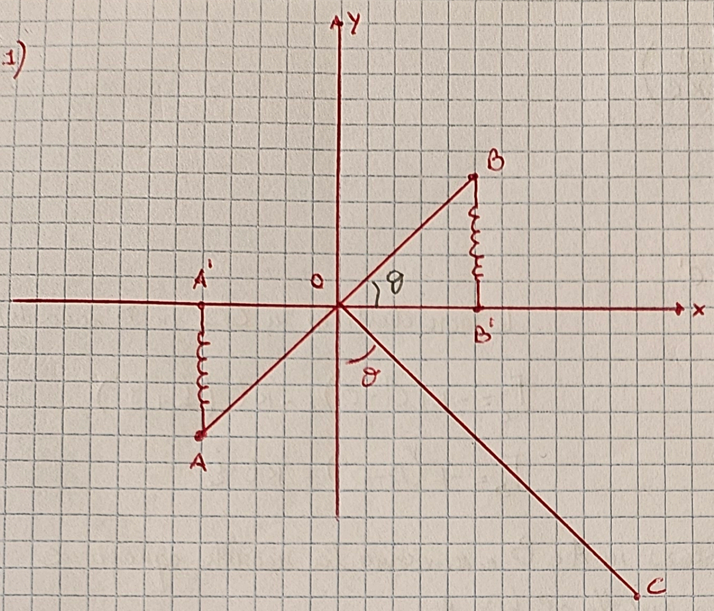
1)

10/06/2024



$A\,(-l\cos\vartheta;\ -l\sin\vartheta)$

$A'\,(-l\cos\vartheta;\ 0)$

$B\,(l\cos\vartheta;\ l\sin\vartheta)$

$B'\,(l\cos\vartheta;\ 0)$

$C\,(2l\sin\vartheta;\ -2l\cos\vartheta)$

$G_1 \equiv O$

$G_2\,(l\sin\vartheta;\ -l\cos\vartheta)$

$G\,\left(\frac{1}{2}l\sin\vartheta;\ -\frac{1}{2}l\cos\vartheta\right)$

Il sistema è un corpo rigido con asse fisso passante per O. Quindi la sua energia cinetica è:

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

dove $\omega = \dot{\vartheta}$ e $I_O = I_O^{(AB)} + I_O^{(OC)} = \frac{1}{12} m (2l)^2 + \frac{1}{3} m (2l)^2 = \frac{1}{3} ml^2 + \frac{4}{3} ml^2 = \frac{5}{3} ml^2 \Rightarrow$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} ml^2 \cdot \dot{\vartheta}^2 = \frac{5}{6} ml^2 \dot{\vartheta}^2$$

Il potenziale totale delle forze agenti sul sistema è:

$$U = U_P + U_{AA'} + U_{BB'} = -2mg\,y_G - \frac{1}{2} k\,\overline{AA'}^2 - \frac{1}{2} k\,\overline{BB'}^2 =$$

$$= -2mg\left(-\frac{1}{2} l\cos\vartheta\right) - \frac{1}{2} k l^2 \sin^2\vartheta - \frac{1}{2} k l^2 \sin^2\vartheta = mgl\cos\vartheta - kl^2\sin^2\vartheta$$

La Lagrangiana è quindi:

$$\boxed{L = T + U = \frac{5}{6} ml^2 \dot{\vartheta}^2 + mgl\cos\vartheta - kl^2\sin^2\vartheta}$$

L'equazione di Lagrange per la variabile ϑ è:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{5}{3} ml^2 \dot{\vartheta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = \frac{5}{3} ml^2 \ddot{\vartheta} \\ &\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -mgl\sin\vartheta - 2kl^2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0 \Rightarrow$$

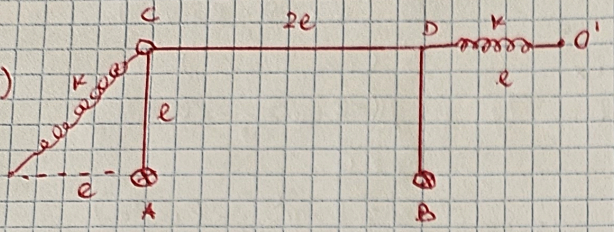
$$\boxed{\frac{5}{3} ml^2 \ddot{\vartheta} + mgl\sin\vartheta + 2kl^2\sin\vartheta\cos\vartheta = 0}$$

Le posizioni di equilibrio si ottengono dalla:

$$\frac{dU}{d\vartheta} = 0 \Rightarrow -mgl\sin\vartheta - 2kl^2\sin\vartheta\cos\vartheta = 0 \Rightarrow \sin\vartheta\,(mg + 2kl\cos\vartheta) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\vartheta_1 = 0\ ;\ \vartheta_2 = \pi\ ;\ \vartheta_{3,4} = \pm\arccos\left(\frac{-mg}{2k\ell}\right)}$$

2) 

Le forze elastiche in C e in D sono date da:

$$\underline{F}_C = -k(C-O) = -k\ell(\underline{i}+\underline{j})$$

$$\underline{F}_D = -k(D-O') = k\ell\,\underline{i}$$

Indichiamo con $\underline{\Phi}_A$ e $\underline{\Phi}_B$ le reazioni vincolari in A e B e scriviamo la seconda equazione cardinale della statica per l'intero sistema rispetto al polo A:

$$(C-A)\times\underline{F}_C + (D-A)\times\underline{F}_D + (B-A)\times\underline{\Phi}_B = 0 \quad\Rightarrow$$

$$(\ell\,\underline{j})\times(-k\ell\,\underline{i}-k\ell\,\underline{j}) + (2\ell\,\underline{i}+\ell\,\underline{j})\times(k\ell\,\underline{i}) + (2\ell\,\underline{i})\times(\Phi_{Bx}\,\underline{i}+\Phi_{By}\,\underline{j}) = \underline{0} \Rightarrow$$

$$k\ell^2 - k\ell^2 + 2\ell\,\Phi_{By} = 0 \Rightarrow \Phi_{By} = 0 \Rightarrow \underline{\Phi}_B = \Phi_{Bx}\,\underline{i}$$

Dall'equilibrio dei momenti delle forze agenti agli estremi della sola asta AC si ha:

$$\Phi_{Ax} = 0 \Rightarrow \underline{\Phi}_A = \Phi_{Ay}\,\underline{j}$$

Se adesso scriviamo la prima equazione cardinale della statica per l'intero sistema e la proiettiamo sugli assi, si ha:

$$\begin{cases}\Phi_{Bx} - k\ell + k\ell = 0\\ \Phi_{Ay} - k\ell = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\Phi_{Bx} = 0\\ \Phi_{Ay} = k\ell\end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\underline{\Phi}_A &= k\ell\,\underline{j}\\ \underline{\Phi}_B &= \underline{0}\end{aligned}}$$

Dall'equilibrio della squadra si ha che la reazione in C esercitata dell'asta sulla squadra, $\underline{\Phi}_C^{(1,2)}$, deve bilanciare $\underline{F}_D$:

$$\boxed{\underline{\Phi}_C^{(1,2)} = -\underline{F}_D \Rightarrow \underline{\Phi}_C^{(2,1)} = \underline{F}_D}$$