

Riepilogo dei principali metodi analitici e numerici impiegati per la soluzione dei problemi elettromagnetici.

Metodi analitici

Fra i vari metodi analitici che sono stati utilizzati per la soluzione dei problemi di campo elettromagnetico, ci si limiterà a presentare a somme linee la funzione di Green, la separazione delle variabili e le trasformazioni conformi.

a) Funzione di Green

Si consideri, per semplicità, il problema di Poisson definito nel volume limitato V con condizioni di Dirichlet sul contorno Σ :

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{in } V \quad (1a)$$

$$\phi = \phi_0 \quad \text{su } \Sigma \quad (1b)$$

dove ρ rappresenta una distribuzione nota di termini sorgente, e ϕ è il campo scalare incognito vincolato ad assumere sulla frontiera Σ il valore assegnato ϕ_0 .

La soluzione del problema può essere ottenuta per mezzo del teorema di Green:

$$\int_V (\phi \nabla^2 G - G \nabla^2 \phi) dV = \oint_{\Sigma} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\Sigma \quad (2)$$

applicato a ϕ e alla *funzione di Green* $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ definita come segue:

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad \text{in } V \quad (3a)$$

$$G = G_0 \quad \text{su } \Sigma \quad (3b)$$

Dal teorema di Green, dalla (3a) e dalla (1) si ottiene:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV' + \oint_{\Sigma} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n} \right] d\Sigma' \quad (4)$$

Se si sa risolvere il problema (3) con condizioni al contorno omogenee ($G_0=0$), allora è possibile, utilizzando la (4), determinare in ogni punto del dominio V la soluzione ϕ del problema di Poisson, con condizioni al contorno di Dirichlet non omogenee.

Attraverso un procedimento analogo si può determinare la soluzione del problema di Poisson quando siano imposte sul contorno condizioni di tipo Neumann.

b) Metodo di separazione delle variabili

Come più volte sottolineato, il modello matematico di un problema elettromagnetico può essere ricondotto alla ricerca di una funzione che soddisfi ad una singola equazione alle derivate parziali nel dominio di definizione, V , e ad opportuni vincoli sulla frontiera ∂V e, nel caso dinamico, sui valori assunti in tutti i punti del dominio nell'istante iniziale.

Se l'incognita è il campo scalare Φ , funzione delle n variabili indipendenti $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$, l'equazione differenziale, supposta lineare e di ordine M , si può scrivere nella seguente forma di carattere generale:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n^2}, \dots\right) = 0 \quad \text{con } \mathbf{x} \in V$$

nella quale compare almeno una derivata parziale di ordine M .

In molti casi cercare una soluzione del tipo: $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi_1(x_1) \phi_0(x_2, \dots, x_n)$ permette di riscrivere l'equazione differenziale nella cosiddetta "forma separata":

$$F = F_1\left(x_1, \phi_1, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1^2}, \dots\right) - F_0\left(x_2, \dots, x_n, \phi_0, \frac{\partial \phi_0}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \phi_0}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_n^2}, \dots\right) = 0$$

Si sottolinea che, in quanto funzioni di incognite differenti, F_1 e F_0 devono obbligatoriamente risultare entrambe uguali ad una costante C , affinché la loro somma sia identicamente nulla in ogni punto dello spazio (e, per problemi dinamici, in ogni istante di tempo). Questo comporta che l'equazione differenziale alle derivate parziali di partenza può essere risolta attraverso un sistema di due equazioni differenziali, la prima delle quali dipende da una sola incognita (equazione differenziale ordinaria) mentre l'altra, pur essendo ancora una equazione differenziale alle derivate parziali, dipende da $n-1$ incognite invece che dalle n originarie (riduzione del numero delle incognite).

$$\begin{cases} F_1\left(x_1, \phi_1, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1^2}, \dots\right) = C \\ F_0\left(x_2, \dots, x_n, \phi_0, \frac{\partial \phi_0}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \phi_0}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_n^2}, \dots\right) = C \end{cases}$$

La soluzione determinata attraverso il metodo di separazione delle variabili soddisfa in generale l'equazione differenziale originaria e, al più, soltanto una parte dei vincoli sul contorno ed iniziali presenti nel problema sotto indagine. Non è dunque, in generale, la soluzione del problema assegnato.

Poiché a differenti valori della costante C corrispondono diverse soluzioni, tutte compatibili con l'equazione differenziale originaria ma con andamenti differenti sul contorno del dominio, è possibile costruire una base di soluzioni che, opportunamente sovrapposte, conduca ad una soluzione che soddisfi, almeno in modo approssimato, alle specifiche sul contorno.

c) Metodo delle trasformazioni conformi

Attraverso la teoria delle funzioni di variabile complessa è possibile definire un approccio matematico che consente di pervenire alla determinazione della distribuzione dei campi per un'ampia classe di problemi elettromagnetici stazionari a geometria bidimensionale.

Sia $\mathbf{u}(x,y)$ un campo vettoriale stazionario piano armonico (cioè contemporaneamente irrotazionale e solenoidale) definito in una regione bidimensionale a connessione semplice. Sotto queste ipotesi sono definibili due funzioni scalari armoniche, $v(x,y)$ e $g(x,y)$ -denominate rispettivamente funzione potenziale e funzione flusso-, ciascuna associata in maniera biunivoca, a meno di due costanti arbitrarie, al campo $\mathbf{u}(x,y)$. Si riconosce facilmente che le linee equipotenziali e quelle a flusso costante fanno parte di due famiglie di curve reciprocamente ortogonali. Si introducano la variabile complessa $z=x+jy$ e la funzione *potenziale complesso per il campo piano armonico* $F(z)=v(x,y)+jg(x,y)$. Si verifica facilmente come $F(z)$ sia *una funzione analitica* (allo scopo devono essere verificate le due uguaglianze: $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$; $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$) e come, dalla conoscenza di questa, si risalga al campo \mathbf{u} . La possibilità di rappresentare un campo piano armonico tramite il potenziale complesso viene sfruttata per trasformare un problema di assegnate condizioni al contorno, e definito in un dominio Ω complesso, in un altro problema, ad esso correlato, ma definito in un dominio Ω^* per il quale la soluzione possa essere calcolata più agevolmente. Le funzioni complesse analitiche $z^*=W(z)$ e $z=W^{-1}(z^*)$, che mettono in corrispondenza biunivoca i domini Ω e Ω^* , trasformano anche le linee equipotenziali e le linee di campo di un dominio nelle corrispondenti linee equipotenziali e di campo dell'altro. Viene pertanto conservata nella trasformazione da un dominio all'altro la proprietà di ortogonalità delle due famiglie di curve. Il metodo delle trasformazioni conformi trae il suo nome proprio da questa ultima circostanza. Tra le varie trasformazioni conformi citiamo:

- la trasformazione bilineare che trasforma le circonferenze e le rette del piano Ω nelle rette e circonferenze del piano Ω^* : $z^* = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, sono costanti reali o complesse tali che $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.
- l'inversione per raggi reciproci che -indicato z^* con il numero complesso coniugato di z - associa a $z=r e^{j\varphi}$ il valore complesso $z^* = r^* e^{j\varphi^*} = \frac{r_0^2}{z} = \frac{r_0^2}{r} e^{j\varphi}$. Questa trasformazione associa, in altre parole, ad ogni punto $P(r, \varphi)$ del piano Ω la sua immagine $P(r^*, \varphi^* = \varphi)$ rispetto alla circonferenza γ di raggio r_0 centrata nell'origine. Con tale trasformazione ogni problema esterno al cerchio centrato nell'origine si tramuta in un problema interno e viceversa.

Introduzione ai metodi numerici

L'analisi o il progetto di un sistema di interesse applicativo, dal punto di vista logico può essere suddivisa in due passi tipici:

1. la definizione preliminare di un modello matematico approssimato (che includa tutte le informazioni essenziali del problema fisico)
2. lo studio del modello alla ricerca della soluzione.

Alle approssimazioni associate alla modellizzazione matematica del sistema reale è quasi sempre inevitabile aggiungere quelle ulteriori legate alla determinazione della soluzione numerica del modello stesso.

Sono proposte in letteratura varie possibili strategie per la risoluzione numerica dei principali modelli spazio-temporali.

Quelle che maggiore diffusione e successo hanno ottenuto negli ultimi anni sono

- il *Metodo delle Differenze Finite (FDM)*;
- il *Metodo degli Elementi di Frontiera (BEM)*;
- il *Metodo degli Elementi Finiti (FEM)*.

A scopo di chiarezza definiamo in modo descrittivo, piuttosto che matematico, quattro concetti che useremo ricorrentemente nel prosieguo del discorso e che risultano utili nell'impostazione del modello di qualunque problema di natura fisica: *sistema*, *dominio*, *equazioni governanti* e *termini di sorgente*.

- Il *sistema* è tipicamente, ma non necessariamente, un oggetto fisico composto da vari materiali: solidi, liquidi, gas, plasmi, o combinazione di questi. Un sistema EM include oltre ai materiali anche lo spazio vuoto che li ingloba.
- Il *dominio* del problema è tipicamente la regione spazio/temporale nella quale interessa studiare il sistema. In termini matematici esso rappresenta l'insieme di definizione delle variabili indipendenti spaziali e temporali. In alcuni tipi di analisi (*analisi spettrale*) come variabili indipendenti vengono assunte le trasformate di Fourier o di Laplace delle grandezze precedentemente citate, che dal punto di vista dimensionale sono frequenze temporali o spaziali.
- Le *equazioni governanti* sono relazioni matematiche che vincolano le variabili descrittive del sistema a variare nel tempo o nello spazio in modo da soddisfare a un insieme di leggi fisiche applicabili al problema sotto indagine. Tipicamente si tratta di equazioni integro-differenziali che esprimono la conservazione o il bilancio di qualche proprietà fisica, come la massa, la carica, il momento o l'energia. Queste possono essere anche delle equazioni che esprimono un principio variazionale, ed allora si presentano come un vincolo di minimo di un opportuno funzionale come un'energia potenziale. Sono incluse tra le equazioni governanti anche le relazioni costitutive, che descrivono le particolari proprietà fisiche dei materiali.

- I *termini sorgente o carichi* descrivono le sollecitazioni di origine esterna interagenti col sistema: forze, correnti, campi impressi, etc. Le sorgenti collocate all'interno del dominio spaziale del problema vengono chiamate sorgenti interne e compaiono direttamente nelle equazioni governanti; le sorgenti localizzate sulla frontiera del dominio (spaziale e/o temporale) oppure esternamente ad esso vengono invece chiamate sorgenti esterne, e i loro contributi inseriti nel modello matematico del problema attraverso le condizioni al contorno (sorgenti esterne al dominio spaziale) o iniziali (sorgenti presenti prima dell'istante iniziale dell'intervallo di studio).

Classificazione delle equazioni alle derivate parziali

La maggior parte dei problemi elettromagnetici lineari è modellata numericamente attraverso un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine che, limitandosi per semplicità al caso di funzione incognita dipendente da due sole variabili spaziali, $\Phi(x,y)$, nel caso più generale assume la seguente forma:

$$a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \Phi}{\partial x} + e \frac{\partial \Phi}{\partial y} + f \Phi = g$$

Se i coefficienti non dipendono dalle coordinate spaziali l'equazione differenziale sarà definita "a coefficienti costanti" e il problema "omogeneo e tempo-invariante".

Nel caso in cui anche uno solo dei coefficienti sia funzione del tempo, il problema sarà detto "tempo-variante".

Se almeno uno dei coefficienti è funzione delle coordinate spaziali il problema sarà detto "disomogeneo".

Nel caso in cui almeno uno dei coefficienti dipenda dalla funzione Φ o dalle sue derivate il problema (e la PDE associata) sarà detto "non lineare".

In definitiva, i coefficienti della PDE saranno costanti solo nel caso in cui tutti i materiali del dominio siano omogenei, tempo-invarianti e lineari.

In assenza di sorgenti interne, il termine noto della PDE è nullo ($g=0$) e l'equazione definita "omogenea". In caso contrario la PDE sarà definita "disomogenea".

In generale per avere soluzione unica, occorre specificare per una PDE sia condizioni al contorno che iniziali.

Ove occorresse specificare le sole condizioni al contorno, l'equazione differenziale sarebbe detta steady-state (stazionaria); altrimenti, se occorresse assegnare le sole condizioni iniziali verrebbe chiamata transitoria

Le equazioni differenziali alle derivate parziali utilizzate per la modellazione dei fenomeni EM sono usualmente classificate in tre differenti tipologie sulla base delle loro *curve caratteristiche*, ovvero delle curve che determinano il modo in cui i segnali elettromagnetici si propagano all'interno del dominio.

Nello specifico, una PDE lineare del secondo ordine viene classificata come ellittica, iperbolica e parabolica a seconda se:

$$\begin{cases} b^2 - 4ac < 0 & \text{ellittica} \\ b^2 - 4ac = 0 & \text{parabolica} \\ b^2 - 4ac > 0 & \text{iperbolica} \end{cases}$$

Il motivo della denominazione è da ricercare nel fatto che l'equazione algebrica:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

rappresenta un'iperbole, una parabola o un'ellisse a seconda della circostanza che il termine $b^2 - 4ac$ sia rispettivamente positivo, negativo o nullo.

Tipici esempi di equazioni iperboliche sono le equazioni di convezione e le equazioni delle onde. Quest'ultima, per il caso monodimensionale si scrive come:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

dove la costante v rappresenta la velocità di propagazione dell'onda nel dominio spaziale e dipende dai parametri caratteristici del materiale (permeabilità magnetica, permittività e conducibilità elettrica)

Un tipico esempio di equazione parabolica è l'equazione di diffusione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2)$$

nella quale il termine D è il cosiddetto "coefficiente di diffusione" e dipende dalle caratteristiche del materiale.

Infine il prototipo di un'equazione ellittica è l'equazione di Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y) \quad (3)$$

dove ρ è il termine sorgente. Nel caso in cui quest'ultimo risulti identicamente nullo, si perviene alla ben nota equazione di Laplace.

Da un punto di vista computazionale la distinzione che assume maggiore importanza è quella tra equazioni di tipo ellittico ed equazioni di altra categoria.

La soluzione dell'equazione (3) è una funzione statica, per trovare la quale è necessario specificare i suoi valori, oppure quelli della derivata normale, sulla frontiera spaziale del dominio di definizione (problemi siffatti sono detti, per questo motivo, *di valore al contorno*).

Nei problemi del tipo (1) e (2), invece, si parte dalla conoscenza del campo (o del potenziale) incognito all'istante iniziale e si è interessati a determinare la sua evoluzione temporale. Questi ultimi problemi sono generalmente definiti *a valore iniziale* o *di Cauchy*.

La sotto-classificazione dei problemi di Cauchy in iperbolici e parabolici è poco significativa dal punto di vista pratico in quanto mentre da una parte molti dei problemi di interesse pratico sono naturalmente di tipo misto, dall'altra gli schemi computazionali usualmente adoperati fanno sì che la maggior parte dei problemi iperbolici assuma forma mista all'atto della computazione.

Metodi delle differenze finite (FDM)

Tra i metodi numerici adoperati per risolvere equazioni differenziali alle derivate parziali il metodo alle differenze finite si distingue per l'ampiezza della classe dei problemi alla quale è applicabile.

Sebbene la paternità del metodo sia attribuita a C. F. Gauss (1777-1855), e Boltzmann abbia dimostrato nel 1892 l'applicabilità delle equazioni alle differenze per risolvere l'equazione di Laplace, è solo a partire dagli anni '40 che le differenze finite si sono vastamente diffuse.

EQUAZIONI ELLITTICHE

Si illustreranno di seguito le caratteristiche del metodo attraverso la soluzione di un semplice problema di elettrostatica, definito all'interno del dominio bidimensionale Σ e modellabile attraverso l'equazione di Poisson ed opportune condizioni al contorno sulla frontiera $\partial\Sigma$ del dominio di definizione.

Il modello matematico in un sistema di riferimento cartesiano assume la forma:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{su } \Sigma \quad (1)$$
$$\Phi(x,y) = \Phi_0(x,y) \quad \text{su } \partial\Sigma$$

dove $\Phi(x,y)$ è il potenziale scalare incognito, $\Phi_0(x,y)$ è il valore noto del potenziale sulla frontiera e ρ è la distribuzione di carica all'interno del dominio Σ .

Per risolvere il problema (1) attraverso le differenze finite (FD) bisogna suddividere preliminarmente la regione Σ in una rete di linee perpendicolari fra loro con un numero finito di intersezioni.

L'equazione di Poisson viene quindi riportata in forma algebrica attraverso l'introduzione di espressioni approssimate per le derivate parziali del secondo ordine rispetto alle incognite spaziali, x e y . In particolare, espandendo in serie di Taylor il potenziale scalare Φ nell'intorno del punto (x,y) si ottiene:

$$\Phi(x+h, y) \cong \Phi(x, y) + h \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} \quad (2)$$

$$\Phi(x-h, y) \cong \Phi(x, y) - h \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} \quad (3)$$

Sommando la (2) e la (3) e riarrangiando i termini, la derivata parziale seconda rispetto a x si può scrivere in funzione del solo potenziale $\Phi(x,y)$. Attraverso

operazioni analoghe si arriva ad un'espressione della derivata parziale seconda rispetto a y in funzione del solo potenziale $\Phi(x,y)$. Sostituendo queste espressioni nell'equazione differenziale (1) si arriva alla seguente forma approssimata dell'equazione di Poisson:

$$\Phi(x+h,y) + \Phi(x-h,y) + \Phi(x,y+h) + \Phi(x,y-h) - 4\Phi(x,y) = -\frac{\rho h^2}{\epsilon_0} \quad (4)$$

dove, per semplicità, si è assunto lo stesso incremento spaziale h nelle due direzioni. Si può scrivere un'equazione del tipo (4) per ogni nodo d'intersezione della rete: si avrà, infine, un sistema di n equazioni nelle n incognite che corrispondono ai potenziali dei nodi interni della rete.

I nodi che si trovano sulla frontiera della rete non sono associati a quantità incognite in quanto il loro potenziale è vincolato dalle condizioni al contorno.

In principio il sistema algebrico cui si è giunti può essere invertito. Tuttavia, se il numero di incognite, n , è molto grande, può essere conveniente trovare la soluzione per via iterativa, ricavando nel k -mo passo iterativo il valore del potenziale nel punto (x,y) attraverso l'espressione (4) nella quale si assumono quali valori di potenziale nei quattro punti che circondano (x,y) quelli determinati nell'iterazione immediatamente precedente. La procedura iterativa continua fino a soddisfare l'equazione (4) col grado di accuratezza prestabilito.

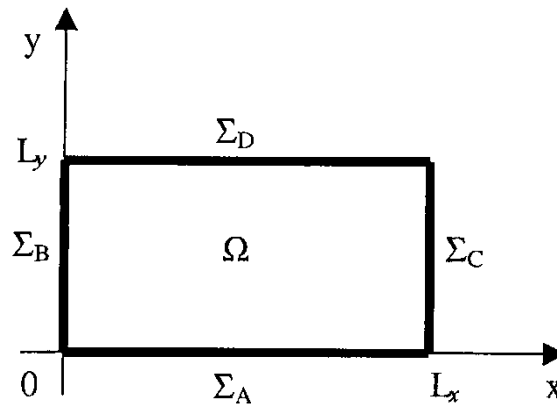


Figura 6.4: geometria di riferimento per il problema ellittico.

EQUAZIONI PARABOLICHE

Consideriamo il problema schematizzato in Fig. 6.1.

Un blocco di conduttore omogeneo di conducibilità σ e di permeabilità μ , indefinito nella direzione z , è alimentato da elettrodi perfettamente conduttori in cui circola una corrente superficiale, per effetto del forzamento imposto da un generatore collocato nel punto di ascisse $x=0$ che impone una corrente per unità di lunghezza pari a $K_s(t)$.

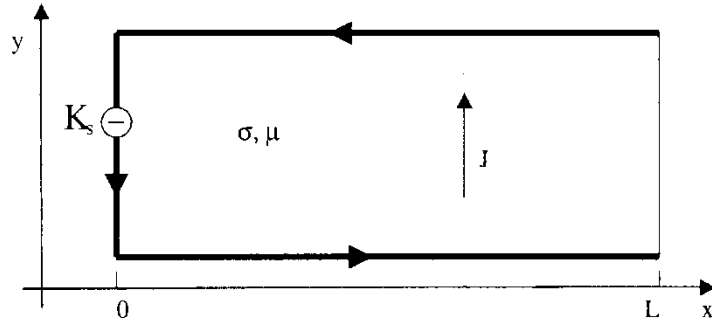


Figura 6.1: geometria di riferimento per il problema parabolico.

La corrente iniettata dal generatore viaggia in direzione x , lungo l'elettrodo inferiore per passare gradatamente nel secondo elettrodo attraverso il blocco conduttore e ritornare, infine, nel generatore.

Questa circolazione di corrente genera un campo magnetico la cui unica componente risulta orientata lungo la direzione z . Avendo supposto non vi sia dipendenza delle grandezze EM della coordinata y , risulta $\mathbf{H}=H_z(x,t) \mathbf{i}_z$

Si noti come il sistema abbia un comportamento analogo a quello di un solenoide mono-spira e, pertanto, all'esterno del blocco il campo magnetico risulti nullo. Pertanto, dalla continuità della componente tangenziale del campo magnetico, sul bordo del blocco risulta $H(L,t)=H_L(t)=0$ e $H(0,t)=H_0(t)=K_s(t)$.

Per questo problema conviene utilizzare la formulazione in termini di campo magnetico e risolvere il problema nel solo blocco conduttore, essendo note sulla frontiera del blocco ($x=0, x=L$) le condizioni al contorno da imporre (come si vede sono di tipo Dirichlet, ossia viene assegnato direttamente il valore dell'incognita).

$$\nabla \times (\sigma^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma^{-1} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

Il modello matematico associato al problema diventa:

$$\frac{\partial^2 H_Z}{\partial x^2} + \sigma\mu \frac{\partial H_Z}{\partial t} = 0; \quad (2)$$

$$H_Z(x=0, t) = H_0(t); H_Z(x=L, t) = H_L(t); H_Z(x, 0) = \hat{H}_0(x);$$

Per la soluzione si utilizzerà il metodo delle differenze finite e si applicheranno metodologie analoghe a quelle utilizzate nella determinazione della soluzione di un sistema ordinario di equazioni algebriche.

Per prima cosa si operi un **campionamento nello spazio e nel tempo** della funzione incognita $H_Z(x, t)$ con l'obiettivo di determinare il valore di questa funzione esclusivamente nei punti di ascisse x_j e negli istanti di tempo t_k :

$$H_{jk} = H(x_j, t_k), \quad j=1, \dots, N_x, \quad k=1, \dots, N_t$$

Si è assunto che l'istante di indice $k=0$ corrisponda all'istante iniziale per il quale è noto il valore del campo in ogni punto dello spazio, mentre i punti di indice $j=0$ e $j=N_x+1$, corrispondono ai punti di ascisse $x=0$ e $x=L$ nei quali vanno imposte le condizioni al contorno.

Infine, allo scopo di evitare complicazioni nelle espressioni matematiche utilizzate, si è assunto che i punti prescelti siano equi-intervallati nello spazio e nel tempo, ossia che le quantità: $\Delta x = x_j - x_{j-1}$ e $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ siano indipendenti dagli indici j e k rispettivamente.

In modo analogo a quanto visto nel caso di un sistema di equazioni differenziali di tipo ellittico è possibile algebrizzare la PDE attraverso le differenze finite.

METODO ESPPLICITO

Il metodo esplicito consiste nell'utilizzare per la derivata temporale un'espressione esplicita, simile a quella definita nel caso delle equazioni differenziali ordinarie:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{t_k} = \frac{H_{j,k} - H_{j,k-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (3)$$

Per la derivata spaziale si usa il cosiddetto schema alle differenze centrali, che conduce alla seguente espressione approssimata per la derivata seconda del campo incognito:

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_{t_k} = \frac{H_{j+1,k-1} + H_{j-1,k-1} - 2H_{j,k-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (4)$$

Pertanto, sostituendo la (3) e la (4) nella (2) si ottiene:

$$\frac{H_{j+1,k-1} + H_{j-1,k-1} - 2H_{j,k-1}}{\Delta x^2} - \sigma\mu \frac{H_{j,k} - H_{j,k-1}}{\Delta t} = 0; \quad (5)$$

e, ponendo
$$r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2 \sigma\mu}; \quad (6)$$

si ottiene:
$$H_{j,k} = (1-2r)H_{j,k-1} + rH_{j+1,k-1} + rH_{j-1,k-1}; \quad (7)$$

$$H_{0,k} = H_0(t_k); H_{N_x+1,k} = H_L(t_k); H_{j,0} = H_0^*(x_j);$$

in cui H_0^* è il valore noto di H all'istante iniziale.

La (7) consente di ottenere esplicitamente il valore di $H_{j,k}$ attraverso una combinazione di valori di H calcolati nell'istante precedente in un certo numero di punti dello spazio, da cui il nome di schema esplicito.

L'implementazione numerica è molto semplice e si basa su una riformulazione matriciale della (7).

Denotato con $\mathbf{h}_k = \begin{bmatrix} H_{1,k} \\ H_{2,k} \\ \vdots \\ H_{N_x,k} \end{bmatrix}$ il vettore dei valori di campo incogniti nei punti

campionati del dominio all'istante t_k , la (7) può essere scritta nella forma:

$$\mathbf{h}_k = \mathbf{P}\mathbf{h}_{k-1} + \mathbf{b}_1 H_{0,k-1} + \mathbf{b}_{N_x} H_{N_x+1,k-1}; \quad \text{dove } \mathbf{P} = \mathbf{I} + r\mathbf{C}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_{N_x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r \end{bmatrix}; \quad (8)$$

In figura è riportato il valore del campo in determinati istanti per $r=0.25$.

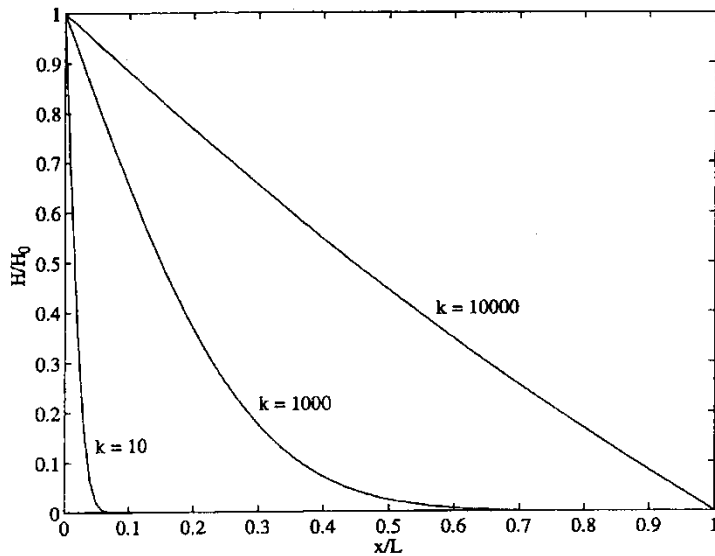


Figura 6.2: soluzione del problema parabolico per $r = 0.25$

Come si vede il campo, concentrato inizialmente intorno al punto $x=0$ (a causa dell'effetto pelle), col passare del tempo si diffonde all'interno del blocco, finché, dopo un elevato numero di passi temporali, decresce con legge lineare al variare dell'ascisse (questo succede quando la densità di corrente assume una distribuisce uniforme all'interno del blocco)

In fig. 6.3 è riportato il risultato per $r=0.51$. Come si vede in questo caso la distribuzione ottenuta è priva di senso fisico, il che ci induce a pensare che, in queste condizioni, l'algoritmo numerico non sia affidabile. Nel prossimo paragrafo verranno giustificate queste affermazioni.

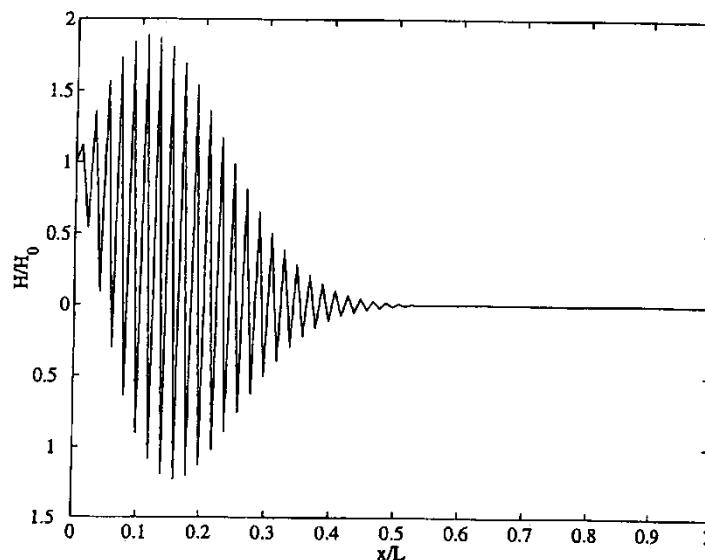


Figura 6.3: soluzione del problema parabolico per $r = 0.51$.

Convergenza, consistenza, stabilità

Per gli schemi alle differenze finite per le PDE, possono ripetersi tutte le considerazioni fatte nel caso delle equazioni differenziali ordinarie a proposito dei concetti di convergenza, consistenza e stabilità.

In particolare uno schema:

- si dice **convergente** quando per $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, la soluzione numerica tende a quella esatta dell'equazione differenziale originaria.
- Si dice consistente quando l'equazione algebrica approssimata, nel limite per $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ restituisce l'equazione differenziale di partenza.
- Si definisce l'ordine di un sistema osservando quanto rapidamente l'errore va a zero facendo tendere a zero il passo di integrazione spaziale e temporale (nell'esempio precedente, lo schema è di ordine 1 nel tempo e di ordine 2 nello spazio)
- Per quanto riguarda il concetto di stabilità, richiamiamo la definizione precedentemente data:

Un metodo numerico si dice stabile per un passo spaziale Δx e un passo temporale Δt assegnati se, denotate con h_k' e h_k'' le soluzioni fornite dal metodo numerico in corrispondenza delle perturbazioni δ_k' e δ_k'' , vale la (9a):

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ esiste } C > 0 \text{ tale che } \Delta_k = |\delta_k' - \delta_k''| < \varepsilon \Rightarrow |h_k' - h_k''| < C\varepsilon \quad \forall k > 0 \quad (9a)$$

Inoltre un metodo numerico si dice zero-stabile per un passo spaziale Δx assegnato e un passo temporale Δt sufficientemente piccolo se, denotate con h_k' e h_k'' le soluzioni fornite dal metodo numerico in corrispondenza delle perturbazioni δ_k' e δ_k'' , vale la (9b):

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ esiste } C, h_0 > 0 \text{ tale che per } \Delta t < \Delta t_0 \quad \Delta_k = |\delta_k' - \delta_k''| < \varepsilon \Rightarrow |h_k' - h_k''| < C\varepsilon \quad \forall k > 0 \quad (9b)$$

Per il problema della diffusione esplicita, si ottiene il seguente risultato:

$$|h_k' - h_k''| \leq \Delta_{\max} \sum_{n=0}^k \rho(\mathbf{P})^{k-n} = \Delta_{\max} \frac{1 - \rho(\mathbf{P})^{k+1}}{1 - \rho(\mathbf{P})} \quad (10)$$

dove $\Delta_{\max} = \max \|\Delta_k\|$, mentre $\rho(\mathbf{P})$ è il raggio spettrale della matrice, ovvero il modulo del massimo autovalore.

Pertanto condizione sufficiente affinché il metodo sia stabile è che risulti $\rho(\mathbf{P}) < 1$ (11), ossia che tutti gli autovalori abbiano modulo minore di 1.

Vediamo come questa condizione si riflette su Δx e Δt .

In base alla definizione (8), il generico autovalore μ della matrice \mathbf{P} è legato al corrispondente autovalore γ della matrice \mathbf{C} dalla seguente relazione:

$$\mu = 1 + r\gamma; \quad (12)$$

$$\text{con } 0 \geq \gamma \geq -4 \quad (13)$$

Pertanto dalla (11), (12) e (13) si ottiene: $0 \geq r\gamma \geq -2$

Ed infine, condizione sufficiente affinché il metodo esplicito sia stabile è che risulti $r \geq 1/2$ ovvero $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2 \sigma \mu}{2}$; (14)

Pertanto, non solo il metodo esplicito è stabile solo condizionatamente, ma anche la zero-stabilità è condizionata (cosa che non accadeva per le equazioni differenziali ordinarie). Difatti occorre garantire che $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ soddisfacendo la (14).

Si noti che in maniera analoga anche la consistenza può essere condizionata al fatto che $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ soddisfacendo ad una certa relazione.

La condizione (14) pone un vincolo molto stringente sul passo temporale.

In altri termini, una volta scelto un passo spaziale sufficiente a garantire una certa precisione alla soluzione spaziale, può accadere che il soddisfacimento della (14) dia come risultato un passo temporale tanto piccolo da far aumentare a dismisura il tempo richiesto per la ricerca numerica della soluzione.

Per questo motivo può essere conveniente utilizzare altri metodi che siano intrinsecamente stabili.

Metodo θ e metodo di Crank-Nicholson

Il metodo θ prevede di utilizzare per le equazioni differenziali ordinarie, la seguente espressione per la derivata temporale

$$\left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{x_j, t_\theta} = \frac{H_{j,k} - H_{j,k-1}}{\Delta t} + ((1-\theta)^2 - \theta^2)O(\Delta t) + O(h^2) \quad \text{con } t_\theta = t_{k-1} + \theta \Delta t \quad \text{e con } 1 \geq \theta \geq 0$$

Per la derivata seconda spaziale, si può utilizzare una formula alle differenze centrali in t_θ , valutata come combinazione lineare con coefficienti θ e $(1-\theta)$ delle derivate in t_{k-1} e t_k . Il risultato è:

$$\frac{(1-\theta)H_{j+1,k-1} + H_{j-1,k-1} - 2H_{j,k-1} + \theta H_{j+1,k} + H_{j-1,k} - 2H_{j,k}}{\Delta x^2} = \sigma \mu \frac{H_{j,k} - H_{j,k-1}}{\Delta t};$$

Per $\theta=0$ si ritrova lo schema esplicito, per $\theta=1$ si ha il cosiddetto schema implicito, mentre per $\theta=0.5$ si perviene allo schema di Crank-Nicholson che, a differenza degli altri risulta del secondo ordine anche nel tempo.

Sviluppando l'espressione precedente si ha:

$$-r\theta H_{j-1,k} + (1+2r\theta)H_{j,k} - r\theta H_{j,k} = r(1-\theta)H_{j+1,k-1} + [1-2r(1-\theta)]H_{j,k-1} + r(1-\theta)H_{j+1,k-1}$$

$$H_{0,k} = H_0(t_k); H_{N_x+1,k} = H_L(t_k); H_{j,0} = \hat{H}_0(x_j);$$

Che in forma matriciale diventa:

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{h}_k = \mathbf{P}_2 \mathbf{h}_{k-1} + b_1 (\theta \mathbf{H}_{0,k} + (1-\theta) \mathbf{H}_{0,k-1}) + b_{N_x} (\theta \mathbf{H}_{N_x+1,k} + (1-\theta) \mathbf{H}_{N_x+1,k-1}); ;$$

con $\mathbf{P}_1 = 1 - r\theta \mathbf{C}; \mathbf{P}_2 = 1 - r(1-\theta) \mathbf{C};$

Dunque per ogni istante occorre ora risolvere un sistema di equazioni del tipo $\mathbf{P}_1 \mathbf{x} = \mathbf{c}$
 Con \mathbf{P}_1 matrice tridiagonale.

Per quanto riguarda la stabilità, il metodo risulta incondizionatamente stabile per $\theta \geq 0.5$ e condizionatamente stabile per $\theta < 0.5$. In questo caso, la condizione è che

$$r \leq \frac{1}{2-4\theta} \Leftrightarrow \Delta t \leq \frac{\sigma \mu \Delta x^2}{2-4\theta}$$

In base a quanto detto, si può concludere che per $\theta=0$ l'onere computazionale è minimo, per $\theta=0.5$ l'ordine dello schema è massimo; per $\theta=1$ la stabilità è massima. In genere si utilizza un valore di $1 \geq \theta \geq 0.5$, mentre sono sconsigliabili i valori di θ inferiori a 0.5 che non garantiscono stabilità incondizionata.

Condizioni di Neumann, domini infiniti, e geometrie complesse

Il metodo descritto si complica quando la frontiera del dominio non è regolare, quando le condizioni al contorno sono di tipo Neumann o, comunque, diverse da Dirichlet, e quando l'operatore differenziale è di natura diversa da quella dell'operatore di Laplace. In questi casi, può risultare conveniente utilizzare metodi basati sugli elementi finiti.

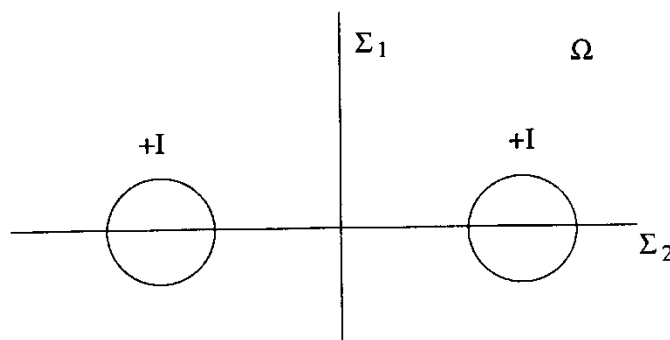


Figura 6.5: due conduttori cilindrici indefiniti.

Per mettere in luce le debolezze del metodo alle differenze finite consideriamo la geometria di fig.6.5 che rappresenta due conduttori nello spazio vuoto, indefiniti, a sezione cilindrica e percorsi da correnti equiverse uniformemente distribuite. Supponiamo di voler determinare il campo magnetico in ogni punto dello spazio. Poiché operiamo in geometria bidimensionale conviene utilizzare la formulazione basata sul potenziale vettore. Per simmetria i piani di mezzeria Σ_1 e Σ_2 sono tali che il campo magnetico su di essi puramente normale; questo implica che $\partial A/\partial n=0$. Dunque la formulazione del problema è:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla A \right) = -J_z^* \Leftrightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu_0 J_z^* \quad \text{in } \Omega$$

$$\frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Sigma_1} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Sigma_2} = 0, \quad A \text{ regolare all'infinito}$$

Dove Ω è il primo quadrante, ossia un dominio illimitato. Anche ora la funzione incognita viene campionata in un insieme di punti equispaziati in x e y:

$$A_{i,j} = A(x_i, y_j), \quad i = 1, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y,$$

Di nuovo, posto $\Delta x = \Delta y$, utilizziamo le differenze centrali, ottenendo:

$$A_{i,j} = \frac{1}{4} (A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1}) \quad (5)$$

I problemi che siamo chiamati ad affrontare sono i seguenti:

- a) Il dominio di risoluzione è infinito;
- b) Occorre imporre delle condizioni di Neumann
- c) La geometria non è approssimata in maniera esatta con una griglia di punti equispaziata.

Per quanto riguarda il problema a), in linea teorica occorrerebbero infiniti punti per coprire il dominio illimitato. Il modo più semplice, anche se non molto elegante, è quello di introdurre una frontiera fittizia, a distanza finita dal conduttore, su cui si impone $A=0$. In questo modo ci siamo ricondotti ad un problema su un dominio limitato. Il prezzo da pagare è un errore aggiuntivo, dovuto al fatto che imponiamo $A=0$ a distanza finita dai conduttori piuttosto che all'infinito. Se, comunque, la frontiera fittizia è posta ad una distanza ragionevole dai conduttori, l'errore può essere contenuto in termini accettabili.

Riguardo al punto b) la difficoltà nasce dal fatto che la formula (5) coinvolge solo i valori della funzione e non anche, almeno direttamente, quelli della sua derivata. Per questo motivo è abbastanza semplice imporre condizioni al contorno di Dirichlet, mentre non lo è affatto imporre condizioni al contorno di tipo Neumann. Analogo problema sorge allorché occorre imporre condizioni di raccordo che coinvolgono le derivate normali della grandezza incognita sulle superfici di discontinuità delle proprietà materiali.

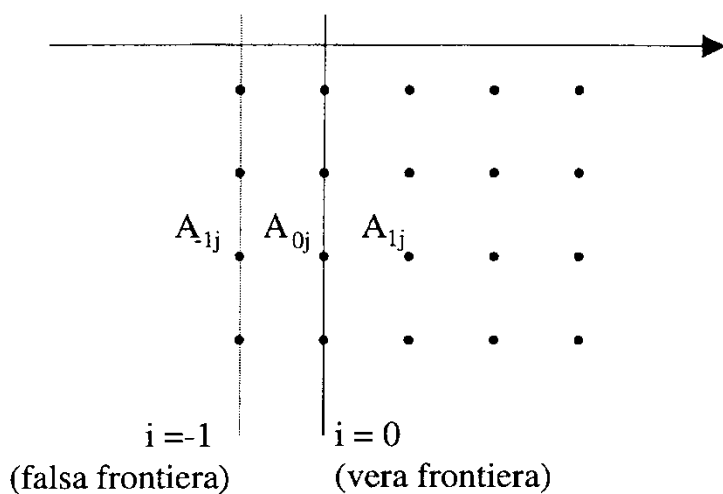


Figura 6.6: falsa frontiera per l'imposizione di condizioni di Neumann.

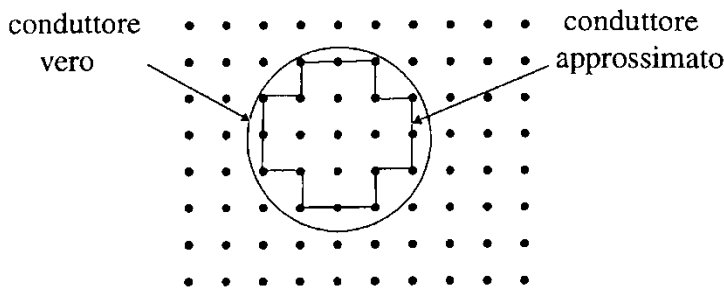


Figura 6.7: approssimazione della traccia del conduttore.

Per ovviare a questo problema, si definisce una “falsa frontiera” come illustrato in fig. 6.6 su cui si introducono delle incognite aggiuntive che compaiono nelle equazioni scritte sui punti della frontiera vera. La derivata normale (lungo x), in corrispondenza del punto del contorno vero ($i=0, j$) può essere approssimato al secondo ordine come: $\frac{\partial A}{\partial x}\Big|_{0,j1} = \frac{A_{1,j} - A_{-1,j}}{2\Delta x} + \Theta(\Delta x^2)$.

Pertanto per imporre la condizioni di Neumann omogenea richiesta basta far sì che: $A_{1,j} = A_{-1,j} \forall j$. Sempre sfruttando la stessa equazione è possibile imporre anche condizioni di Neumann non omogenee.

Il problema c) è senz’altro il più grave dei tre evidenziati in quanto pone severi limiti all’impiego del metodo delle differenze finite quando le forme geometriche del dominio di interesse risultino piuttosto complesse.

A titolo di esempio, in fig. 6.7a è mostrato in qual modo sia possibile approssimare un conduttore cilindrico: nella modellazione numerica la circonferenza assume la forma di una specie di croce! Si può immaginare quanto maggiormente penalizzate divenga questa situazione nei problemi 3D oppure allorché su una geometria irregolare occorra imporre condizioni al contorno di Dirichlet o, peggio che mai, di Neumann.

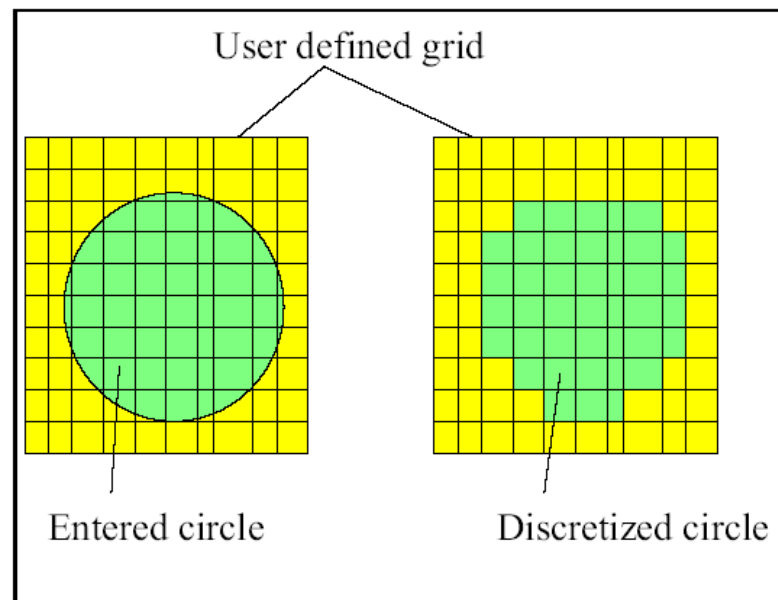


Fig.6.7a Approssimazione degli oggetti a frontiera curva attraverso le differenze finite

ALGORITMO DI YEE PER IL PROBLEMA DELLA PROPAGAZIONE

Il metodo delle Differenze Finite può essere utilizzato anche nello studio della propagazione dei campi EM in domini lineari, isotropi, non isteretici e passivi. (Eventuali mezzi attivi possono essere portati in conto come elementi a parametri concentrati connessi alle porte interne del dominio mediante l'approccio così detto di compressione). Sotto queste ipotesi il modello matematico del problema diventa:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) / \partial t \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) / \partial t\end{aligned}\quad (1)$$

Con le relazioni costitutive

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E}\end{aligned}\quad (2)$$

L'algoritmo di Yee non impone particolari vincoli sulle proprietà costitutive dei materiali del dominio oppure sulla sua forma geometrica. La sola limitazione è che la struttura deve poter essere divisa in celle all'interno delle quali le proprietà dei materiali si mantengano costanti. Queste celle possono essere ottenute attraverso l'intersezione di un sistema di piano cartesiani.

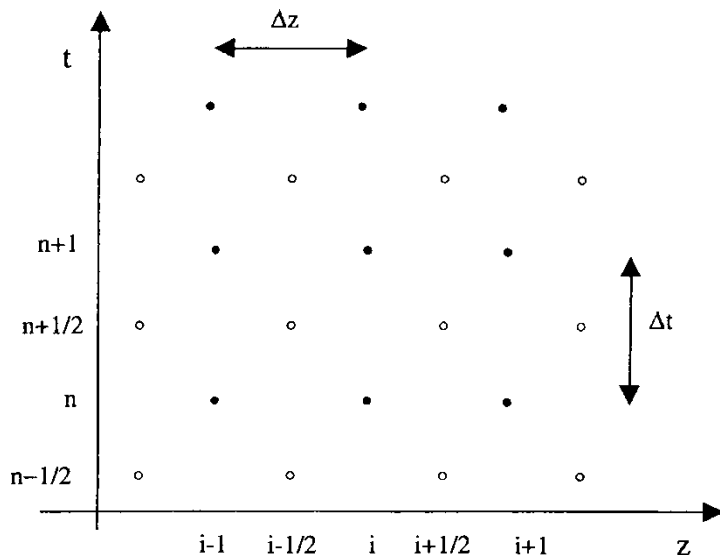
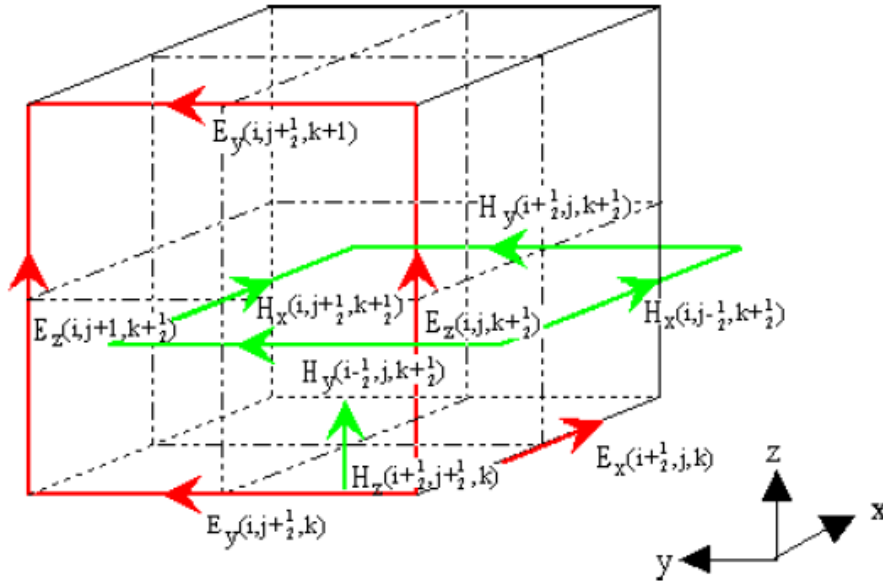


Figura 6.8: griglie intercalate per lo schema FDTD.

L'idea fondamentale su cui si basa l'algoritmo è quella di piazzare le componenti dei campi incogniti in una certa posizione di ciascuna cella, in modo che ogni componente del campo elettrico \mathbf{E} sia circondata da un sistema di quattro componenti del campo magnetico \mathbf{H} orientate come in figura e viceversa. In questo modo è possibile approssimare le equazioni di Maxwell secondo uno schema alle differenze centrali



Per esempio la derivata temporale della componente \underline{B}_x del campo di induzione magnetica viene calcolata come:

$$\dot{B}_x = \frac{E_y(x, y, z + \frac{\delta z}{2}) - E_y(x, y, z - \frac{\delta z}{2})}{\delta z} - \frac{E_z(x, y + \frac{\delta y}{2}, z) - E_z(x, y - \frac{\delta y}{2}, z)}{\delta y}$$

Si noti come anche la derivata temporale sia approssimata attraverso uno schema alle differenze centrali.

In aggiunta, si fa in modo che i valori calcolati per i campi \underline{B} ed \underline{E} siano shiftati di mezzo time-step nel tempo, secondo lo schema noto in letteratura come “leap-frog”. Per ogni componente A dei campi si utilizza la rappresentazione:

$$A(x, y, z, t) = A \left(\sum_i \delta x_i, \sum_j \delta y_j, \sum_k \delta z_k, n \delta t \right) \hat{=} A_{i,j,k}^n$$

Si perviene in questo modo al seguente schema FDTD

$$\begin{aligned}
E_{x_{i^+,j,k}}^{n+1} &= \frac{1 - \frac{\sigma_{ijk}\delta t}{2\epsilon_{ijk}}}{1 + \frac{\sigma_{ijk}\delta t}{2\epsilon_{ijk}}} E_{x_{i^+,j,k}}^n + \frac{2\frac{\delta t}{\epsilon_{ijk}}}{1 + \frac{\sigma_{ijk}\delta t}{2\epsilon_{ijk}}} \left(\frac{H_{z_{i^+,j^+,k}}^{n+1/2} - H_{z_{i^+,j^-,k}}^{n+1/2}}{\delta y_j + \delta y_{j-1}} - \frac{H_{y_{i^+,j,k^+}}^{n+1/2} - H_{y_{i^+,j,k^-}}^{n+1/2}}{\delta z_k + \delta z_{k-1}} \right) \\
E_{y_{i,j^+,k}}^{n+1} &= \frac{1 - \frac{\sigma_{ijk}\delta t}{2\epsilon_{ijk}}}{1 + \frac{\sigma_{ijk}\delta t}{2\epsilon_{ijk}}} E_{y_{i,j^+,k}}^n + \frac{2\frac{\delta t}{\epsilon_{ijk}}}{1 + \frac{\sigma_{ijk}\delta t}{2\epsilon_{ijk}}} \left(\frac{H_{x_{i,j^+,k^+}}^{n+1/2} - H_{x_{i,j^+,k^-}}^{n+1/2}}{\delta z_k + \delta z_{k-1}} - \frac{H_{z_{i^+,j^+,k}}^{n+1/2} - H_{z_{i^-,j^+,k}}^{n+1/2}}{\delta x_i + \delta x_{i-1}} \right) \\
E_{z_{i,j,k^+}}^{n+1} &= \frac{1 - \frac{\sigma_{ijk}\delta t}{2\epsilon_{ijk}}}{1 + \frac{\sigma_{ijk}\delta t}{2\epsilon_{ijk}}} E_{z_{i,j,k^+}}^n + \frac{2\frac{\delta t}{\epsilon_{ijk}}}{1 + \frac{\sigma_{ijk}\delta t}{2\epsilon_{ijk}}} \left(\frac{H_{y_{i^+,j,k^+}}^{n+1/2} - H_{y_{i^-,j,k^+}}^{n+1/2}}{\delta x_i + \delta x_{i-1}} - \frac{H_{x_{i,j^+,k^+}}^{n+1/2} - H_{x_{i,j^-,k^+}}^{n+1/2}}{\delta y_j + \delta y_{j-1}} \right) \\
H_{x_{i,j^+,k^+}}^{n+1/2} &= H_{x_{i,j^+,k^+}}^{n-1/2} + \frac{\delta t}{\mu_{ijk}} \left(\frac{E_{y_{i,j^+,k+1}}^{n+1/2} - E_{y_{i,j^+,k}}^{n+1/2}}{\delta z_k} - \frac{E_{z_{i,j+1,k^+}}^{n+1/2} - E_{z_{i,j,k^+}}^{n+1/2}}{\delta y_j} \right) \\
H_{y_{i^+,j,k^+}}^{n+1/2} &= H_{y_{i^+,j,k^+}}^{n-1/2} + \frac{\delta t}{\mu_{ijk}} \left(\frac{E_{z_{i+1,j,k^+}}^{n+1/2} - E_{z_{i,j,k^+}}^{n+1/2}}{\delta x_i} - \frac{E_{x_{i^+,j,k+1}}^{n+1/2} - E_{x_{i^+,j,k}}^{n+1/2}}{\delta z_k} \right) \\
H_{z_{i^+,j^+,k}}^{n+1/2} &= H_{z_{i^+,j^+,k}}^{n-1/2} + \frac{\delta t}{\mu_{ijk}} \left(\frac{E_{x_{i^+,j+1,k}}^{n+1/2} - E_{x_{i^+,j,k}}^{n+1/2}}{\delta y_j} - \frac{E_{y_{i+1,j^+,k}}^{n+1/2} - E_{y_{i,j^+,k}}^{n+1/2}}{\delta x_i} \right)
\end{aligned}$$

Gli apici i^\pm denotano uno shift spaziale di mezza cella, I parametri discreti dei materiali sono ottenuti da quelli continui del dominio reale attraverso uno speciale schema di media.

Le equazioni possono essere risolte ricorsivamente a partire dalle condizioni iniziali e al contorno assegnate. I valori dei campi sono aggiornati ad ogni time-step e generalmente cancellati (a meno che non si decida preventivamente di salvarli durante la computazione in appositi vettori).

Si può notare come questo schema non richieda alcuna inversione matriciale e, per questo, è possibile eseguire il calcolo con bassa precisione nella rappresentazione dei numeri (reali a 4 byte), in modo da limitare la richiesta di memoria per la simulazione a soli 24 bytes per cella.

Metodo degli elementi di frontiera(BEM)

Un problema elettromagnetico può essere descritto matematicamente attraverso un sistema di equazioni differenziali a cui vanno aggiunte opportune condizioni iniziali e al contorno. Se si definisce una funzione (detta “di Green”) che soddisfi l'equazione differenziale per condizioni al contorno omogenee e una sorgente concentrata in un punto del dominio (funzione di Dirac spaziale), la soluzione del problema di campo può essere espressa attraverso la somma di due termini, il primo dei quali è l'integrale (esteso all'intero dominio di definizione) della funzione sorgente moltiplicata per la funzione di Green, mentre il secondo termine è un integrale di superficie che tiene conto delle condizioni imposte sulla frontiera.

Attraverso questo approccio l'equazione differenziale viene ricondotta ad un'equazione integrale tipo la (4) che, a volte, può essere risolta più facilmente.

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV' + \oint_{\Sigma} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n} \right] d\Sigma' \quad (4)$$

Durante gli anni '60 R.Harrington sviluppò il metodo dei Momenti per la soluzione numerica delle equazioni integrali.

In base a questa tecnica, le equazioni integrali sono trasformate in equazioni algebriche attraverso l'introduzione di funzioni test e peso per il campo incognito.

Alla fine degli anni '70 C. Brebbia ha proposto il cosiddetto metodo degli elementi di frontiera (BEM) nel quale le equazioni integrali sono risolte discretizzando la frontiera in Elementi Finiti, chiamati per l'appunto “elementi di Frontiera”.

Per illustrare lo spirito del metodo si supponga di voler calcolare il valore del potenziale $\phi(\mathbf{x})$ che soddisfa il problema di Poisson nel dominio V con condizioni al contorno di tipo Neumann sulla frontiera ∂V :

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{in } V \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f_0(\mathbf{x}) \quad \text{su } \partial V \quad (5b)$$

Applicando il teorema di Green si è visto che attraverso la (4) è possibile calcolare il valore di $\phi(\mathbf{x})$ per ogni punto appartenente al dominio V a partire dalla funzione di Green che soddisfa l'equazione differenziale (5a) e dai valori assunti dal potenziale $\phi(\mathbf{x})$ e dalla sua derivata normale sulla frontiera ∂V . Di norma è dato conoscere solo una delle due ultime funzioni richieste (ad esempio, nel caso in esame la (5b) fornisce il valore della derivata del potenziale). Si è visto d'altronde che, se si è in grado di calcolare la funzione di Green che soddisfi alla (5a) e che inoltre abbia derivata normale nulla su ∂V , allora la sola condizione (5b) basta per determinare in maniera univoca il valore di $\phi(\mathbf{x})$ in ogni punto del dominio.

Va subito aggiunto che, in generale, è impresa tutt'altro che agevole determinare la funzione di Green che soddisfi alle condizioni richieste.

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV' + \oint_{\Sigma} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n} \right] d\Sigma'$$

Nei metodi BEM si calcola, allora, la particolare funzione di Green che soddisfa la condizione (5a) e le condizioni di regolarità all'infinito e si determina il valore assunto da $\phi(\mathbf{x})$ sulla sola frontiera ∂V risolvendo ivi numericamente l'equazione integrale (4), che nei punti regolari della frontiera assume la forma:

$$\frac{1}{2} \phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV' + \oint_{\Sigma} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n} \right] d\Sigma'$$

Calcolato in questo modo il valore del potenziale sulla frontiera, dalla (4) si può determinare il valore di $\phi(\mathbf{x})$ in ogni punto del dominio V .

Al contrario dei metodi FEM, che richiedono grossi sforzi di discretizzazione e utilizzano grosse matrici di tipo sparso, il BEM è caratterizzato da basso sforzo di modellizzazione e fa uso di matrici relativamente compatte anche se densamente popolate e non simmetriche. Nel quadro dell'elettromagnetismo i metodi BEM sono stati applicati a problemi bidimensionali e tridimensionali di magnetostatica, elettrostatica, elettro-cinematica, propagazione.

I maggiori inconvenienti ad essi collegati si riassumono nei seguenti punti:

- anche nel caso in cui l'operatore di partenza sia auto-aggiunto le matrici associate al sistema da risolvere cui si perviene non sono né simmetriche né tanto meno definite positive, e, pertanto, non è sempre possibile avere sufficienti garanzie di convergenza. Un ulteriore punto a favore dei metodi FEM è costituito dal fatto che la soluzione numerica ha in alcuni punti un tasso di convergenza notevolmente più alto rispetto a quello medio sull'intero dominio (*superconvergenza*), proprietà questa che non è dimostrata per i metodi BEM.

- È richiesta la soluzione numerica di un'equazione integrale sulla frontiera, operazione che può produrre forti mal-condizionamenti a causa dei nuclei singolari presenti nelle funzioni di Green sotto il segno di integrale.

- Il minore sforzo di discretizzazione non è sempre un vantaggio significativo da un punto di vista operativo. Difatti, generalmente, nello studio di un problema pratico sono spesso richieste analisi ripetitive, sia al fine di stimare l'errore numerico associato alla soluzione sia, situazione questa abbastanza frequente, per iterazioni progettuali o, ancora, per studi parametrici. Il costo connesso con la preparazione di una complicata mesh FE è pertanto solo una piccola frazione del costo globale dell'analisi, ed anzi, grazie all'introduzione di sempre migliori preprocessori automatici, tende a diventare sempre meno significativo.