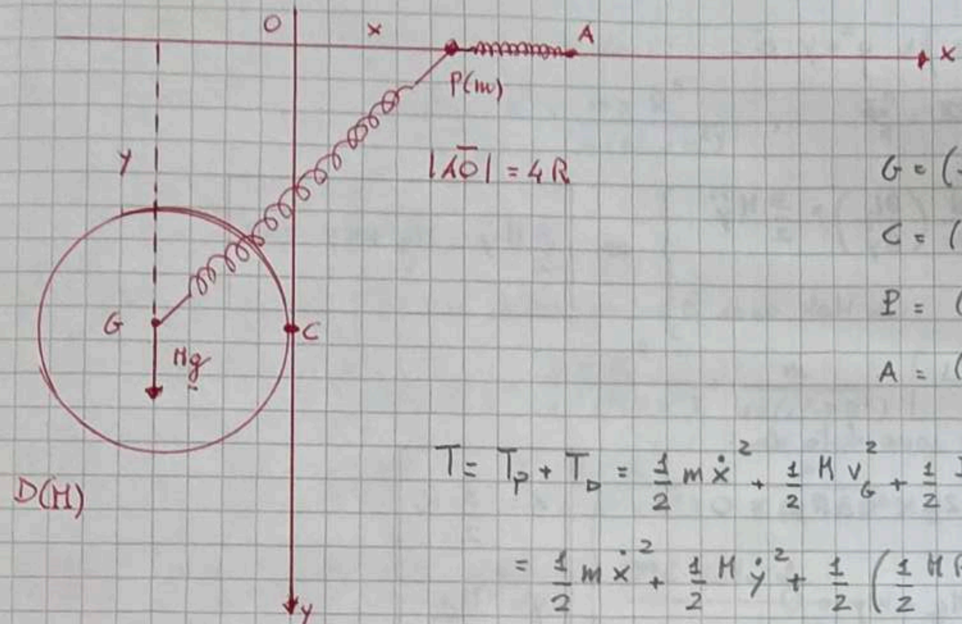
20/04/2026



$|\overline{AO}| = 4R$

$G = (-R\,;\,y)$

$C = (0\,;\,y)$

$P = (x\,;\,0)$

$A = (4R\,;\,0)$

$$T = T_P + T_D = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \qquad \begin{cases} \underline{v}_G = \dot{y}\,\underline{j} \\ \underline{v}_G = \underline{\omega} \times \underline{CG} = -\omega R\,\underline{j} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right)\left(\frac{\dot{y}^2}{R^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{3}{4} M \dot{y}^2$$

$$U = U_D + U_1 + U_e = M g\, y_G - \frac{1}{2} k |\overline{PG}|^2 - \frac{1}{2} k |\overline{AP}|^2 =$$

$$= Mgy - \frac{1}{2} k \left[(x+R)^2 + y^2\right] - \frac{1}{2} k (4R - x)^2 =$$

$$= Mgy - \frac{1}{2} k \left[x^2 + R^2 + 2Rx + y^2 + 16R^2 + x^2 - 8Rx\right] =$$

$$= Mgy - \frac{1}{2} k \left[2x^2 - 6Rx + y^2 + 17R^2\right]$$

Pertanto la Lagrangiana del sistema è:

$$\boxed{L(x, y; \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{3}{4} M \dot{y}^2 + Mgy - kx^2 + 3Rkx - \frac{1}{2} k y^2 - \frac{17}{2} k R^2}$$

L'equazione di Lagrange per $q^1 = x$ è:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \implies$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \\ &\frac{\partial L}{\partial x} = -2kx + 3Rk \end{aligned}\right\} \implies \boxed{m\ddot{x} + 2kx - 3Rk = 0}$$

L'equazione di Lagrange per $q^2 = y$ è:

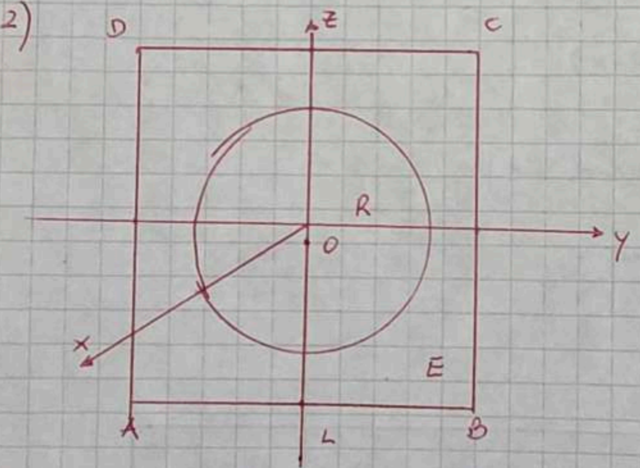
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{3}{2} M \dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{3}{2} M \ddot{y} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = Mg - ky \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2} M \ddot{y} - Mg + ky = 0}$$

Le posizioni di equilibrio sono date da:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2kx + 3Rk = 0 \\ Mg - ky = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{3}{2} R \\ y = \frac{Mg}{k} \end{cases}}$$

2)



$\overline{AB} = L \quad , \quad m_E = m$

Il sistema rigido giace nel piano Oyz $\Rightarrow$ l'asse Ox è principale d'inerzia e $I_x = I_y + I_z$ $\Rightarrow$

$$I_y = I_z = \frac{1}{2} I_x$$

I piani coordinati sono piani di simmetria materiali e quindi principali d'inerzia: $J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0$.

La densità costante del sistema è data da: $\rho = \frac{m}{L^2 - \pi R^2} \Rightarrow$

$$m_1 = m_D = \rho \pi R^2 = \frac{m \pi R^2}{L^2 - \pi R^2} \quad , \quad m_2 = m_q = \rho L^2 = \frac{m L^2}{L^2 - \pi R^2} .$$

I momenti d'inerzia della lamina quadrata ABCD sono dati da:

$$I_y^q = \frac{1}{12} m_2 L^2 = \frac{1}{12} \frac{m L^2}{L^2 - \pi R^2} L^2 = \frac{m L^4}{12(L^2 - \pi R^2)} \quad , \quad I_z^q = I_y^q ,$$

$$I_x^q = 2 I_y^q = \frac{m L^4}{6(L^2 - \pi R^2)}$$

I momenti di inerzia del disco sono dati da:

$$I_y^D = \frac{1}{4} m_1 R^2 = \frac{1}{4} \frac{m \pi R^2}{L^2 - \pi R^2} R^2 = \frac{m \pi R^4}{4(L^2 - \pi R^2)} \quad , \quad I_z^D = I_y^D$$

$$I_x^D = 2 I_y^D = \frac{m \pi R^4}{2(L^2 - \pi R^2)}$$

Ne viene che i momenti d'inerzia della lamina E sono dati da:

$$I_y = I_y^q - I_y^D = \frac{m L^4}{12(L^2 - \pi R^2)} - \frac{m \pi R^4}{4(L^2 - \pi R^2)} = \frac{m}{12(L^2 - \pi R^2)} \left[L^4 - 3\pi R^4 \right] \quad , \quad I_z = I_y$$

$$I_x = I_x^q - I_x^D = \frac{m L^4}{6(L^2 - \pi R^2)} - \frac{m \pi R^4}{2(L^2 - \pi R^2)} = \frac{m}{6(L^2 - \pi R^2)} \left[L^4 - 3\pi R^4 \right]$$

Pertanto la matrice d'inerzia rispetto ad O è data da:

$$\boxed{I(O) = \frac{m}{12(L^2 - \pi R^2)} (L^4 - 3\pi R^4) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$