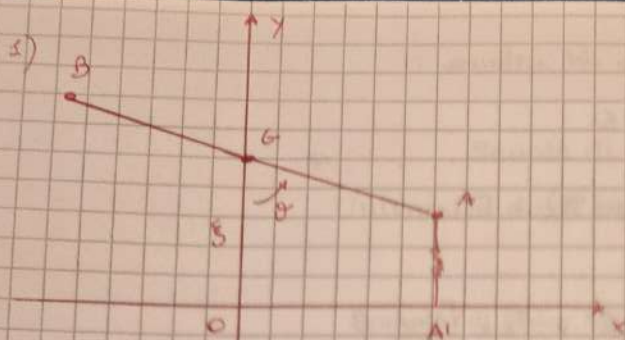




03/10/2024

$$G(0, s)$$

$$A(l \sin \theta, s - l \cos \theta)$$

$$B(l \sin \theta/2, s - l \cos \theta/2)$$

L'energia cinetica del sistema è data da:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta}^2$$

Per quanto riguarda il calcolo del potenziale meccanico che il lavoro compiuto dalla coppia di momento $\vec{M}$ è un differenziale esatto. Infatti si ha:

$$\delta L = \vec{M} \cdot \delta \theta \vec{k} = \left(\frac{1}{2} mgl \vec{k} \right) \cdot (\delta \theta \vec{k}) = \frac{1}{2} mgl \delta \theta = \delta \left(\frac{1}{2} mgl \theta \right)$$

Esiste quindi il potenziale:

$$U_H = \frac{1}{2} mgl \theta$$

Il potenziale totale del sistema è quindi dato da:

$$U = U_G + U_A + U_H = -mg \dot{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2mg}{l} (s - l \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} mgl \theta$$

e la lagrangiana del sistema è:

$$L = T + U = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 - mg \dot{s} - \frac{mg}{l} (s - l \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} mgl \theta$$

Ricaviamo l'equazione di Lagrange relativa alla variabile s :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial s} &= m \dot{s} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) = m \ddot{s} \\ \frac{\partial L}{\partial s} &= -mg - \frac{2mg}{l} (s - l \cos \theta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0 \Rightarrow$$

$$l \ddot{s} + gl + 2g(s - l \cos \theta) = 0$$

Ricaviamo l'equazione di Lagrange relativa alla variabile θ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -\frac{2mg}{l} (s - l \cos \theta) (l \sin \theta) + \frac{1}{2} mgl \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow$$

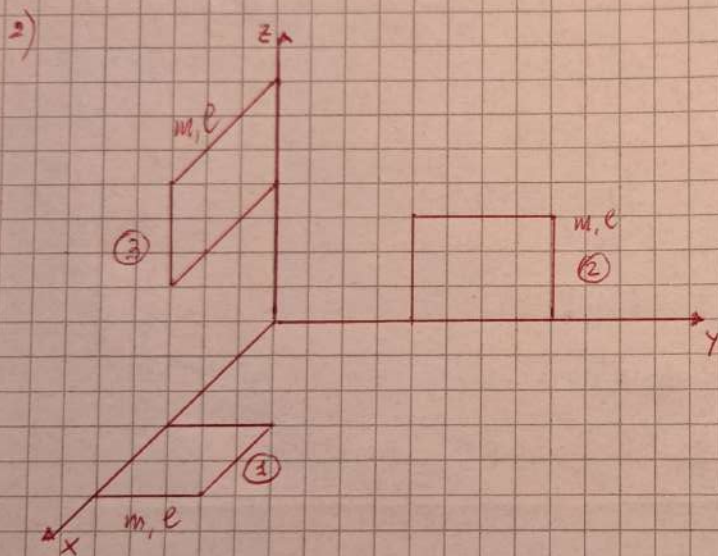
$$2l^2 \ddot{\theta} + 12g \sin \theta (s - l \cos \theta) - 3gl = 0$$

Determiniamo le configurazioni di equilibrio del sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \Rightarrow -1 - \frac{2}{l}(3 - l \cos \vartheta) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}l - \frac{2}{l}(3 - l \cos \vartheta)(l \sin \vartheta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = l \cos \vartheta - \frac{l}{2} \\ \sin \vartheta = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}l, s_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}l \\ \vartheta_1 = \frac{7}{6}\pi, \vartheta_2 = \frac{11}{6}\pi \end{cases}$$

$$\left(\frac{7}{6}\pi, -\frac{\sqrt{3}+1}{2}l \right), \left(\frac{11}{6}\pi, \frac{\sqrt{3}-1}{2}l \right)$$



Consideriamo il corpo 1. Si ha che $I_z^{(1)} = I_x^{(1)} + I_y^{(1)}$ e $J_{xz}^{(1)} = J_{yz}^{(1)} = 0$. Inoltre

$$\left. \begin{aligned} I_x^{(1)} &= \frac{1}{3}ml^2, \quad I_y^{(1)} = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{3}{2}l\right)^2 = \frac{7}{3}ml^2 \Rightarrow I_z^{(1)} = \frac{8}{3}ml^2 \\ J_{xy}^{(1)} &= m x_G y_G = m\left(\frac{3}{2}l\right)\left(\frac{1}{2}l\right) = \frac{3}{4}ml^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$I^{(1)} = \frac{1}{12}ml^2 \begin{pmatrix} 4 & -9 & 0 \\ -9 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

Permutando gli assi si ha: $I^{(2)} = \frac{1}{12}ml^2 \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & -9 & 28 \end{pmatrix}, \quad I^{(3)} = \frac{1}{12}ml^2 \begin{pmatrix} 28 & 0 & -9 \\ 0 & 32 & 0 \\ -9 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ne segue che:

$$I = \frac{1}{12}ml^2 \begin{pmatrix} 64 & -9 & -9 \\ -9 & 64 & -9 \\ -9 & -9 & 64 \end{pmatrix}$$