nell'induttore e φ è una funzione non lineare di i .

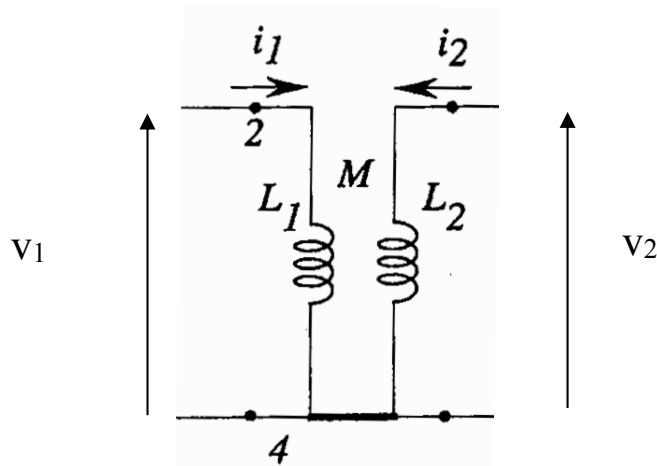
Nel caso di un induttore non lineare tempo-invariante, con la convenzione dell'utilizzatore la caratteristica $\varphi = \varphi(i)$ diventa: $v = \frac{d\varphi(i)}{dt} = \frac{d\varphi(i)}{di} \frac{di}{dt} = L(i) \frac{di}{dt}$

- Esistono anche condensatori non lineari controllati in carica ($v=v(q)$) e induttori non lineari controllati in flusso ($i=i(\varphi)$), ma tali componenti non verranno presi in considerazione nel seguito del discorso.

- Nel caso di due induttori mutuamente accoppiati le relazioni caratteristiche flusso-corrente assumono la forma:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_1(i_1, i_2) \\ \varphi_2 = \varphi_2(i_1, i_2) \end{cases} \text{ o anche in forma compatta}$$

$$\underline{\varphi} = \underline{\varphi}(\underline{i}) \text{ dove } \underline{i} = [i_1, i_2]^T ; \underline{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2]^T$$



$$v_1 = \frac{d\varphi_1(i_1, i_2)}{dt} = \frac{d\varphi_1(i_1, i_2)}{di_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{d\varphi_1(i_1, i_2)}{di_2} \frac{di_2}{dt} = L_1(i_1, i_2) \frac{di_1}{dt} + M(i_1, i_2) \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = \frac{d\varphi_2(i_1, i_2)}{dt} = \frac{d\varphi_2(i_1, i_2)}{di_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{d\varphi_2(i_1, i_2)}{di_2} \frac{di_2}{dt} = M(i_1, i_2) \frac{di_1}{dt} + L_2(i_1, i_2) \frac{di_2}{dt}$$

ovvero, assumendo $\underline{v} = [v_1, v_2]^T$ $\underline{v} = \underline{\underline{J}}(\underline{i}) \frac{d\underline{i}}{dt}$

dove $\underline{\underline{J}}(\underline{i}) = \begin{bmatrix} \frac{d\varphi_1}{di_1} & \frac{d\varphi_1}{di_2} \\ \frac{d\varphi_2}{di_1} & \frac{d\varphi_2}{di_2} \end{bmatrix}$ è la matrice Jacobiana.

ANALISI DI NODO MODIFICATA

Per trattare circuiti contenenti elementi non controllabili in tensione, si ricorre alla tecnica dell'analisi di nodo modificata. Attraverso questa tecnica è possibile risolvere sia circuiti resistivi che circuiti dinamici, lineari e non lineari. In effetti è una metodologia estremamente generale per la soluzione di circuiti a parametri concentrati e, per questo, adottata dai solutori commerciali (Microcap, Spice).

Per trattare componenti non controllati in tensione, si aggiunge al modello ricavabile attraverso l'analisi di nodo un'ulteriore incognita, vale a dire la **corrente del lato** non controllato in tensione ed una nuova equazione, la relazione caratteristica dello stesso lato.

A titolo di esempio, si consideri il circuito dinamico lineare con $n=4$, $b=6$, rappresentato in figura, nel quale il mutuo induttore e il generatore indipendente di tensione sono componenti non controllabili in tensione:

In base a quanto detto, occorre aggiungere alle tensioni nodali u_1, u_2, u_3 , valutate rispetto al nodo 4, le correnti nei lati non controllati in tensione: i_1, i_2, i_6 . Si scrivono quindi le equazioni di nodo, che data la semplicità del presente circuito, possono essere dedotte per ispezione, avendo adottato per tutti i lati la c.u..

A queste equazioni vanno aggiunte le equazioni di lato per i componenti non controllati in tensione.

$$i_3 + i_6 = 0 \Rightarrow G_3 u_1 - G_3 u_2 + i_6 = 0$$

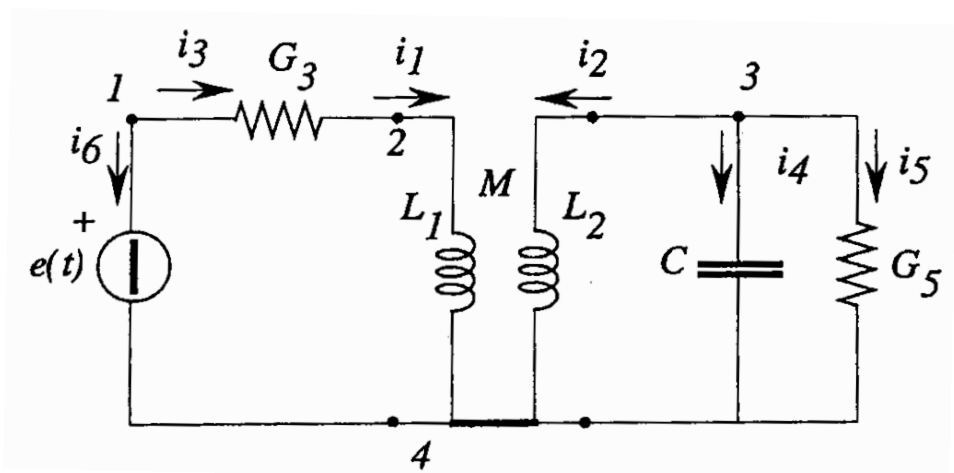
$$-i_3 + i_1 = 0 \Rightarrow -G_3 u_1 + G_3 u_2 + i_1 = 0$$

$$i_2 + i_4 + i_5 = 0 \Rightarrow C \frac{du_3}{dt} + G_5 u_3 + i_2 = 0$$

$$-u_2 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = 0$$

$$-u_3 + M \frac{di_1}{dt} + L_{21} \frac{di_2}{dt} = 0$$

$$u_1 = e(t)$$



Se si assume come vettore delle incognite: $\underline{x}(t) = [u_1, u_2, u_3, i_1, i_2, i_6]^T$

si perviene al seguente sistema matriciale:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{dx}{dt} + \begin{bmatrix} G_3 & -G_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -G_3 & G_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e(t) \end{bmatrix}$$

che in forma compatta si esprime come:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} \frac{d\underline{\mathbf{x}}}{dt} + \underline{\underline{\mathbf{N}}}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{f}}$$

Si noti che in questo sistema le equazioni algebriche sono mescolate a quelle differenziali. Per facilitare la soluzione conviene separare le prime dalle seconde, *riducendo* le matrici del sistema.

MATRICI RIDUCIBILI

Si ricorda che una matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ di ordine $n \geq 2$ si dice riducibile se esiste una matrice di permutazione $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ tale che: $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{P}}}^T = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{11} & \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{12} \\ 0 & \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{22} \end{bmatrix}$ dove $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{11}$ è un blocco quadrato di dimensione k , $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{22}$ è un blocco quadrato di dimensione $(n-k)$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{12}$ è un blocco rettangolare di dimensione $k \times (n-k)$

Quando una matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ è riducibile, è possibile risolvere più facilmente il sistema lineare di equazioni associato: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$.

Infatti risulta: $\underline{\underline{\mathbf{P}}}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{P}}}^T \underline{\underline{\mathbf{P}}}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}\underline{\mathbf{b}}$ e ponendo $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}\underline{\mathbf{x}}$ e $\underline{\mathbf{v}} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}\underline{\mathbf{b}}$ si ottiene: $\underline{\underline{\mathbf{B}}}\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{v}}$

Da cui partizionando i vettori $\underline{\mathbf{u}}$ e $\underline{\mathbf{v}}$ come segue: $\underline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_1 \\ \underline{\mathbf{u}}_2 \end{bmatrix}$; $\underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}_1 \\ \underline{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix}$

Si ottiene che il sistema iniziale viene sostituito dal sistema più semplice da

risolvere:
$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{11} \underline{\mathbf{u}}_1 + \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{12} \underline{\mathbf{u}}_2 = \underline{\mathbf{v}}_1 \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}}_{22} \underline{\mathbf{u}}_2 = \underline{\mathbf{v}}_2 \end{cases}$$

RIDUZIONE DEL SISTEMA

1. Con permutazioni sulle righe delle matrici e del vettore $\underline{\mathbf{f}}$ si scrivono per prime le equazioni algebriche e per ultime quelle differenziali. Nel nostro caso, basta scambiare le righe 3 e 6 e, in forma matriciale, ciò equivale a moltiplicare il sistema a sinistra per la matrice di Permutazione $\underline{\mathbf{P}}$ ottenuta dalla matrice unità scambiando la riga 3 con la riga 6

In forma generale il sistema precedente si scrive:

$$\underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{M}}\frac{d\underline{\mathbf{x}}}{dt} + \underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{N}}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{f}}$$

2. Si riordinano le incognite in modo corrispondente alle equazioni. Occorre cioè anteporre quelle coinvolte nelle equazioni algebriche e lasciare per ultime quelle che entrano nelle equazioni differenziali. Nel nostro esempio: $\underline{\mathbf{z}}(t)=[u_1, u_2, i_6, i_1, i_2, u_3]^T$ Essendo le matrici di permutazione ortogonali questa operazione equivale alla post-moltiplicazione delle due matrici $\underline{\mathbf{M}}$ e $\underline{\mathbf{N}}$ per $\underline{\mathbf{P}}^T$

$$\underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{M}}\underline{\mathbf{P}}^T\frac{d\underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{x}}}{dt} + \underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{N}}\underline{\mathbf{P}}^T\underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{f}} \Rightarrow \underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{M}}\underline{\mathbf{P}}^T\frac{d\underline{\mathbf{z}}}{dt} + \underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{N}}\underline{\mathbf{P}}^T\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{f}}$$

dove si è posto: $\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{x}} = [\underline{\mathbf{w}}, \underline{\mathbf{y}}]^T$; con $\underline{\mathbf{w}} = [u_1, u_2, i_6]$, $\underline{\mathbf{y}} = [i_1, i_2, u_3]$.

Il che corrisponde a permutare le colonne 3 e 6 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \frac{d\underline{\mathbf{z}}}{dt} + \begin{bmatrix} G_3 & -G_3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -G_3 & G_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

3. Si partizionano le due matrici del sistema precedente come :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{\mathbf{S}}}_{22} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{w}} \\ \underline{\mathbf{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{11} & \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{12} \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{21} & \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{w}} \\ \underline{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{f}}_1 \\ \underline{\mathbf{f}}_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}_{22} = \begin{bmatrix} L_1 & M & 0 \\ M & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{11} = \begin{bmatrix} G_3 & -G_3 & 1 \\ -G_3 & G_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

dove:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & G_5 \end{bmatrix}$$

Dalla prima riga si deduce la relazione algebrica tra le grandezze $\underline{\mathbf{w}}$ e $\underline{\mathbf{y}}$:

$$\underline{\mathbf{w}} = -\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{11}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{12} \underline{\mathbf{y}} + \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{11}^{-1} \underline{\mathbf{f}}_1$$

che sostituita nella seconda comporta:

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}_{22} \frac{d\underline{\mathbf{y}}}{dt} + \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{21} (-\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{11}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{12} \underline{\mathbf{y}} + \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{11}^{-1} \underline{\mathbf{f}}_1) + \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{22} \underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{f}}_2$$

e semplificando si ha:

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}_{22} \frac{d\underline{\mathbf{y}}}{dt} + \left(\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{22} - \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{21} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{11}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{12} \right) \underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{f}}_2 - \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{21} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{11}^{-1} \underline{\mathbf{f}}_1$$

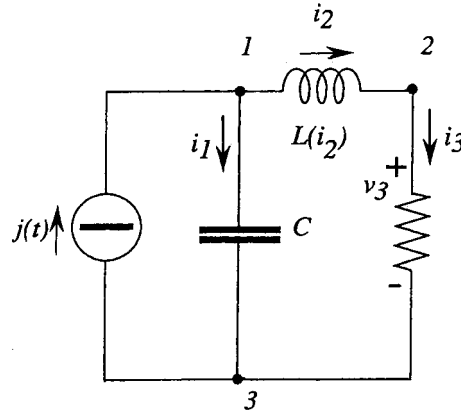
Che rappresenta un sistema di equazioni differenziali del primo ordine.

- La matrice simmetrica $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{11}$ è invertibile se non vi sono nella rete nodi ai quali sono connessi solo induttori o mutui induttori (nodi induttivi), oppure maglie formate da soli condensatori (maglie capacitive).
- Se queste situazioni sono presenti, la matrice $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{11}$ si può comunque rendere invertibile, aggiungendo in parallelo a ciascun induttore del nodo induttivo una piccola conduttanza, oppure in serie a ciascun condensatore una piccola resistenza.
- Nel caso dell'esempio, tutti i minori principali di $\underline{\underline{\mathbf{S}}}_{22}$ sono positivi e, pertanto, dal criterio di Sylvester $\underline{\underline{\mathbf{S}}}_{22}$ è definita positiva. E dunque è certamente invertibile.
- Pertanto premoltiplicando per $(\underline{\underline{\mathbf{S}}}_{22})^{-1}$ il sistema precedente, si ottiene un sistema del tipo: $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}(\mathbf{y}, t)$, che congiunto alle condizioni iniziali: $\mathbf{y}(0) = \underline{\underline{\mathbf{y}}}_0$, porta ad un sistema di equazioni differenziali che può essere risolto numericamente. Ricavata la \mathbf{y} si ottiene immediatamente il vettore $\underline{\underline{\mathbf{w}}}$

ANALISI DI NODO MODIFICATA PER CIRCUITI NON-LINEARI

Nel caso di circuiti non-lineari attraverso l'analisi di nodo si perviene ad un sistema

di equazioni differenziali non lineari del tipo: $\underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{y}}, \frac{d\underline{\mathbf{y}}}{dt}t) = 0$



Ad esempio consideriamo il circuito in figura, nel quale compare un induttore non

lineare di induttanza differenziale $L(i_2) = \frac{d\phi}{di_2}$ definita dalla caratteristica non-

lineare $\phi = \phi(i_2)$, mentre la conduttanza non-lineare ha una relazione caratteristica del tipo $i_3 = i_3(v_3)$. Le LKC si scrivono per ispezione del circuito (si assume il nodo 3 come nodo di massa):

$$LKC \text{ al nodo } 1: C \frac{du_1}{dt} + i_2 - j(t) = 0$$

$$LKC \text{ al nodo } 2: i_3(u_2) - i_2 = 0$$

$$Eq. \text{ caratt. ind.}: u_1 - u_2 - L(i_2) \frac{di_2}{dt} = 0$$

Il vettore delle incognite è ora: $\underline{\mathbf{x}}(t) = [u_1, u_2, i_2]^T$

In forma matriciale, il sistema algebrico differenziale non lineare diventa:

$$\begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_2(i_2) \end{bmatrix} \frac{d\underline{\mathbf{x}}}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & i_3(\bullet) & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} j(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove il pallino nell'argomento di $i_3(\bullet)$ indica che tale funzione va applicata alla i_2 .

In questo caso, la non-linearità del circuito impedisce la separazione delle equazioni algebriche da quelle differenziali. Infatti riordinando le equazioni (si scambia la 1^a con la 2^a) e le incognite ($\underline{z}(t)=[u_2, \underline{y}]^T$ dove si è scambiato u_1 con u_2 e si è posto $\underline{y}=[u_1, i_2]$) si arriva al sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & -L_2(i_2) \end{bmatrix} \frac{d\underline{z}}{dt} + \begin{bmatrix} i_3(\bullet) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ j(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema algebrico non lineare diventa:

$$i_3(u_2) + \underline{\mathbf{T}}_{12} \underline{y} = 0 \quad \text{dove } \underline{\mathbf{T}}_{12} = [0 \ -1]; \quad (1)$$

mentre il sistema differenziale non lineare vale:

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & -L_2(i_2) \end{bmatrix} \frac{d\underline{y}}{dt} + \underline{\mathbf{T}}_{21} u_2 + \underline{\mathbf{T}}_{22} \underline{y} = \begin{bmatrix} j(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{dove } \underline{\mathbf{T}}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e \quad \underline{\mathbf{T}}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Come si vede non si può eliminare la u_2 ricavandola in funzione di \underline{y}

Conviene allora discretizzare la derivata $\frac{d\underline{y}}{dt}$ ad esempio mediante il metodo di

Eulero: $\underline{y}_{n+1} - \underline{y}_n = h \frac{d\underline{y}}{dt}$ in modo da trasformare il sistema di eq. Differenziali (2)

in una equazione alle differenze, che accoppiato col sistema (1) conduce ad un sistema di eq. Algebriche non lineari, risolubile numericamente con la condizione di partenza $\underline{y}_0 = \underline{y}(0)$