

Università degli Studi della Basilicata



Corso di Elettrotecnica

Elementi di elettromagnetismo

Prof. Fresa Raffaele

SISTEMI DI COORDINATE

Dato un sistema di riferimento, esistono molti modi per descrivere la posizione di un punto.

Ciascuna delle corrispondenze biunivoche e continue che possono stabilirsi tra i punti di uno spazio e le coppie (risp. le terne) ordinate di numeri reali costituisce un **sistema di coordinate nello spazio 2D** (risp. 3D). In 2D (risp. 3D) il passaggio da un sistema di coordinate ad un altro avviene attraverso l'individuazione di due (risp. tre) funzioni di trasformazione $u(x,y)$ $v(x,y)$ (risp. $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ e $w(x,y,z)$), dove (x,y) (risp. (x,y,z)) rappresenta la coppia (risp. terna) di coordinate nel sistema di partenza e (u,v) (risp. (u,v,w)) quella nel nuovo sistema

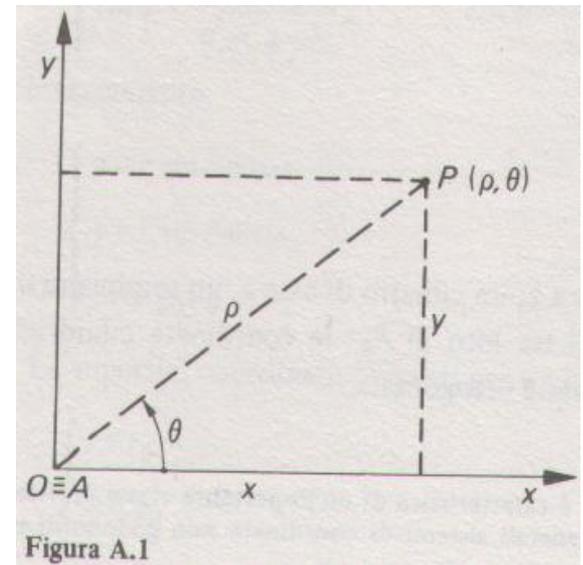
$$\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases}$$

Ad esempio in 2D, per passare (fig. A.1) dalle coordinate cartesiane ortogonali (x,y) , alle coordinate polari (ρ, θ) , è sufficiente porre:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} & \rho > 0 \\ \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Mentre la trasformazione inversa si realizza attraverso le funzioni:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \theta \\ y = \rho \cdot \sin \theta \end{cases}$$



COORDINATE CILINDRICHE: r, φ, z

coordinate (fig.A.2) sono legate alle coordinate cartesiane x, y, z dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} & r > 0 \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z = z \end{cases}$$

viceversa:

$$\begin{cases} x = r * \cos \varphi \\ y = r * \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

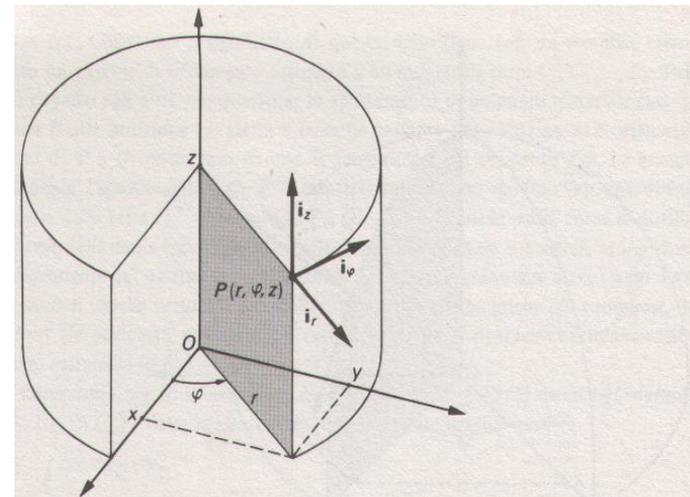


Figura A.2

Coordinate cilindriche di un punto; i_r, i_φ, i_z sono i versori tangenti alle linee coordinate passanti per il punto.

COORDINATE SFERICHE: r, θ, φ

Tali coordinate (fig.A.3) sono legate alle coordinate cartesiane x, y, z dalle relazioni:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & r > 0 \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

viceversa:

$$\begin{cases} x = r * \sin \theta * \cos \varphi \\ y = r * \sin \theta * \sin \varphi \\ z = r * \cos \theta \end{cases}$$

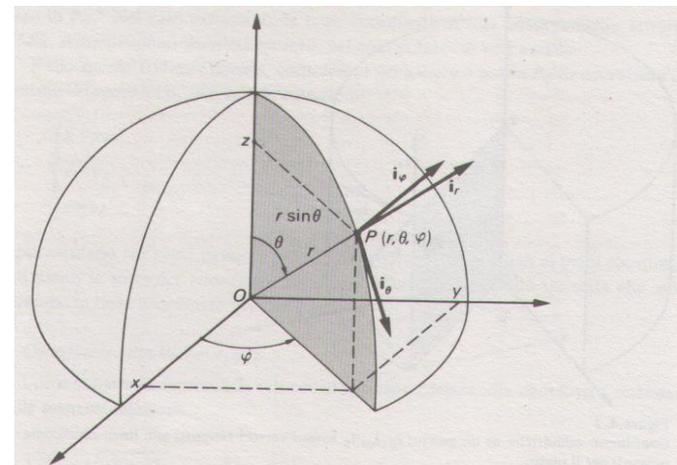


Figura A.3

Coordinate sferiche di un punto; i_r, i_θ, i_φ sono i versori tangenti alle linee coordinate passanti per il punto.

CAMPI SCALARI E CAMPI VETTORIALI

Sia Ω un dominio dell'ordinario spazio euclideo tridimensionale e sia U una funzione, definita in Ω , che associa ad ogni punto P di tale dominio una grandezza scalare di valore $U(\underline{P})$; in queste condizioni si dice che in Ω è definito un **CAMPO SCALARE** U .

Se, invece, in Ω è definita una funzione \underline{A} che associ a ciascun punto P di Ω una grandezza vettoriale $\underline{A}(\underline{P})$, si dice che in Ω è definito un **CAMPO VETTORIALE** \underline{A} .

Ogni campo vettoriale $\underline{A}(\underline{P})$ può essere rappresentato mediante tre funzioni scalari.

Ad es. proiettando il campo vettoriale $\underline{A}(\underline{P})$ lungo i tre assi cartesiani risulta:

$$A_x(x,y,z), A_y(x,y,z) \text{ e } A_z(x,y,z).$$

Se un campo non dipende dal tempo viene chiamato **CAMPO STAZIONARIO**.

Se un campo non dipende dalle coordinate del punto spaziale viene detto **UNIFORME**.

FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

Consideriamo un campo vettoriale $\underline{\mathbf{A}}$ definito in una regione Ω , e sia S una superficie non chiusa contenuta in Ω (fig. A.21).

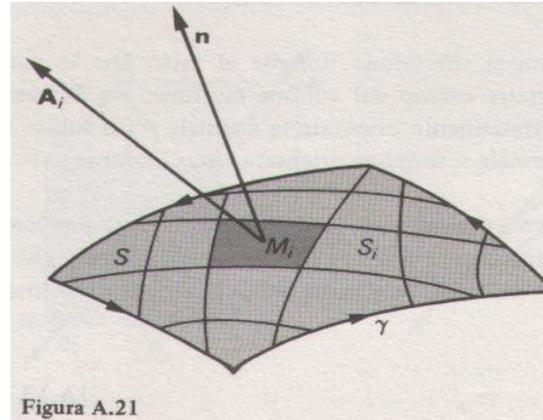


Figura A.21

Sia γ la curva chiusa che “orla” tale superficie. Assegnamo ad arbitrio un verso su γ e orientiamo la normale $\hat{\mathbf{n}}$ a S , in maniera tale che il verso assunto su γ e quello di $\hat{\mathbf{n}}$ siano tra loro legati rispettivamente secondo il senso di rotazione di una vite destrorsa. Supponiamo di suddividere la superficie S in un numero N di parti e siano $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ le aree di tali sotto-superfici. Consideriamo per ogni sotto-superficie S_i , il punto baricentrico M_i e il valore assunto dal campo vettoriale $\underline{\mathbf{A}}$ in corrispondenza di tale punto e calcoliamo la sommatoria Φ_N :

$$\Phi_N = \sum_{k=1}^N \overrightarrow{\mathbf{A}}_k \cdot \hat{\mathbf{n}} \sigma_k$$

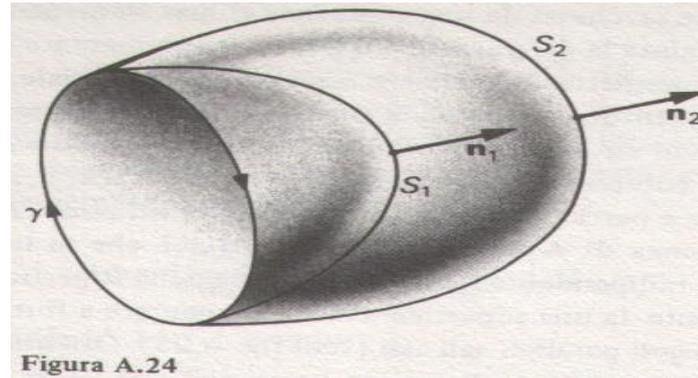
Il valore limite di Φ_N per N che tende all'infinito (in questa situazione i diametri delle parti S_i tendono a zero e ogni sotto-superficie diventa planare) si dice **FLUSSO del campo $\underline{\mathbf{A}}$** attraverso la superficie orientata S . Si noti che in questa situazione la sommatoria precedente si trasforma nel seguente integrale di superficie

$$\Phi_S = \iint_S \overrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS$$

Un campo vettoriale $\underline{\mathbf{A}}$ si definisce **solenoidale** o **conservativo per il flusso** se *il suo flusso uscente attraverso una generica superficie chiusa contenuta nel suo dominio di definizione risulta nullo*, ossia vale la relazione

$$\iint_S \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

Consideriamo, ora, la superficie chiusa Σ costituita dall'unione di S_1 e S_2 e applichiamo ad essa la proprietà di conservazione del flusso (fig.A.24).



$$\iint_{\Sigma} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{n}_2 dS + \iint_{S_1} \vec{\mathbf{A}} \cdot (-\vec{n}_1) dS = 0$$

$$\iint_{S_2} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{n}_2 dS = \iint_{S_1} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{n}_1 dS$$

Se un campo vettoriale $\underline{\mathbf{A}}$ è solenoidale in un dato dominio, il flusso attraverso tutte le superfici non chiuse aventi come contorno (o «orlate da») una stessa linea chiusa γ , comunque scelta (purché interamente contenuta nel dominio di definizione di $\underline{\mathbf{A}}$), avrà lo stesso valore. In questo caso, quando si calcola il flusso di $\underline{\mathbf{A}}$ è preferibile associarlo **ALLA LINEA CHIUSA** piuttosto che alla particolare superficie che si sta considerando.

DIVERGENZA DI UN CAMPO VETTORIALE; TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Consideriamo un campo vettoriale $\underline{\mathbf{A}}$ definito in una regione spaziale Ω e un dominio spaziale τ contenuto in Ω e limitato da una superficie chiusa regolare Σ ; il rapporto tra il flusso di $\underline{\mathbf{A}}$ uscente da Σ e il volume $V(\tau)$ della regione racchiusa da Σ è:

$$\frac{\Phi_{\Sigma}}{V(\tau)} = \frac{\iint_{\Sigma} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS}{V(\tau)}$$

Consideriamo il limite di tale rapporto quando il volume $V(\tau)$ sia fatto tendere a zero facendo contrarre la regione τ attorno a un punto fisso P_0 . Se questo limite esiste ed è finito, poniamo:

$$\lim_{V(\tau) \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Sigma} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS}{V(\tau)} = \nabla_{P_0} \cdot \vec{\mathbf{A}}$$

che rappresenta la **divergenza del campo vettoriale \mathbf{A}** nel punto P_0 .

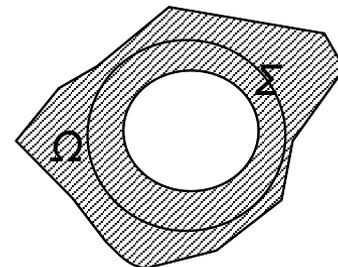
TEOREMA DELLA DIVERGENZA (DI GAUSS – OSTROGRADSKIJ)

Sia $\underline{\mathbf{A}}$ un campo vettoriale definito in una regione spaziale Ω (a connessione superficiale semplice), limitata dalla superficie chiusa Σ . Se in ogni punto di Ω è definibile la divergenza di $\underline{\mathbf{A}}$, risulta:

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} d\tau = \iint_{\Sigma} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dS \quad \text{dove } \tau \text{ è il volume della regione racchiusa da } \Sigma.$$

N.B. Una regione Ω si dice a connessione superficiale semplice se è possibile contrarre ad un punto ogni superficie Σ costituita da punti appartenenti ad Ω senza uscire mai da Ω .

La regione tratteggiata Ω , nella figura a lato, non è a connessione superficiale semplice



ROTORE DI UN CAMPO VETTORIALE. TEOREMA DI STOKES

Consideriamo un campo vettoriale $\underline{\mathbf{A}}$ definito in una regione spaziale Ω , e sia P un punto di tale regione. Assegnata una generica superficie infinitesima piana S che includa P , sia γ la linea chiusa che ne costituisce l'orlo. Facciamo il rapporto tra la circuitazione di $\underline{\mathbf{A}}$ estesa a γ e l'area $A(S)$ della superficie:

$$R = \frac{\oint_{\gamma} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{t} d\ell}{A(S)}$$

Immaginiamo di fare contrarre la superficie S attorno al punto P mantenendo fissa la normale \mathbf{n} a S . Consideriamo il limite del rapporto R per $A(S)$ che tende a zero, se tale limite esiste ed è finito, poniamo:

$$R_n = \lim_{A(S) \rightarrow 0} R$$

R_n rappresenta il **rotore del campo vettoriale $\underline{\mathbf{A}}$** nel punto P e si indica:

$$\left(\nabla_P \times \vec{\mathbf{A}} \right)_n = \lim_{A(S) \rightarrow 0} \frac{\oint_{\gamma} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{t} d\ell}{A(S)}$$

L'operatore di rotore, applicato a un campo vettoriale \mathbf{A} , definisce un nuovo campo vettoriale.

TEOREMA DI STOKES

A un campo vettoriale definito in una regione spaziale Ω e sia γ una linea chiusa contenuta in Ω ; detta S una qualsiasi superficie (aperta) che abbia la linea chiusa γ quale orlo, se in tutti i punti di Σ è definibile l'operatore rotore di **A**, risulta:

$$\oint_{\gamma} \vec{A} \cdot \vec{t} \, dl = \iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$$

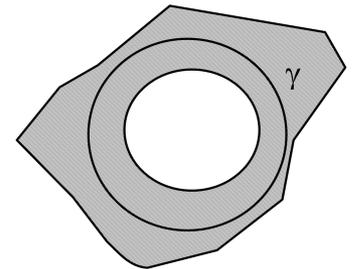
In altre parole, la circuitazione di **A** estesa a γ è pari al flusso del campo «rotore di **A**» attraverso una qualsiasi delle superfici aventi γ come orlo.

Se il campo **A** può essere derivato da una funzione potenziale (ovvero «ammette potenziale») risulta:

$$\oint_{\gamma} \vec{A} \cdot \vec{t} \, dl = 0 \quad \iint_{S} \nabla \times \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad \nabla \times \vec{A} = 0$$

I campi che ammettono potenziale hanno dunque rotore nullo in tutti i punti, e pertanto sono detti **IRROTAZIONALI**. Sono invece **ROTAZIONALI** i campi il cui rotore è non nullo in almeno un punto del dominio. Ci si può chiedere se l'ultima equazione sia anche una condizione sufficiente a garantire l'esistenza di un potenziale per il campo **A**. La risposta è positiva, a patto che la regione Ω in cui **A** è definito risulti a connessione lineare semplice.

Una superficie Σ si dice a connessione lineare semplice se, assegnata una generica linea chiusa γ costituita da punti appartenenti a Σ è possibile contrarla ad un punto senza uscire mai da Σ . Ad esempio il dominio tratteggiato in figura **NON** è a connessione lineare semplice.



GRADIENTE DI UN CAMPO SCALARE.

Sia φ un campo scalare di classe C^1 , definito in una regione spaziale Ω , e sia P un punto di tale regione.

Nel caso di un sistema di riferimento ortonormale, il gradiente di φ in P (o, utilizzando l'operatore Nabla, $\nabla\varphi(P)$) è il vettore che ha per componenti le derivate parziali prime calcolate nel punto P :

$$\nabla\varphi(P) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{i}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{i}_z \quad \text{dove } \hat{i}_x, \hat{i}_y, \hat{i}_z \text{ sono i versori lungo gli assi.}$$

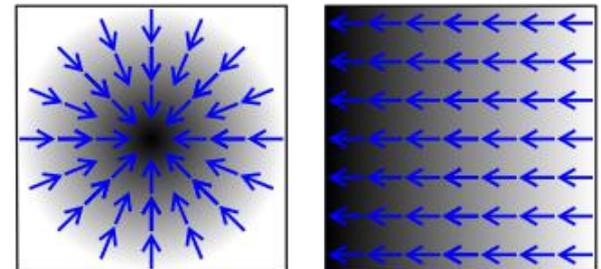
Il $\nabla\varphi$ in Ω è, invece, un campo vettoriale, orientato lungo la direzione di massima crescita di φ .

Abbiamo detto che se il campo \mathbf{A} è irrotazionale, può essere ricavato, da un potenziale scalare. Ciò avviene, più precisamente, attraverso l'operatore gradiente:

$$\mathbf{A} = -\nabla\varphi$$

La presenza del segno negativo davanti all'operatore gradiente è giustificata dal fatto che, per ragioni storiche, le linee del campo derivato dal potenziale, \mathbf{A} , sono convenzionalmente dirette dai punti a potenziale maggiore verso quelli a potenziale minore, vale a dire nella direzione opposta rispetto al gradiente che, come detto, punta verso la direzione di massima crescita della funzione potenziale.

Campo vettoriale del gradiente di due funzioni visualizzate mediante la densità della colorazione: il nero via via più intenso rappresenta valori via via più alti assunti dalle funzioni i quali scaturiscono dall'andamento del gradiente raffigurato dalle frecce azzurre.



TEOREMA DI SCOMPOSIZIONE DI HELMOLTZ

Il teorema di Helmholtz si compone di due proposizioni:

- Sia Ω una regione spaziale delimitata da una superficie chiusa e regolare Σ , dotata, in ogni suo punto, di una normale univocamente definita e variabile con continuità sulla superficie stessa. Ogni campo vettoriale $\underline{\mathbf{A}}$ può essere scomposto nella somma di un campo vettoriale solenoidale e di un campo vettoriale irrotazionale:

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}_1 + \underline{\mathbf{A}}_2 \quad \text{con } \text{div } \underline{\mathbf{A}}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \text{rot } \underline{\mathbf{A}}_2 = 0 \quad \text{in ogni punto di } \Omega$$

- Se di un campo vettoriale \mathbf{A} sono noti il rotore e la divergenza in tutti i punti dell'intero spazio, il campo vettoriale può essere espresso come:

$$\vec{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = -\nabla \Phi(\mathbf{x}) + \nabla \times \vec{\mathbf{U}}(\mathbf{x})$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\tau'_\infty} \frac{\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\tau' \quad U(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\tau'_\infty} \frac{\nabla \times \vec{\mathbf{A}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\tau'$$

purché tali integrali esistono e siano finiti.

CAMPI CHE AMMETTONO POTENZIALE VETTORE

Ricordando che per un generico campo vettoriale di classe C^2 vale l'identità $\text{div}(\text{rot } \underline{\mathbf{U}}) = 0$, si intuisce facilmente come un generico campo solenoidale $\underline{\mathbf{A}}$ sia sempre esprimibile attraverso il rotore di un altro campo vettoriale $\underline{\mathbf{U}}$:

$$\text{div } \underline{\mathbf{A}} = 0$$

Che la condizione sia necessaria appare chiaro, osservando che definito un campo $\underline{\mathbf{U}}$ tale che risulti:

$$\underline{\mathbf{A}} = \text{rot } \underline{\mathbf{U}} \quad (1)$$

Ogni campo $\underline{\mathbf{U}}$ che verifichi la (1) costituisce un **potenziale vettore del campo $\underline{\mathbf{A}}$** .

Detto inoltre Φ un arbitrario campo scalare, si ha:

$$\text{rot grad } \Phi = 0$$

Se $\underline{\mathbf{U}}$ è un potenziale vettore di $\underline{\mathbf{A}}$, tale è anche ogni altro campo $\underline{\mathbf{V}}$ del tipo

$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{U}} + \text{grad } \Phi$$

Con Φ campo scalare arbitrario. Si ha infatti

$$\text{rot } \underline{\mathbf{V}} = \text{rot } \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{A}}$$

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI CAMPI

CAMPI SCALARI

La struttura di un campo scalare Φ può essere visualizzata mediante le cosiddette SUPERFICIE DI LIVELLO. Consideriamo un punto P_0 di Ω e il valore Φ_0 ivi assunto dalla Φ . Consideriamo, inoltre, in Ω , il luogo di tutti i punti in corrispondenza dei quali la funzione Φ assume il valore Φ_0 : esso definisce una superficie di livello la cui espressione analitica è

$$\Phi(x,y,z) = \Phi_0 \quad (\text{in coordinate cartesiane})$$

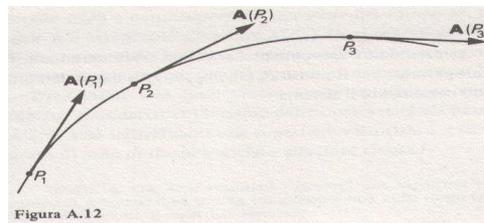
Per ogni punto del campo passa una e una sola superficie di livello: pertanto la conoscenza di tutte le superfici di livello, contrassegnate dai corrispondenti valori Φ_0 , permette di descrivere completamente il campo $\Phi(P)$. Questo tipo di rappresentazione risulta particolarmente efficace quando il campo è definito in una regione piana. In questi casi, infatti, esso può essere rappresentato da una funzione del tipo $\Phi(x,y)$; l'equazione

$$\Phi(x,y) = \Phi_0$$

definisce la LINEA DI LIVELLO corrispondente al valore Φ_0 .

CAMPI VETTORIALI

Considerato un campo vettoriale $\underline{A}(P)$, definito in una regione spaziale Ω , si dice LINEA VETTORIALE (o di FLUSSO) del campo ogni linea che sia tangente in ogni suo punto P_0 al vettore $\underline{A}(P_0)$ (fig.A.12).



Per ogni punto del campo passa una e una sola linea vettoriale, pertanto la mappa delle linee vettoriali fornisce un modo per visualizzarne l'intera struttura.

Una superficie S in cui è definito un campo vettoriale $\mathbf{A}(P)$ è detta SUPERFICIE VETTORIALE (o di FLUSSO) del campo se, in ogni punto P_0 , la normale \mathbf{n} è ortogonale al vettore $\mathbf{A}(P_0)$. Ogni superficie vettoriale S è dunque costituita da linee vettoriali (vedi fig.A.14)

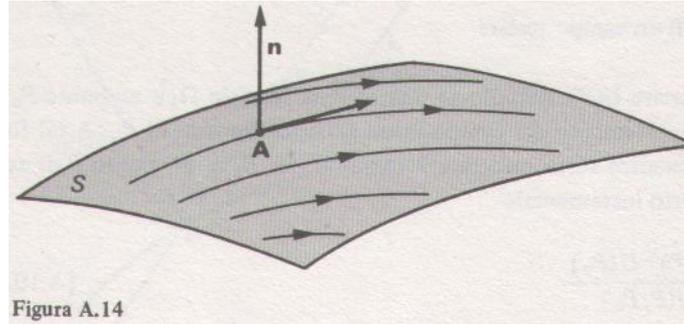


Figura A.14

ciascuna delle quali giace interamente su una superficie vettoriale oppure non ha punti in comune con essa.

Data

infine una linea chiusa l non coincidente con alcuna linea vettoriale del campo, consideriamo l'insieme delle linee vettoriali passanti per i punti di l (fig.A.15) :

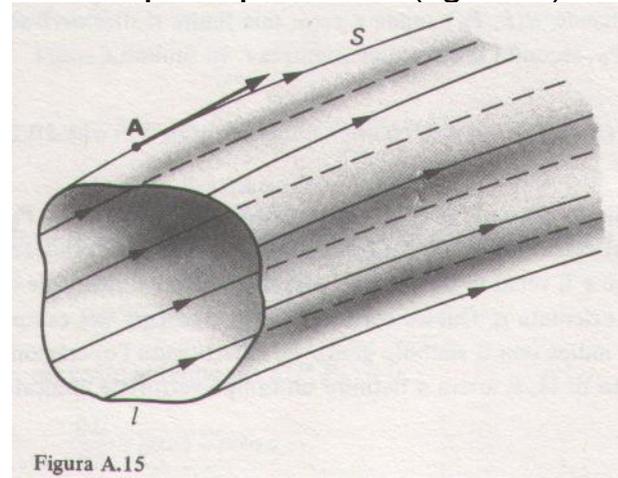


Figura A.15

esse individuano una superficie vettoriale S a struttura tubolare, che prende il nome di TUBO DI FLUSSO associato alla linea chiusa l .

LE ESPRESSIONI DEGLI OPERATORI VETTORIALI IN DIVERSI SISTEMI DI COORDINATE ORTOGONALI

Gradiente

Coordinate cartesiane:

$$(\text{grad } U)_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$(\text{grad } U)_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$(\text{grad } U)_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Coordinate cilindriche:

$$(\text{grad } U)_r = \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$(\text{grad } U)_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$(\text{grad } U)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

Coordinate sferiche:

$$(\text{grad } U)_r = \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$(\text{grad } U)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$(\text{grad } U)_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

Divergenza

Coordinate cartesiane:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordinate cilindriche:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordinate sferiche:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta)$$

Laplaciano scalare

Coordinate cartesiane:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Coordinate cilindriche:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Coordinate sferiche:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right]$$

Rotore

Coordinate cartesiane:

$$(\text{rot } \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Coordinate cilindriche:

$$(\text{rot } \mathbf{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right]$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

Coordinate sferiche:

$$(\text{rot } \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right]$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi \sin \theta) \right]$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$