

# Analisi automatica delle travi elastiche

Corso di Meccanica delle Strutture II

Docente: Antonio D. Lanzo

Scuola di Ingegneria  
Università della Basilicata, Potenza

A.A. 2022/23

Vers. aggiorn. 18 aprile 2023

# Outline

- 1 Introduzione all'analisi automatica delle strutture
- 2 Analisi matriciale di travature elastiche
  - Introduzione
  - Analisi locale / equazioni linea elastica
  - Analisi locale / coefficienti di rigidezza
  - Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
  - Analisi globale / trasf. locale→globale
  - Analisi globale / congruenza cinematica
  - Analisi globale / equilibrio
  - Analisi globale / il metodo delle rigidezze
  - Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
  - Una applicazione
  - Il vincolo di inestensibilità assiale
  - Soluzione di incastro perfetto
  - Esempi di applicazioni
- 3 Una rivisitazione della strategia
  - Una rappresentazione locale più efficiente
  - Una rappresentazione locale naturale
  - Il modello di trave di Timoshenko
  - Presenza di stati di autotensioni
- 4 Strategie numeriche di analisi
  - Risoluzione di sistemi algebrico-lineari
  - Algoritmo di decomposizione alla Gauss
  - Il metodo Newton-Raphson modificato
  - Gestione delle condizioni di vincolo/cedimenti
- 5 Il codice di analisi automatica
  - Dati e variabili
  - Descrizione delle procedure di analisi
- 6 Estensione a problemi tridimensionali
  - La travatura reticolare spaziale
  - Il telaio tridimensionale
  - Un caso particolare: il graticcio piano
- 7 Trave elastica su suolo alla Winkler
  - Il modello di trave su suolo alla Winkler
  - Il graticcio su fondazione alla Winkler

# Parte I

## Analisi automatica delle strutture

# Analisi computazionale delle strutture

Evoluzione dei metodi e degli strumenti di calcolo

l'evoluzione dei metodi computazionali accompagna lo sviluppo e la diffusione degli strumenti di calcolo

- il **metodo di Cross** (1932) segue la diffusione di macchine (come la Monroe dei primi '30), di tipo meccanico, che permettevano l'introduzione dei dati da tastiera;
- il **metodo del rilassamento di Southwell** (1935-40) è contemporaneo alla diffusione di macchine da calcolo elettriche (come la Friden del 1934);
- i **metodi di calcolo agli elementi finiti** (indicato inizialmente come **Analisi Matriciale delle Strutture**) ha accompagnato l'evoluzione dei moderni calcolatori elettronici.

# Analisi Matriciale delle Strutture (MSA)

Alcune date storiche

1930-35 : i lavori primordiali di Collar e Duncan

introducono una forma primitiva di elemento strutturale in ambito aeronautico

1951-53 : i primi calcolatori elettronici (Univac I, IBM 701)

1952-55 : primi lavori di Turner, Clough, Argyris

derivano le matrici di rigidezza dei primi moderni elementi finiti

1954-56 : prime applicazioni strutturali (aeronautiche) dei calcolatori

1957 : FORTRAN, il primo linguaggio di programmazione ad alto livello

1959 : il Direct Stiffness Method di Turner

completa l'evoluzione dell'analisi matriciale delle strutture (MSA) nella moderna implementazione del metodo FEM

1960 : i computer risolvono sistemi di centinaia di equazioni lineari

1963 : i primi codici di calcolo ad elementi finiti si diffondono fuori dall'ambito aeronautico

# Analisi automatica

Con il termine “Analisi Matriciale delle Strutture” o “metodo degli Elementi Finiti” ...

*non si intende* il semplice uso di una simbologia matriciale nel calcolo strutturale,  
*ma si intende* una metodologia complessiva in cui l'analisi è impostata e condotta in modo del tutto automatico a partire dalla sola descrizione della geometria e dei carichi.

L'intero processo automatico comprende:

- 1 individuazione e predisposizione delle variabili,
- 2 costruzione delle matrici degli elementi e assemblaggio nella matrice di rigidezza globale,
- 3 soluzione del sistema di equazioni che definisce la soluzione in spostamenti,
- 4 ricostruzione, elemento per elemento, delle sollecitazioni e delle tensioni locali,
- 5 restituzione della soluzione in forma di grafici, tabelle e quanto altro sia utile ad una sua migliore e più agevole comprensione.

# Affidabilità dell'analisi automatica

## Generalità delle tipologie strutturali

- La predisposizione del processo di analisi attraverso la codifica di un apposito codice di calcolo è una operazione complessa e si giustifica solo se riusata più volte.
- Il codice deve quindi essere indirizzato a tipologie strutturali abbastanza generali da comprendere tutte le possibili future evenienze.

# Affidabilità dell'analisi automatica

Generalità delle tipologie strutturali

Risultati intermedi non controllabili

L'uso di un approccio del tutto automatico esclude la possibilità di un controllo, in corso d'opera, dei risultati man mano raggiunti.

# Affidabilità dell'analisi automatica

Generalità delle tipologie strutturali

Risultati intermedi non controllabili

Impossibilità di approssimazioni ad hoc

Per entrambe le precedenti ragioni, non è possibile avvalersi di approssimazioni ad hoc, dettate dal contesto particolare in esame.

# Affidabilità dell'analisi automatica

Generalità delle tipologie strutturali

Risultati intermedi non controllabili

Impossibilità di approssimazioni ad hoc

## Requisiti di affidabilità

Ciò richiede una forte cautela nello sviluppo di tutti gli aspetti dell'analisi

- corretta descrizione geometrica,
- adeguata modellazione meccanica,
- uso di algoritmi numerici efficienti e robusti,
- corretta ricostruzione della soluzione,
- chiara restituzione grafica e tabellare dei risultati.

In mancanza di uno solo di questi punti i risultati forniti potrebbero essere inaffidabili o fuorvianti

## Parte II

# Analisi matriciale di travature elastiche

## 2 Analisi matriciale di travature elastiche

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

## 3 Una rivisitazione della strategia

- Una rappresentazione locale più efficiente
- Una rappresentazione locale naturale
- Il modello di trave di Timoshenko
- Presenza di stati di autotensioni

# limiti del metodo delle forze

L'utilizzazione pratica del metodo delle forze per il calcolo di strutture iperstatiche diviene tanto più complessa e laboriosa quanto maggiore è l'iperstaticità della struttura.

- all'aumentare del numero delle iperstatiche diventa infatti più laboriosa la riduzione al sistema isostatico;
- aumenta il numero dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione e, secondo una legge quadratica, il numero di integrali del tipo  $\int M_i M_j ds$  da calcolare.

Il metodo delle forze si presta male ad essere organizzato in un calcolo automatico da svolgere mediante computer.

... Tutto ciò comporta che il metodo delle forze risulti adatto solo a strutture relativamente semplici ed a procedimenti manuali di calcolo, e che per strutture a molte iperstatiche finisca col rivelarsi macchinoso e scarsamente efficiente

Per strutture complesse risulta più conveniente l'uso di un metodo alternativo di analisi noto come *metodo delle rigidzze* o *metodo degli spostamenti*.

# La travatura come un assemblaggio di elementi

## la logica del metodo delle forze

Il metodo delle forze per la risoluzione di strutture iperstatiche può essere visto come “completamento” delle condizioni di equilibrio statico, cioè come una tecnica per produrre delle condizioni ausiliarie (di compatibilità cinematica) tali da compensare l'indeterminazione delle equazioni fornite dalla statica.

## la logica del metodo delle rigidezze

Il metodo delle rigidezze richiede invece un ripensamento completo del nostro modo di “vedere” una struttura.

*Un sistema meccanico per quanto complesso può sempre essere visto come un assemblaggio di elementi semplici interconnessi, riconducibili ad una o a poche tipologie caratteristiche.*

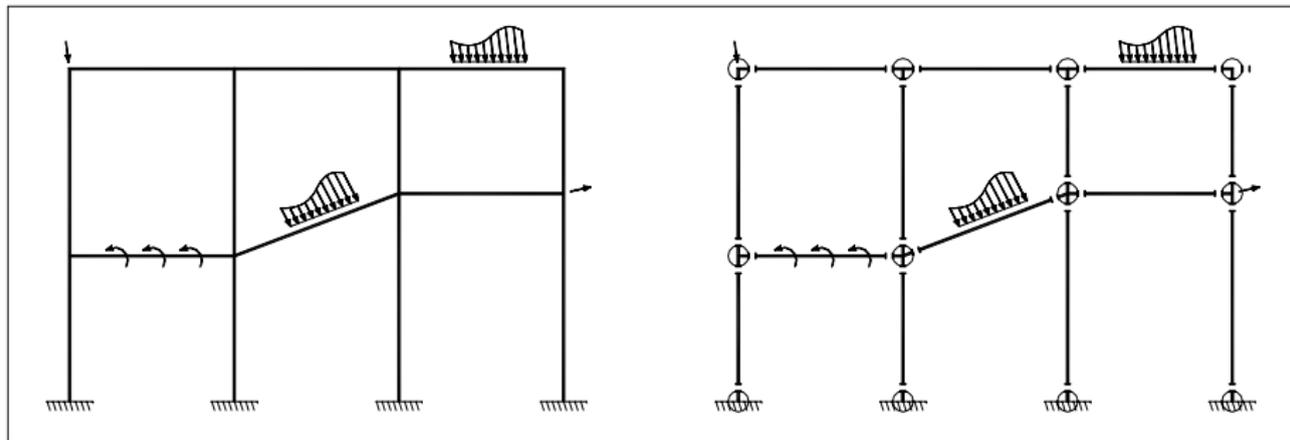
*Sono le proprietà relativamente semplici delle sue parti che determinano le proprietà generali del sistema.*

# La travatura come un assemblaggio di elementi

*Un sistema meccanico per quanto complesso può sempre essere visto come un assemblaggio di elementi semplici.*

## Il caso delle travature

un assemblaggio di elementi-trave interconnesse attraverso nodi



# La travatura come un assemblaggio di elementi

*Un sistema meccanico per quanto complesso può sempre essere visto come un assemblaggio di elementi semplici.*

## Il caso delle travi

un assemblaggio di elementi-trave interconnesse attraverso nodi

Il comportamento meccanico globale della struttura è somma del comportamento dei suoi **elementi** e delle loro interazioni statico-cinematiche.

I **nodi** sono il luogo delle interazioni statico-cinematiche delle travi

# Aspetti dell'analisi

- **Ogni elemento–trave** della travatura presenta sia una caratterizzazione “interna” che una “esterna”.

## aspetto interno: $\mathbf{u}[\mathbf{x}]$ , $\epsilon[\mathbf{x}]$ , $\sigma[\mathbf{x}]$

riguarda ciò che realmente avviene all'interno di ogni elemento,

- è descritto in termini di spostamenti  $\mathbf{u}[\mathbf{x}]$ , caratt. di deformazione  $\epsilon[\mathbf{x}]$  e caratt. di sollecitazione  $\sigma[\mathbf{x}]$  su ogni sezione della trave.

## aspetto esterno: $\mathbf{p}_e$ , $\mathbf{u}_e$

riguarda ciò che è osservato sul suo contorno (i nodi), dove l'elemento interagisce con le parti adiacenti della struttura,

- è descritto in termini di forze  $\mathbf{p}_e$  e spostamenti  $\mathbf{u}_e$  sui nodi dell'elemento.

E' l'aspetto esterno che determina l'influenza dell'elemento sul comportamento generale del sistema di cui è parte.

- **Ogni nodo** è il luogo delle interazioni statico-cinematiche delle travi

tali interazioni determinano il comportamento globale della struttura.

# Aspetti dell'analisi

- **Ogni elemento–trave** della travatura presenta sia una caratterizzazione “interna” che una “esterna”.

**aspetto interno:**  $u[x], \epsilon[x], \sigma[x]$

**aspetto esterno:**  $p_e, u_e$

E' l'aspetto esterno che determina l'influenza dell'elemento sul comportamento generale del sistema di cui è parte.

- **Ogni nodo** è il luogo delle interazioni statico-cinematiche delle travi  
tali interazioni determinano il comportamento globale della struttura.

Al fine di una efficace rappresentazione delle interazioni statico-cinematiche nodali, necessita una rappresentazione sintetica ed essenziale del comportamento delle singole travi, in termini quindi dei relativi soli parametri nodali  $p_e, u_e$ .

# Livello locale e livello globale dell'analisi

L'analisi della struttura può essere organizzata in due livelli diversi

## *il livello locale*

associato con lo studio del comportamento del singolo elemento-trave,

- comporta un'operazione di riscrittura delle relazioni interne tra tensioni e deformazioni in termini di relazioni esterne tra forze nodali e spostamenti nodali dell'elemento.

$$\sigma[x] \leftrightarrow \epsilon[x] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_e \leftrightarrow \mathbf{u}_e$$

## *il livello globale*

associato allo studio delle interazioni nodali degli elementi

- riguarda l'utilizzazione delle relazioni esterne del generico elemento allo scopo di costruire delle equazioni che descrivono il comportamento della intera struttura.

# Fasi dell'analisi

## decomposizione (il livello locale)

### discretizzazione

decomposizione della struttura in tanti elementi-trave;

### localizzazione

rappresentazione in un riferimento locale del comportamento dell'elemento;

### rappresentazione nodale

rappresentazione, nel riferimento locale, del comportamento dell'elemento in termini di forze e spostamenti nodali.

## assemblaggio e soluzione (il livello globale)

# Fasi dell'analisi

decomposizione (il livello locale)

assemblaggio e soluzione (il livello globale)

globalizzazione

rappresentazione del comportamento dell'elemento in un riferimento globale;

assemblaggio

scrittura delle condizioni globali di equilibrio e congruenza dei nodi;

condizioni al contorno

applicazione delle condizioni al contorno (ai nodi della struttura);

calcolo delle variabili primarie

soluzione (nelle variabili primarie del problema);

rappresentazione della soluzione

recupero di quantità derivate (spostamenti e sollecitazione nelle sezioni).

# Fasi dell'analisi

## decomposizione (il livello locale)

discretizzazione

localizzazione

rappresentazione nodale

## assemblaggio e soluzione (il livello globale)

globalizzazione

assemblaggio

condizioni al contorno

calcolo delle variabili primarie

rappresentazione della soluzione

## 2 Analisi matriciale di travature elastiche

- Introduzione
- **Analisi locale / equazioni linea elastica**
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

## 3 Una rivisitazione della strategia

- Una rappresentazione locale più efficiente
- Una rappresentazione locale naturale
- Il modello di trave di Timoshenko
- Presenza di stati di autotensioni

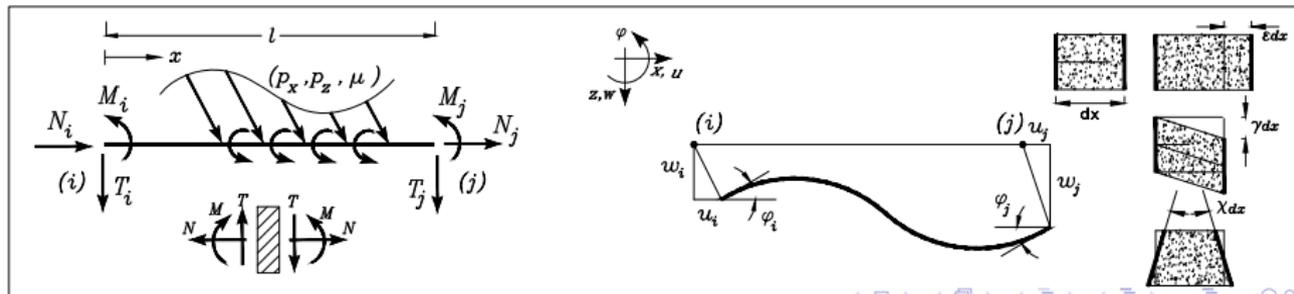
# Descrittori statico/cinematici della trave

aspetto interno - in un riferimento  $(x, z)$  locale, per ogni sezione di ascissa  $s$ :

- campo di spostamenti  $\{u(s), w(s), \varphi(s)\}$
- campo caratteristiche di deformazione  $\{\varepsilon(s), \gamma(s), \chi(s)\}$
- caratteristiche di sollecitazione  $\{N(s), T(s), M(s)\}$

aspetto esterno - condizioni al contorno sui due nodi  $i$  e  $j$ :

- spostamenti nodali  $(u_i, w_i, \varphi_i)$  e  $(u_j, w_j, \varphi_j)$   
 $u_i = u(0)$ ,  $w_i = w(0)$ ,  $\varphi_i = \varphi(0)$ ,  $u_j = u(l)$ ,  $w_j = w(l)$ ,  $\varphi_j = \varphi(l)$ ,
- forze nodali  $(N_i, T_i, M_i)$  e  $(N_j, T_j, M_j)$   
 $N_i = -N(0)$ ,  $T_i = -T(0)$ ,  $M_i = -M(0)$ ,  $N_j = N(l)$ ,  $T_j = T(l)$ ,  $M_j = M(l)$



# Il modello di trave di Bernoulli

formulazione compatibile

Relazioni interne (di campo), per il modello di trave di Eulero-Bernoulli:

$$\forall x \in (0, l) \quad \begin{array}{l} \text{equilibrio} \\ \left\{ \begin{array}{l} N_{,x} + p_x = 0 \\ T_{,x} + p_z = 0 \\ M_{,x} - T + \mu = 0 \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{leg. cost.} \\ \left\{ \begin{array}{l} N = EA\varepsilon \\ M = EJ\chi \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{congruenza} \\ \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = u_{,x} \\ \varphi = -w_{,x} \\ \chi = -w_{,xx} \end{array} \right. \end{array}$$

condizioni al contorno statiche:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_i = -N(0) \\ T_i = -T(0) \\ M_i = -M(0) \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} N_j = N(l) \\ T_j = T(l) \\ M_j = M(l) \end{array} \right.$$

condizioni al contorno cinematiche:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = u(0) \\ w_i = w(0) \\ \varphi_i = \varphi(0) \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} u_j = u(l) \\ w_j = w(l) \\ \varphi_j = \varphi(l) \end{array} \right.$$

dalle equazioni di equilibrio, sostituendo i legami costitutivi, e quindi le relazioni cinematiche, le equazioni di campo possono essere espresse in termini di soli spostamenti

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{,x} + p_x = 0 \\ M_{,xx} + p_z + \mu_{,x} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} EA\varepsilon_{,x} + p_x = 0 \\ EJ\chi_{,xx} + p_z + \mu_{,x} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} EAu_{,xxx} + p_x = 0 \\ -EJw_{,xxxx} + p_z + \mu_{,x} = 0 \end{array} \right.$$

# Il modello di trave di Bernoulli

formulazione compatibile

Relazioni interne (di campo), per il modello di trave di Eulero-Bernoulli:

$$\forall x \in (0, l) , \quad \begin{cases} EA u_{,xx} + p_x = 0 \\ -EJ w_{,xxxx} + p_z + \mu_{,x} = 0 \end{cases}$$

condizioni al contorno statiche:

$$\begin{cases} N_i = -N(0) & , & N_j = N(l) \\ T_i = -T(0) & , & T_j = T(l) \\ M_i = -M(0) & , & M_j = M(l) \end{cases}$$

condizioni al contorno cinematiche:

$$\begin{cases} u_i = u(0) & , & u_j = u(l) \\ w_i = w(0) & , & w_j = w(l) \\ \varphi_i = \varphi(0) & , & \varphi_j = \varphi(l) \end{cases}$$

la formulazione del problema in termini di sole componenti di spostamento

un problema differenziale disaccoppiato in termini delle funzioni di  $u(x)$  e  $w(x)$

# Il modello di trave di Bernoulli

formulazione compatibile

$$\forall x \in (0, l) \quad EAu_{,xx} = -p_x \quad , \quad u(0) = u_i \quad , \quad u(l) = u_j$$

$$\forall x \in (0, l) \quad EJw_{,xxxx} = p_z + \mu_{,x} \quad , \quad \begin{cases} w(0) = w_i \quad , \quad \varphi(0) = -w_{,x}(0) = \varphi_i \\ w(l) = w_j \quad , \quad \varphi(l) = -w_{,x}(l) = \varphi_j \end{cases}$$

condizioni al contorno statiche:

$$\begin{cases} N_i = -N(0) \quad , \quad N_j = N(l) \\ T_i = -T(0) \quad , \quad T_j = T(l) \\ M_i = -M(0) \quad , \quad M_j = M(l) \end{cases}$$

condizioni al contorno cinematiche:

$$\begin{cases} u_i = u(0) \quad , \quad u_j = u(l) \\ w_i = w(0) \quad , \quad w_j = w(l) \\ \varphi_i = \varphi(0) \quad , \quad \varphi_j = \varphi(l) \end{cases}$$

la formulazione del problema in termini di sole componenti di spostamento

un problema differenziale disaccoppiato in termini delle funzioni di  $u(x)$  e  $w(x)$

# Decomposizione della soluzione locale

Soluzione di incastro perfetto e soluzione nodale

$$\forall x \in (0, l) \quad EAu_{,xx} = -p_x \quad , \quad u(0) = u_i \quad , \quad u(l) = u_j$$

$$\forall x \in (0, l) \quad EJw_{,xxxx} = p_z + \mu_{,x} \quad , \quad \begin{cases} w(0) = w_i \quad , \quad \varphi(0) = -w_{,x}(0) = \varphi_i \\ w(l) = w_j \quad , \quad \varphi(l) = -w_{,x}(l) = \varphi_j \end{cases}$$

Per il **principio di sovrapposizione degli effetti**, la soluzione generale del problema locale è esprimibile come somma di due aliquote

$$\tilde{u}(x) + u(x) \quad , \quad \tilde{w}(x) + w(x)$$

*soluzione di incastro perfetto* ( $\tilde{u}[x], \tilde{w}[x]$ )

soluzione particolare del sistema non omogeneo,

*soluzione nodale* ( $u[x], w[x]$ ) (o della **linea elastica**)

soluzione generale del sistema omogeneo associato

# Decomposizione della soluzione locale

Soluzione di incastro perfetto e soluzione nodale

## *soluzione di incastro perfetto* ( $\tilde{u}[x], \tilde{w}[x]$ )

soluzione particolare del sistema non omogeneo,

- in equilibrio quindi con i carichi applicati su punti interni della trave,
- a spostamenti nodali nulli (equivalenti ad una condizione di vincolo di incastro ai due nodi)

$$EA\tilde{u}_{,xx} = -p_x \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}(l) = 0$$

$$EJ\tilde{w}_{,xxxx} = p_z + \mu_{,x} \quad \tilde{w}(0) = \tilde{\varphi}(0) = \tilde{w}(l) = \tilde{\varphi}(l) = 0 ,$$

## *soluzione nodale* ( $u[x], w[x]$ ) (o della **linea elastica**)

soluzione generale del sistema omogeneo associato

- in equilibrio con carichi ripartiti nulli
- congruente con gli spostamenti dei nodi

# Decomposizione della soluzione locale

Soluzione di incastro perfetto e soluzione nodale

*soluzione di incastro perfetto* ( $\tilde{u}[x], \tilde{w}[x]$ )

*soluzione nodale* ( $u[x], w[x]$ ) (o della **linea elastica**)

$$EAu_{,xx} = 0 \quad u(0) = u_i \quad u(l) = u_j$$

$$EJw_{,xxxx} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} w(0) = w_i \\ \varphi(0) = \varphi_i \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} w(l) = w_j \\ \varphi(l) = \varphi_j \end{array} \right. ,$$

Rimandando ad una successiva sezione il trattamento della soluzione di incastro perfetto ( $u_0(x), w_0(x)$ ), concentriamo adesso la nostra attenzione sulla aliquota nodale ( $u(x), w(x)$ ) della soluzione.

Ciò equivale a considerare nulli i carichi ripartiti sulle travi e fare riferimento solo a sistemi di carichi costituiti di forze o coppie concentrate ai nodi della struttura.

# La soluzione della linea elastica

$$\begin{aligned}
 EAu_{,xx} &= 0 & u(0) &= u_i & u(l) &= u_j \\
 EJw_{,xxxx} &= 0 & \left\{ \begin{array}{l} w(0) = w_i \\ \varphi(0) = \varphi_i \end{array} \right. &, & \left\{ \begin{array}{l} w(l) = w_j \\ \varphi(l) = \varphi_j \end{array} \right. &,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EAu_{,xx} &= 0 \\
 EJw_{,xxxx} &= 0
 \end{aligned}$$

 $\Rightarrow$ 

$$\begin{aligned}
 u(x) &= A + Bx \\
 w(x) &= C + Dx + Ex^2 + Fx^3
 \end{aligned}$$

La soluzione della linea elastica è univocamente individuata in funzione degli spostamenti nodali della trave.

Posto  $\xi = \frac{x}{l}$  si ha:

$$\begin{aligned}
 u(x) &= (1 - \xi) u_i + \xi u_j \\
 w(x) &= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) w_i + l(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3) \varphi_i \\
 &\quad + (3\xi^2 - 2\xi^3) w_j + l(\xi^2 - \xi^3) \varphi_j
 \end{aligned}$$

# La soluzione della linea elastica

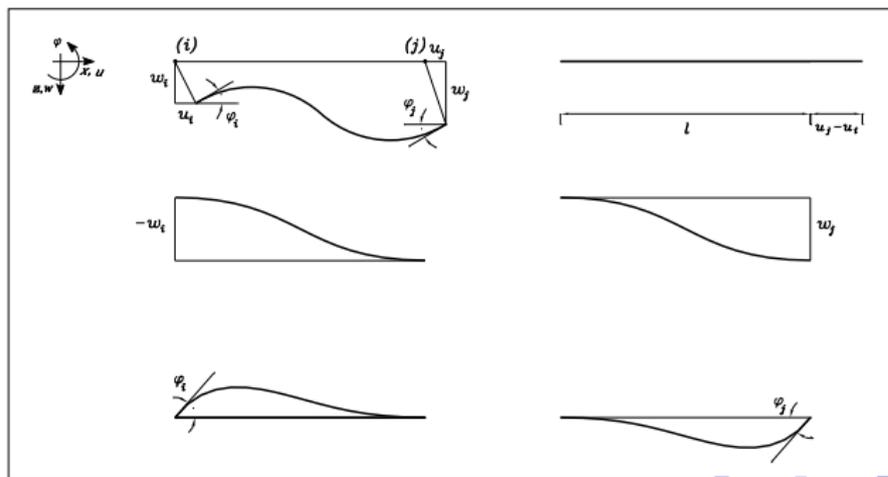
## Ricostruzione dei campi di spostamento

- La soluzione della linea elastica è univocamente individuata in funzione degli spostamenti nodali della trave.

Posto  $\xi = \frac{x}{l}$  si ha:

$$u(x) = (1 - \xi) u_i + \xi u_j$$

$$w(x) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) w_i + l(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3) \varphi_i + (3\xi^2 - 2\xi^3) w_j + l(\xi^2 - \xi^3) \varphi_j$$



# La soluzione della linea elastica

## Ricostruzione dei campi di spostamento

- La soluzione della linea elastica è univocamente individuata in funzione degli spostamenti nodali della trave.

Posto  $\xi = \frac{x}{l}$  si ha:

$$\begin{aligned} u(x) &= (1 - \xi) u_i + \xi u_j \\ w(x) &= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) w_i + l(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3) \varphi_i \\ &\quad + (3\xi^2 - 2\xi^3) w_j + l(\xi^2 - \xi^3) \varphi_j \end{aligned}$$

- In forma matriciale  $\mathbf{u}(x) = \mathbf{F}(x) \mathbf{u}_e$ :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u(x) \\ w(x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1 - \xi) & \cdot & \cdot & \cdot & \xi & \cdot & \cdot \\ \cdot & (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) & l(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3) & \cdot & (3\xi^2 - 2\xi^3) & l(\xi^2 - \xi^3) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ w_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_e}$$

$\mathbf{F}(x)$  è la matrice che raccoglie le **funzioni di forma** (esatte) del problema.

Per elementi strutturali diversi dalla trave, come le piastre, non è possibile ricavare le funzioni di forma esatte, per integrazione esatta delle equazioni differenziali del problema. In un approccio approssimato agli elementi finiti, le funzioni di forma (approssimate) vengono assegnate a priori.

# La soluzione della linea elastica

Ricostruzione dei campi caratteristiche di deformazione

- Dalle relazioni cinematiche  $\varepsilon = u_{,x}$  e  $\chi = -w_{,xx}$ :

$$\varepsilon[x] = \frac{u_j - u_i}{l}$$

$$\chi[x] = \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x\right)(w_j - w_i) + \left(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x\right)\varphi_i + \left(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x\right)\varphi_j$$

si osservi che i parametri deformativi sono sostanzialmente condizionati non tanto dai valori assoluti degli spostamenti ( $u_i, u_j, w_i, w_j$ ) quanto dai valori relativi ( $u_j - u_i, w_j - w_i$ )

- Una riscrittura in forma matriciale  $\epsilon(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e$ :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon(x) \\ \chi(x) \end{bmatrix}}_{\epsilon(x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{l} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x\right) & \left(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) & \left(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}$$

dove il vettore  $\mathbf{d}_e \equiv [\Delta u, \Delta w, \varphi_i, \varphi_j]^t$  è legato agli spostamenti significativi (ai fini della deformazione) dei nodi dell'asta.

# La soluzione della linea elastica

Ricostruzione dei campi caratteristiche di sollecitazione

- Dalle relazioni  $N = EA\varepsilon$ ,  $M = EJ\chi$  ed  $T = M_{,x}$ :

$$N[x] = \frac{EA}{l}(u_j - u_i) = N \text{ (cost)}$$

$$T[x] = \frac{12EJ}{l^3}(w_j - w_i) + \frac{6EJ}{l^2}\varphi_i + \frac{6EJ}{l^2}\varphi_j = T \text{ (cost)}$$

$$M[x] = \left\{-\frac{6EJ}{l^2} + \frac{12EJ}{l^3}x\right\}(w_j - w_i) + \left\{-\frac{4EJ}{l} + \frac{6EJ}{l^2}x\right\}\varphi_i + \left\{-\frac{2EJ}{l} + \frac{6EJ}{l^2}x\right\}\varphi_j$$

- In forma matriciale  $\sigma(x) = \mathbf{E} \mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e$  ( $\mathbf{E}$  è la matrice dei coefficienti elastici):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{bmatrix}}_{\sigma(x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} EA & \cdot \\ \cdot & EJ \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{l} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x\right) & \left(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) & \left(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}$$

## Osservazione 1

Lo stato elastico interno

$$\mathbf{u}(x) , \boldsymbol{\epsilon}(x) , \boldsymbol{\sigma}(x)$$

è definito univocamente in funzione dei parametri cinematici nodali

$$(u_i, w_i, \varphi_i, u_j, w_j, \varphi_j)$$

nel rispetto delle relazioni

**interne** all'elemento di equilibrio, congruenza e legame costitutivo

**esterne** all'elemento di sola congruenza cinematica ai due nodi dell'elemento

## Osservazione 2

Rimane ancora da realizzare il rispetto delle condizioni esterne di equilibrio ai nodi tra i valori delle caratteristiche di sollecitazione nodale e le forze esterne applicate ai due nodi di ogni elemento

$$N_i = -N(0), T_i = -T(0), M_i = -M(0), N_j = N(l), T_j = T(l), M_j = M(l)$$

## 2 Analisi matriciale di travature elastiche

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- **Analisi locale / coefficienti di rigidezza**
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

## 3 Una rivisitazione della strategia

- Una rappresentazione locale più efficiente
- Una rappresentazione locale naturale
- Il modello di trave di Timoshenko
- Presenza di stati di autotensioni

# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

Dalle relazioni di equilibrio sul contorno

$$N = -N_i = N_j = \frac{EA}{l}(u_j - u_i)$$

$$T = -T_i = T_j = \frac{12EJ}{l^3}(w_j - w_i) + \frac{6EJ}{l^2}\varphi_i + \frac{6EJ}{l^2}\varphi_j$$

$$M_i = \frac{6EJ}{l^2}(w_j - w_i) + \frac{4EJ}{l}\varphi_i + \frac{2EJ}{l}\varphi_j$$

$$M_j = \frac{6EJ}{l^2}(w_j - w_i) + \frac{2EJ}{l}\varphi_i + \frac{4EJ}{l}\varphi_j$$

Tali relazioni ...

... caratterizzano in modo sintetico la risposta elastica della trave

- cioè le forze nodali prodotte a seguito di una deformata elastica impressa (descritta dai relativi spostamenti nodali)
- o, il che è lo stesso, le forze nodali necessarie ad imprimere alla trave un deformata elastica.

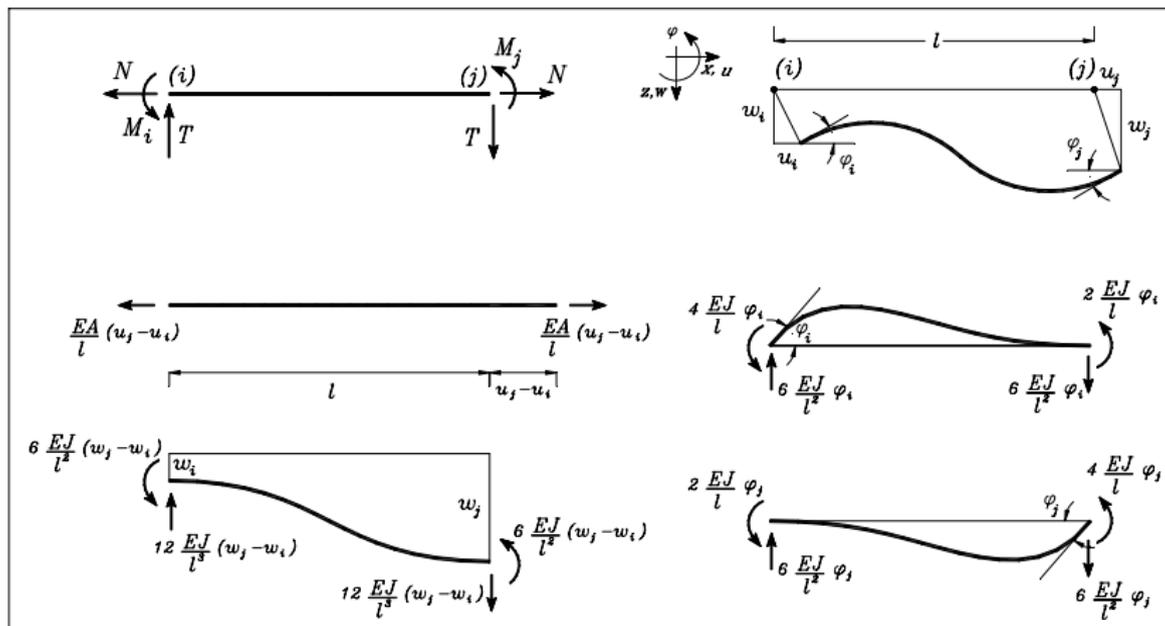
... regolano l'influenza della trave sul comportamento generale della struttura

essi sintetizzano, in termini di sole quantità nodali, come le parti adiacenti della struttura "vedono" la presenza della generica trave.

# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

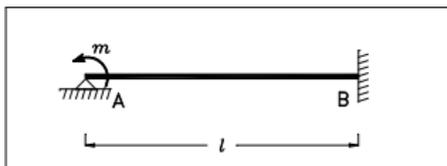
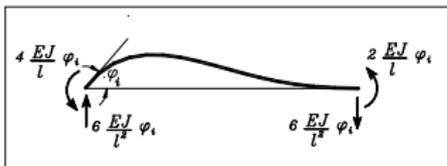
## I coefficienti di rigidezza

- I coefficienti delle relazioni esterne sono detti *coefficienti di rigidezza* della trave.
- Significato fisico dei coefficienti di rigidezza



# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

Ricostruzione alternativa dei coefficienti di rigidezza/1



## il sistema equivalente di vincoli

Le condizioni al contorno che determinano la cinematica fondamentale in figura

$$u_i = w_i = u_j = w_j = \varphi_j = 0$$

sono realizzate da un sistema equivalente di vincoli.

## diversa strategia di calcolo dei coefficienti elastici

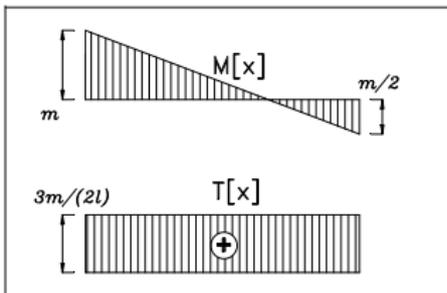
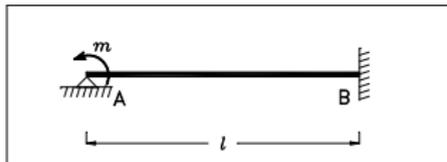
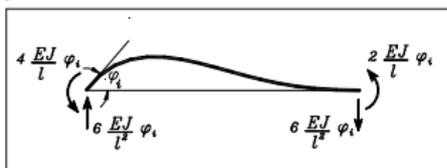
- l'esempio (iperstatico) può essere risolto (mediante il metodo delle forze) in funzione della coppia  $m$ ;
- la rotazione del nodo  $A$  risulta di facile calcolo mediante l'equazione dei lavori virtuali (facendo uso di un opportuno sistema di forze fittizie)

$$1 \cdot \varphi_i = \int_0^l \left( \delta T[x] \cdot \frac{T[x]}{GA^*} + \delta M[x] \cdot \frac{M[x]}{EJ} \right) ds \approx \frac{m l}{4EJ}$$

- la relazione trovata individua, assieme ai valori delle forze nodali, tutti i coefficienti di rigidezza associati alla cinematica

# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

Ricostruzione alternativa dei coefficienti di rigidezza/1



il sistema equivalente di vincoli

diversa strategia di calcolo dei coefficienti elastici

- l'esempio (iperstatico) può essere risolto (mediante il metodo delle forze) in funzione della coppia  $m$ ;
- la rotazione del nodo  $A$  risulta di facile calcolo mediante l'equazione dei lavori virtuali (facendo uso di un opportuno sistema di forze fittizie)

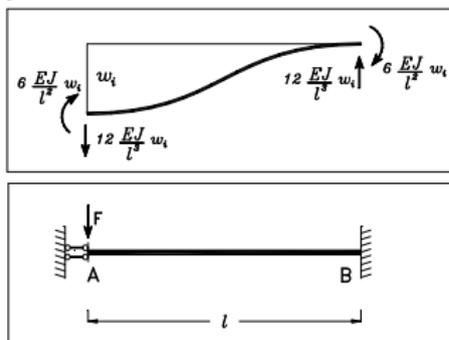
$$1 \cdot \varphi_i = \int_0^l (\delta T[x] \cdot \frac{T[x]}{GA^*} + \delta M[x] \cdot \frac{M[x]}{EJ}) ds \approx \frac{m l}{4EJ}$$

- la relazione trovata individua, assieme ai valori delle forze nodali, tutti i coefficienti di rigidezza associati alla cinematica.

$$M_i = m = \frac{4EJ}{l} \varphi_i, \quad M_j = \frac{m}{2} = \frac{2EJ}{l} \varphi_i, \quad T = \frac{3m}{2l} = \frac{6EJ}{l^2}$$

# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

Ricostruzione alternativa dei coefficienti di rigidezza/2



## il sistema equivalente di vincoli

Le condizioni al contorno che determinano la cinematica fondamentale in figura

$$u_i = \varphi_i = u_j = w_j = \varphi_j = 0$$

sono realizzate da un sistema equivalente di vincoli.

## diversa strategia di calcolo dei coefficienti elastici

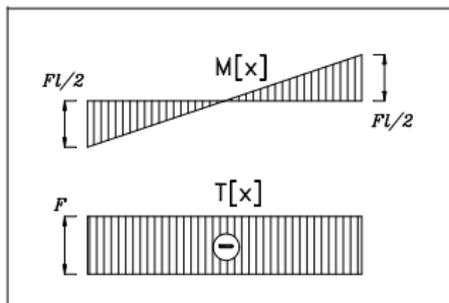
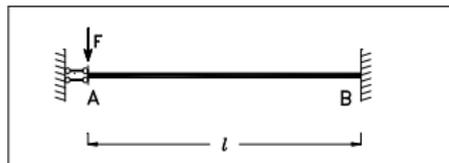
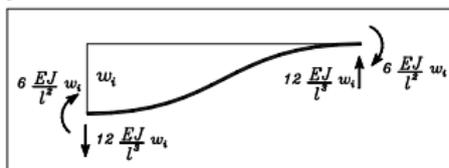
- l'esempio (iperstatico) può essere risolto (mediante il metodo delle forze) in funzione della forza  $F$ ;
- l'abbassamento del nodo  $A$  risulta di facile calcolo mediante l'equazione dei lavori virtuali (facendo uso di un opportuno sistema di forze fittizie)

$$1 \cdot w_i = \int_0^l \left( \delta T[x] \cdot \frac{T[x]}{GA^*} + \delta M[x] \cdot \frac{M[x]}{EJ} \right) ds \approx \frac{F l^3}{12EJ}$$

- la relazione trovata individua, assieme ai valori delle forze nodali, tutti i coefficienti di rigidezza associati alla cinematica

# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

Ricostruzione alternativa dei coefficienti di rigidezza/2



il sistema equivalente di vincoli

diversa strategia di calcolo dei coefficienti elastici

- l'esempio (iperstatico) può essere risolto (mediante il metodo delle forze) in funzione della forza  $F$ ;
- l'abbassamento del nodo  $A$  risulta di facile calcolo mediante l'equazione dei lavori virtuali (facendo uso di un opportuno sistema di forze fittizie)

$$1 \cdot w_i = \int_0^l (\delta T[x] \cdot \frac{T[x]}{GA^*} + \delta M[x] \cdot \frac{M[x]}{EJ}) ds \approx \frac{F l^3}{12EJ}$$

- la relazione trovata individua, assieme ai valori delle forze nodali, tutti i coefficienti di rigidezza associati alla cinematica.

$$T = F = \frac{12EJ}{l^3} w_i, \quad M_i = \frac{Fl}{2} = \frac{6EJ}{l^2} w_i, \quad M_j = \frac{Fl}{2} = \frac{6EJ}{l^2} w_i$$

# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

La matrice di rigidezza della trave / 1

Dalle relazioni che caratterizzano in modo sintetico la risposta elastica della trave

$$N = -N_i = N_j = \frac{EA}{l}(u_j - u_i)$$

$$T = -T_i = T_j = \frac{12EJ}{l^3}(w_j - w_i) + \frac{6EJ}{l^2}\varphi_i + \frac{6EJ}{l^2}\varphi_j$$

$$M_i = \frac{6EJ}{l^2}(w_j - w_i) + \frac{4EJ}{l}\varphi_i + \frac{2EJ}{l}\varphi_j$$

$$M_j = \frac{6EJ}{l^2}(w_j - w_i) + \frac{2EJ}{l}\varphi_i + \frac{4EJ}{l}\varphi_j$$

... si ricava la seguente ...

representazione matriciale (nel riferimento locale)

$$s_e = K_e d_e \Leftrightarrow \begin{matrix} \underbrace{\begin{bmatrix} N \\ T \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix}}_{s_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{6EJ}{l^2} \\ \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{4EJ}{l} & +\frac{2EJ}{l} \\ \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} & +\frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}}_{K_e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_j - u_i \\ w_j - w_i \\ \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{d_e}$$

# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

La matrice di rigidezza della trave / 1

rappresentazione matriciale (nel riferimento locale)

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e \Leftrightarrow \begin{bmatrix} N \\ T \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{6EJ}{l^2} \\ \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{4EJ}{l} & +\frac{2EJ}{l} \\ \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} & +\frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_e} \begin{bmatrix} u_j - u_i \\ w_j - w_i \\ \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix}$$

- Il vettore  $\mathbf{d}_e \equiv [\Delta u, \Delta w, \varphi_i, \varphi_j]^t$  assembla i parametri significativi degli spostamenti dei nodi dell'asta.
- Il vettore  $\mathbf{s}_e \equiv [N, T, M_i, M_j]^t$  assembla i parametri significativi delle forze nodali dell'asta.
- I vettori  $\mathbf{d}_e$  ed  $\mathbf{s}_e$  si corrispondono dualmente, cioè tale che sia possibile misurare un lavoro mediante il prodotto scalare  $\mathbf{s}_e^t \mathbf{d}_e$
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  dei coefficienti di rigidezza è detta **matrice di rigidezza della trave**

# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

La matrice di rigidezza della trave / 2 (una diversa scelta dei parametri nodali)

diversa rappresentazione matriciale

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \Leftrightarrow \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_j \\ T_j \\ M_j \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot & -\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot \\ \cdot & +\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & \cdot & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ \cdot & -\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{4EJ}{l} & \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot & +\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} & \cdot & +\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} \\ \cdot & -\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} & \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_e} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ w_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}$$

- Diversa scelta del vettore  $\mathbf{u}_e \equiv [u_i, w_i, \varphi_i, u_j, w_j, \varphi_j]^t$  che assembla **tutti** gli spostamenti nodali dell'asta.
- Il vettore  $\mathbf{p}_e \equiv [N_i, T_i, M_i, N_j, T_j, M_j]^t$  assembla **tutte** le componenti delle forze nodali dell'asta.
- I vettori  $\mathbf{u}_e$  ed  $\mathbf{p}_e$  devono corrispondere dualmente, cioè tale che sia possibile misurare un lavoro mediante il prodotto scalare  $\mathbf{p}_e^t \mathbf{u}_e$
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  dei coefficienti di rigidezza è detta **matrice di rigidezza della trave**

# Equazioni di equilibrio nodale della trave

Scrittura integrale e vettoriale delle condizioni di equilibrio

Il lavoro virtuale interno:

$$\delta L_i = \int_0^l \{N(x) \delta \epsilon(x) + M(x) \delta \chi(x)\} dx = \int_0^l \boldsymbol{\sigma}(x)^t \delta \boldsymbol{\epsilon}(x) dx$$

Equazione e principio dei lavori virtuali:

$$\int_0^l \boldsymbol{\sigma}(x)^t \delta \boldsymbol{\epsilon}(x) dx = \mathbf{s}_e^t \delta \mathbf{d}_e, \quad \forall \delta \mathbf{d}_e \quad (\delta \boldsymbol{\epsilon}(x) \text{ congruente con } \delta \mathbf{d}_e)$$

La soluzione della linea elastica  $\delta \boldsymbol{\epsilon}(x) = \mathbf{B}(x) \delta \mathbf{d}_e$  garantisce la congruenza tra deformazione  $\delta \boldsymbol{\epsilon}(x)$  e i parametri di spostamento nodale  $\delta \mathbf{d}_e$

# Equazioni di equilibrio nodale della trave

Scrittura integrale e vettoriale delle condizioni di equilibrio

Condizione di equilibrio in forma integrale (principio dei lavori virtuali):

$$\int_0^l \boldsymbol{\sigma}(x)^t \delta \boldsymbol{\epsilon}(x) dx = \mathbf{s}_e^t \delta \mathbf{d}_e, \quad \forall \delta \mathbf{d}_e \quad (\delta \boldsymbol{\epsilon}(x) = \mathbf{B}(x) \delta \mathbf{d}_e)$$

Alcuni sviluppi facendo uso della soluzione della linea elastica  $\delta \boldsymbol{\epsilon}(x) = \mathbf{B}(x) \delta \mathbf{d}_e$ :

$$\begin{aligned} \int_0^l \boldsymbol{\sigma}(x)^t (\mathbf{B}(x) \delta \mathbf{d}_e) dx &= \left( \int_0^l \boldsymbol{\sigma}(x)^t \mathbf{B}(x) dx \right) \delta \mathbf{d}_e \\ &= \left( \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \boldsymbol{\sigma}(x) dx \right)^t \delta \mathbf{d}_e = \mathbf{s}_e^t \delta \mathbf{d}_e, \quad \forall \delta \mathbf{d}_e \end{aligned}$$

Espressione vettoriale delle relazioni (di equilibrio):

$$\mathbf{s}_e = \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \boldsymbol{\sigma}(x) dx$$

# Equazioni di equilibrio nodale della trave

Scrittura integrale e vettoriale delle condizioni di equilibrio

Condizione di equilibrio in forma integrale (principio dei lavori virtuali):

$$\int_0^l \boldsymbol{\sigma}(x)^t \delta \boldsymbol{\epsilon}(x) dx = \mathbf{s}_e^t \delta \mathbf{d}_e, \quad \forall \delta \mathbf{d}_e \quad (\delta \boldsymbol{\epsilon}(x) = \mathbf{B}(x) \delta \mathbf{d}_e)$$

Espressione vettoriale delle relazioni (di equilibrio):

$$\mathbf{s}_e = \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \boldsymbol{\sigma}(x) dx$$

Tale relazione di equilibrio tra tensioni interne  $\boldsymbol{\sigma}(x)$  e forze nodali  $\mathbf{s}_e$  è ugualmente valida anche per elementi strutturali diversi dalla trave, a partire da funzioni di forma approssimate assunte per gli spostamenti locali e quindi per le deformazioni locali  $\delta \boldsymbol{\epsilon}(x) = \mathbf{B}(x) \delta \mathbf{d}_e$ , dove l'integrazione è effettuata sul dominio  $\mathcal{B}_e$  dell'elemento finito

$$\mathbf{s}_e = \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}(x)^t \boldsymbol{\sigma}(x) dv$$

# Equazioni di equilibrio nodale della trave

Espressione integrale della matrice di rigidezza della trave

Dalle relazioni di equilibrio nodale e facendo uso della soluzione della linea elastica

$$\mathbf{s}_e = \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \boldsymbol{\sigma}(x) dx \quad \boldsymbol{\sigma}(x) = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}(x) = \mathbf{E} \mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e$$

$$\mathbf{s}_e = \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \left( \mathbf{E} \mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e \right) dx = \underbrace{\left( \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \mathbf{E} \mathbf{B}(x) dx \right)}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{d}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$$

si ricava la espressione integrale della matrice di rigidezza della trave:

$$\mathbf{K}_e = \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \mathbf{E} \mathbf{B}(x) dx$$

Per elementi strutturali diversi dalla trave, in un approccio ad elementi finiti:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}(x)^t \mathbf{E} \mathbf{B}(x) dv$$

# Equazioni di equilibrio nodale della trave

Espressione integrale della matrice di rigidità della trave

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e, \quad \mathbf{K}_e = \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \mathbf{E} \mathbf{B}(x) dx$$

risulta infatti:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \mathbf{E} \mathbf{B}(x) dx = \int_0^l \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{l} & & & \\ & (-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x) & & \\ & (-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x) & & \\ & (-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x) & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^t(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} EA & & & \\ & EJ & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{l} & & & \\ & (-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x) & (-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x) & (-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(x)} dx \\ &= \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{EA}{l^2} & & & \\ & EJ(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x)^2 & EJ(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x) & EJ(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x) \\ & EJ(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x)(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x) & EJ(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x)^2 & EJ(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x)(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x) \\ & EJ(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x)(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x) & EJ(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x)(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x) & EJ(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x)^2 \end{bmatrix} dx \end{aligned}$$

# Equazioni di equilibrio nodale della trave

Espressione integrale della matrice di rigidità della trave

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e, \quad \mathbf{K}_e = \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \mathbf{E} \mathbf{B}(x) dx$$

risulta infatti:

$$\mathbf{K}_e = \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \mathbf{E} \mathbf{B}(x) dx = \int_0^l \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{l} & & & \\ & (-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x) & & \\ & \frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x & & \\ & (-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x) & & \\ & & & (-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^t(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} EA & & & \\ & EJ & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{l} & & & \\ & (-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x) & & \\ & (-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x) & & \\ & (-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x) & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(x)} dx$$

$$= \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & & & \\ & +\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{6EJ}{l^2} \\ & & +\frac{4EJ}{l} & +\frac{2EJ}{l} \\ & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} & +\frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}$$

# Significato energetico della matrice di rigidezza della trave

- Espressione dell'energia di deformazione per la trave

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \int_0^l \{ EA \epsilon(x)^2 + EJ \chi(x)^2 \} dx \equiv \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon(x) \\ \chi(x) \end{bmatrix}^t}_{\epsilon(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} EA & \cdot \\ \cdot & EJ \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon(x) \\ \chi(x) \end{bmatrix}}_{\epsilon(x)} \right\} dx$$

- Facendo uso della soluzione della linea elastica  $\epsilon(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e$

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \int_0^l (\mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e)^t \mathbf{E} (\mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e) dx = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \underbrace{\left( \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \mathbf{E} \mathbf{B}(x) dx \right)}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{d}_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$$

In conclusione, sulla base della precedente relazione, la matrice di rigidezza dell'elemento definisce la energia di deformazione della trave in termini dei soli parametri cinematici nodali.

# Caratteristiche della matrice di rigidità della trave

**proprietà particolari** : sono strettamente legati alla particolare scelta (numero  $n_e$  di parametri, ordine di questi, etc) del vettore dei parametri cinematici nodali  $\mathbf{d}_e$ , e quindi del vettore dei parametri statici nodali  $\mathbf{s}_e$  duale di questo.

**proprietà generali** : non dipendono dalla scelta del vettore  $\mathbf{d}_e$

# Caratteristiche della matrice di rigidezza della trave

- La matrice di rigidezza della trave è simmetrica

è una proprietà generale che deriva fundamentalmente dal carattere iperelastico del legame costitutivo del modello di trave alla base dell'analisi, cioè dalla relazione  $\Phi_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$ ;

# Caratteristiche della matrice di rigidità della trave

- La matrice di rigidità della trave è simmetrica
- In una rappresentazione locale a 6 parametri, la matrice  $\mathbf{K}_e$  ha una struttura di  $2 \times 2$  blocchi, ogni blocco di dimensioni  $3 \times 3$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot & -\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot \\ \cdot & +\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & \cdot & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ \cdot & -\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{4EJ}{l} & \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot & +\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} & \cdot & +\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} \\ \cdot & -\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} & \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \boxed{\bar{\mathbf{K}}_{ii} \quad (3 \times 3)} & \boxed{\bar{\mathbf{K}}_{ij} \quad (3 \times 3)} \\ \boxed{\bar{\mathbf{K}}_{ji} \quad (3 \times 3)} & \boxed{\bar{\mathbf{K}}_{jj} \quad (3 \times 3)} \end{bmatrix}$$

è una proprietà particolare legata solo alla caratterizzazione locale in termini dei vettori

$$\mathbf{u}_e \equiv [u_i, w_i, \varphi_i, u_j, w_j, \varphi_j]^t \text{ e } \mathbf{p}_e \equiv [N_i, T_i, M_i, N_j, T_j, M_j]^t;$$

# Caratteristiche della matrice di rigidezza della trave

- La matrice di rigidezza della trave è simmetrica
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  ha rango pari a tre

è una proprietà generale

# Caratteristiche della matrice di rigidità della trave

- La matrice di rigidità della trave è simmetrica
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  ha rango pari a tre
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  ha un numero di  $i = n_e - 3$  direzioni di singolarità, cioè direzioni  $\mathbf{u}_{ei}^r$  per le quali

$$(\mathbf{u}_{ei}^r)^t \mathbf{K}_e (\mathbf{u}_{ei}^r) = 0 \quad , \quad (i = 1, \dots)$$

dove  $n_e$  è il numero di parametri di rappresentazione locale  
( $n_e = 6, i = 3; n_e = 4, i = 1$ )

Tali direzioni di singolarità corrispondono ai moti rigidi (due di traslazione e uno di rotazione) possibili per le trave: questi infatti, non generando deformazioni pure (allungamenti o inflessioni) della trave, sono associati a valori nulli della relativa energia di deformazione:

$$\Phi_e^r = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{ek}^r)^t \mathbf{K} (\mathbf{u}_{ek}^r) = 0 \quad , \quad (k = 1, 2, 3)$$

# Caratteristiche della matrice di rigidità della trave

- La matrice di rigidità della trave è simmetrica
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  ha rango pari a tre
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  ha un numero di  $n_e - 3$  direzioni di singolarità
- La matrice di rigidità della trave è definita positiva in tutte le direzioni diverse dalle tre direzioni di singolarità, cioè

$$\mathbf{d}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e > 0, \forall \mathbf{d}_e \neq \mathbf{u}_{ek}^r$$

E' una proprietà generale legata alla positività della energia di deformazione  $\Phi_e(u_e) = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e > 0$ : bisogna fisicamente compiere lavoro positivo per deformare un corpo

# Caratteristiche della matrice di rigidezza della trave

- La matrice di rigidezza della trave è simmetrica
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  ha rango pari a tre
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  ha un numero di  $n_e - 3$  direzioni di singolarità
- La matrice di rigidezza della trave è definita positiva in tutte le direzioni diverse dalle tre direzioni di singolarità

# Fasi dell'analisi

## decomposizione

discretizzazione

completa  $\Rightarrow$

localizzazione

completa  $\Rightarrow$

rappresentazione nodale

completa  $\Rightarrow$

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$$

## assemblaggio e soluzione

globalizzazione

assemblaggio

condizioni al contorno

calcolo delle variabili primarie

rappresentazione della soluzione

# Fasi dell'analisi

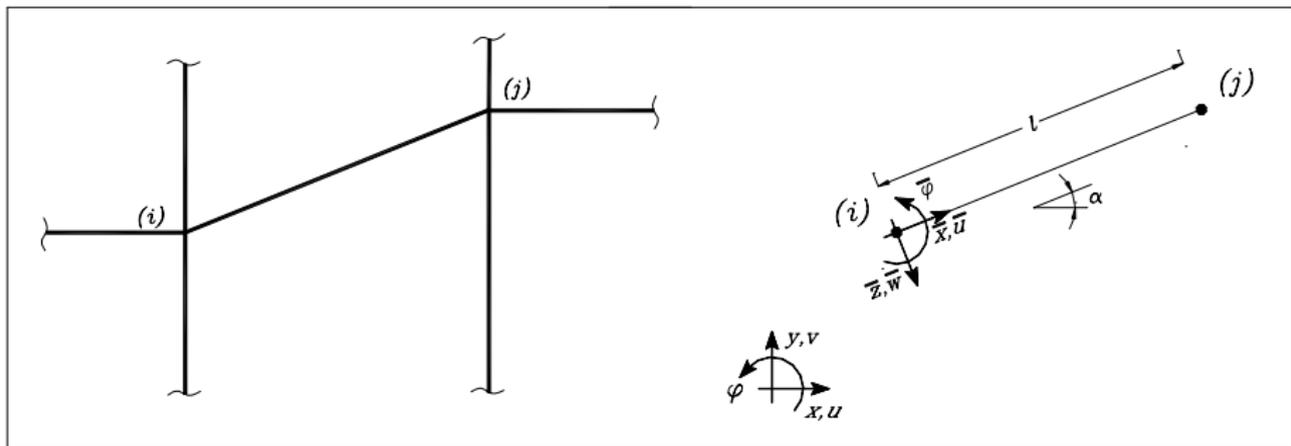
## 2 Analisi matriciale di travature elastiche

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- **Analisi globale / trasf. locale  $\rightarrow$  globale**
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

## 3 Una rivisitazione della strategia

- Una rappresentazione locale più efficiente
- Una rappresentazione locale naturale
- Il modello di trave di Timoshenko
- Presenza di stati di autotensioni

# Rappresentazione nel riferimento locale e globale



- Riferimento locale ( $\bar{x}, \bar{z}$ ) e globale ( $x, y$ ) dell'asta
- Coseni direttori dell'asta ( $i, j$ ) nel riferimento globale

$$s = \sin \alpha_e = \frac{y_j - y_i}{l} \quad , \quad c = \cos \alpha_e = \frac{x_j - x_i}{l} \quad , \quad l = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

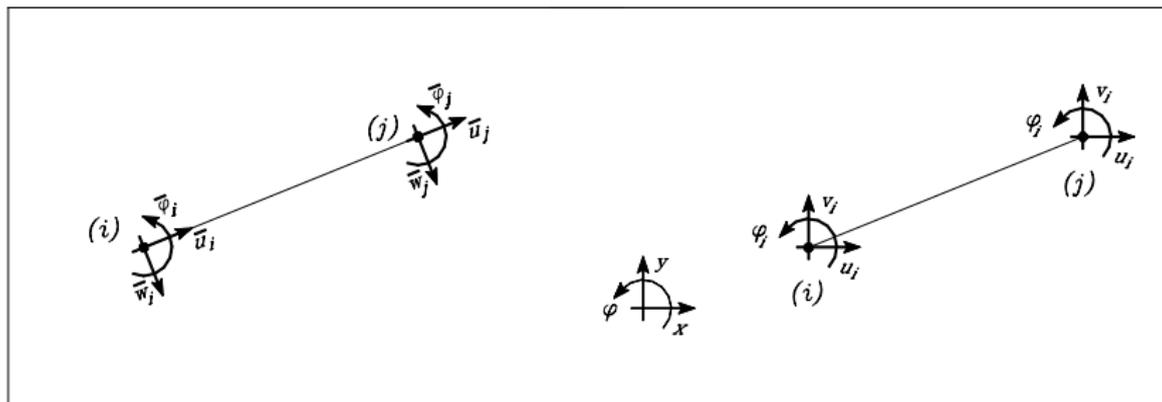
- Spostamenti e forze nodali della trave ( $i, j$ ) nei due riferimenti:

$$\text{rif.loc.} \quad (\bar{u}_i^e, \bar{w}_i^e, \bar{\varphi}_i^e) \quad , \quad (\bar{N}_i^e, \bar{T}_i^e, \bar{M}_i^e) \quad , \quad (\bar{u}_j^e, \bar{w}_j^e, \bar{\varphi}_j^e) \quad , \quad (\bar{N}_j^e, \bar{T}_j^e, \bar{M}_j^e)$$

$$\text{rif.glo.} \quad (u_i^e, v_i^e, \varphi_i^e) \quad , \quad (P_i^e, Q_i^e, M_i^e) \quad , \quad (u_j^e, v_j^e, \varphi_j^e) \quad , \quad (P_j^e, Q_j^e, M_j^e)$$

# Trasformazione locale-globale degli spostamenti nodali

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_j^e - \bar{u}_i^e &= -\cos \alpha_e u_i^e - \sin \alpha_e v_i^e \\
 &\quad + \cos \alpha_e u_j^e + \sin \alpha_e v_j^e \\
 \bar{w}_j^e - \bar{w}_i^e &= -\sin \alpha_e u_i^e + \cos \alpha_e v_i^e \\
 &\quad + \sin \alpha_e u_j^e - \cos \alpha_e v_j^e \\
 \bar{\varphi}_i^e &= \varphi_i^e \\
 \bar{\varphi}_j^e &= \varphi_j^e
 \end{aligned}
 \Leftrightarrow
 \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \bar{u}^e \\ \Delta \bar{w}^e \\ \bar{\varphi}_i^e \\ \bar{\varphi}_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}
 =
 \underbrace{\begin{bmatrix} -c & -s & 0 & +c & +s & 0 \\ -s & +c & 0 & +s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\bar{A}}_e}
 \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \varphi_i^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ \varphi_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_e}$$



# Trasformazione locale-globale delle forze nodali

$$P_i^e = -\bar{N}^e \cos \alpha_e - \bar{T}^e \sin \alpha_e$$

$$Q_i^e = -\bar{N}^e \sin \alpha_e + \bar{T}^e \cos \alpha_e$$

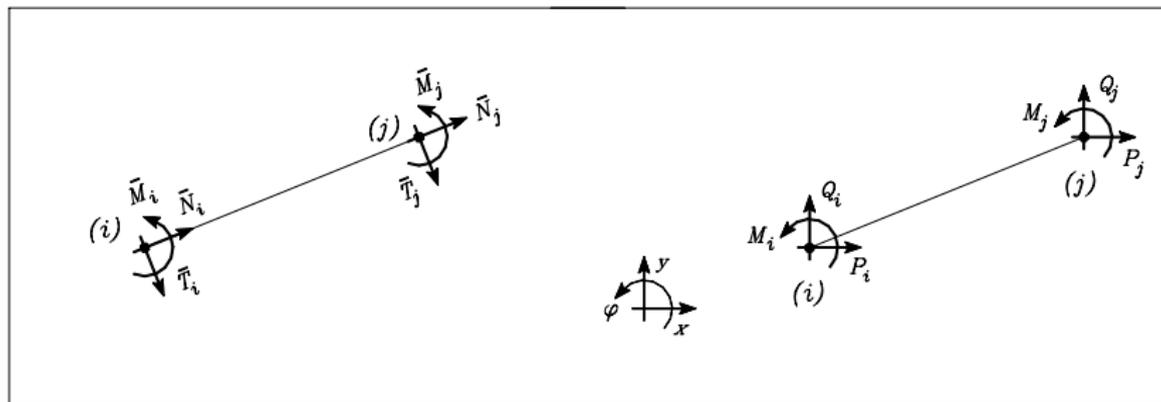
$$M_i^e = \bar{M}_i^e$$

$$P_j^e = +\bar{N}^e \cos \alpha_e + \bar{T}^e \sin \alpha_e$$

$$Q_j^e = +\bar{N}^e \sin \alpha_e - \bar{T}^e \cos \alpha_e$$

$$M_j^e = \bar{M}_j^e$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} P_i^e \\ Q_i^e \\ M_i^e \\ P_j^e \\ Q_j^e \\ M_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} -c & -s & 0 & 0 \\ -s & +c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +c & +s & 0 & 0 \\ +s & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_e^t} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{N}^e \\ \bar{T}^e \\ \bar{M}_i^e \\ \bar{M}_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_e}$$



# Trasformazione locale-globale / 1

- degli spostamenti nodali

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \bar{u}^e \\ \Delta \bar{w}^e \\ \bar{\varphi}_i^e \\ \bar{\varphi}_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} -c & -s & 0 & +c & +s & 0 \\ -s & +c & 0 & +s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \varphi_i^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ \varphi_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_e}$$

- delle forze nodali

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_i^e \\ Q_i^e \\ M_i^e \\ P_j^e \\ Q_j^e \\ M_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} -c & -s & 0 & 0 \\ -s & +c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +c & +s & 0 & 0 \\ +s & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_e^t} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{N}^e \\ \bar{T}^e \\ \bar{M}_i^e \\ \bar{M}_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_e}$$

# Trasformazione locale-globale / 2

- degli spostamenti nodali

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{u}_i^e \\ \bar{w}_i^e \\ \bar{\varphi}_i^e \\ \bar{u}_j^e \\ \bar{w}_j^e \\ \bar{\varphi}_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{\bar{u}}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} +c & +s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +s & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +c & +s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\bar{A}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \varphi_i^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ \varphi_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_e}$$

- delle forze nodali

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_i^e \\ Q_i^e \\ M_i^e \\ P_j^e \\ Q_j^e \\ M_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} +c & +s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +s & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +c & +s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\bar{A}}_e^t} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{N}_i^e \\ \bar{T}_i^e \\ \bar{M}_i^e \\ \bar{N}_j^e \\ \bar{T}_j^e \\ \bar{M}_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{\bar{p}}_e}$$

# Relazioni delle trasformazioni locale-globale

- Relazioni della trasformazione locale-globale di forze e spostamenti nodali:

$$\mathbf{d}_e = \bar{\mathbf{A}}_e \mathbf{u}_e \quad , \quad \mathbf{p}_e = \bar{\mathbf{A}}_e^t \mathbf{s}_e$$

Vale infatti:

$$\mathbf{p}_e^t \mathbf{u}_e = \mathbf{s}_e^t \mathbf{d}_e = \mathbf{s}_e^t (\bar{\mathbf{A}}_e \mathbf{u}_e) = (\bar{\mathbf{A}}_e^t \mathbf{s}_e)^t \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{p}_e = \bar{\mathbf{A}}_e^t \mathbf{s}_e$$

- Trasformazione locale-globale della matrice di rigidezza trave  $(i, j)$ :

$$\mathbf{K}_e = \bar{\mathbf{A}}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{A}}_e$$

Vale infatti

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{A}}_e \mathbf{u}_e)^t \bar{\mathbf{K}}_e (\bar{\mathbf{A}}_e \mathbf{u}_e) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^t (\bar{\mathbf{A}}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{A}}_e) \mathbf{u}_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e$$

$$\Rightarrow \mathbf{K}_e = \bar{\mathbf{A}}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{A}}_e$$

## 2 Analisi matriciale di travature elastiche

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- **Analisi globale / congruenza cinematica**
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

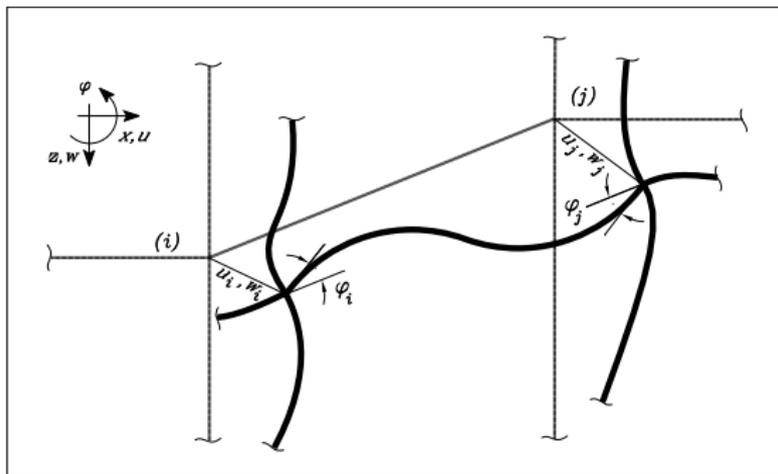
## 3 Una rivisitazione della strategia

- Una rappresentazione locale più efficiente
- Una rappresentazione locale naturale
- Il modello di trave di Timoshenko
- Presenza di stati di autotensioni

# Congruenza cinematica nodale

## definizione di congruenza

*gli spostamenti (e le rotazioni) nodali devono essere uguali per tutti gli elementi convergenti sullo stesso nodo.*



# Congruenza cinematica nodale

## definizione di congruenza

*gli spostamenti (e le rotazioni) nodali devono essere uguali per tutti gli elementi convergenti sullo stesso nodo.*

- vettore globale degli spostamenti nodali

$$\mathbf{u} \equiv [(u, v, \varphi)_1, \dots, (u, v, \varphi)_i, \dots, (u, v, \varphi)_j, \dots, (u, v, \varphi)_n]^t$$

- congruenza cinematica sul generico nodo  $k$  (per ogni elemento convergente sul nodo):

$$u_k^e = u_k, \quad v_k^e = v_k, \quad \varphi_k^e = \varphi_k, \quad \forall e$$

- operazione di indentificazione delle variabili nodali sul generico elemento di nodi  $(i, j)$ :

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{l}_e \mathbf{u} :$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{u}_e \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad} \\ [u_i \quad v_i \quad \varphi_i \quad u_j \quad v_j \quad \varphi_j] \\ \swarrow \qquad \qquad \searrow \\ [u_1 \quad v_1 \quad \varphi_1 \quad \cdots \quad u_i \quad v_i \quad \varphi_i \quad \cdots \quad u_j \quad v_j \quad \varphi_j \quad \cdots \quad u_n \quad v_n \quad \varphi_n] \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad} \\ \mathbf{u} \end{array}$$

# Relazioni di congruenza per una trave di nodi ( $i, j$ )

I parametri nodali che caratterizzano (nel riferimento locale) la deformazione di una trave sono univocamente determinati da precise *relazioni di congruenza cinematica* in funzione degli spostamenti dei nodi dell'intera struttura (nel riferimento globale).

$$\mathbf{d}_e = \bar{\mathbf{A}}_e \mathbf{u}_e = \bar{\mathbf{A}}_e \mathbf{l}_e \mathbf{u} = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$$

$\mathbf{A}_e$  è detta **matrice di congruenza**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{d}_e \\ \Delta \bar{u}^e \\ \Delta \bar{w}^e \\ \bar{\varphi}_i^e \\ \bar{\varphi}_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} -c & -s & 0 & +c & +s & 0 \\ -s & +c & 0 & +s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & -c & -s & 0 & \dots & +c & +s & 0 & \dots \\ \dots & -s & +c & 0 & \dots & +s & -c & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ \dots \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \\ \dots \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

# Rappresentazione cinematica della struttura

## Le cinematiche fondamentali della struttura

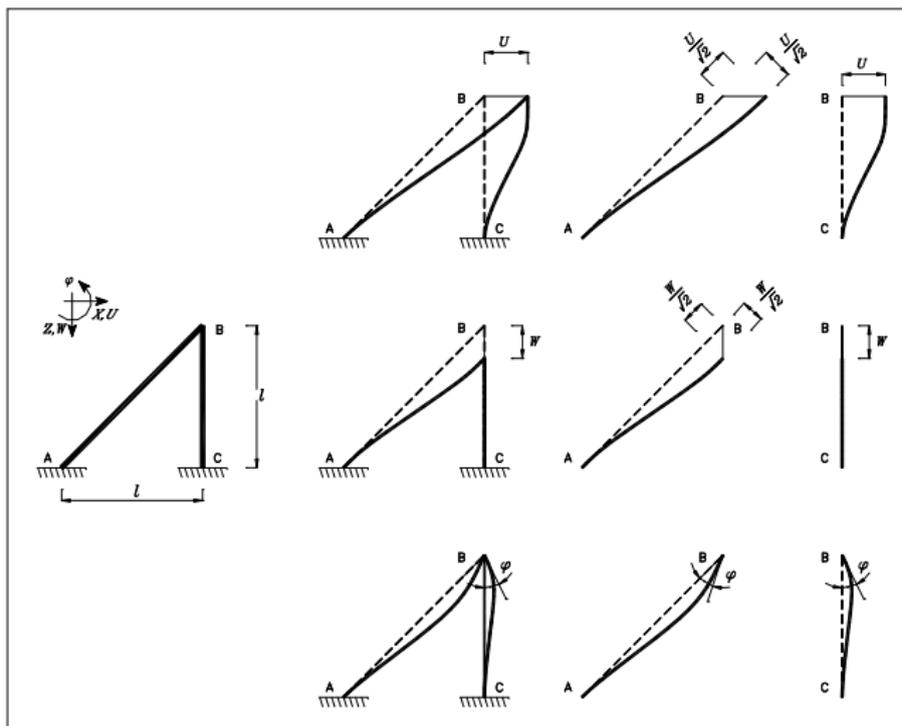
- La soluzione della linea elastica per ogni trave della struttura e le relazioni di congruenza nodale forniscono una rappresentazione della cinematica compatibile dell'intera struttura in funzione dei soli parametri  $\mathbf{u}$  di spostamento dei nodi della struttura

$$\bar{\mathbf{u}}(x) = \left\{ \begin{array}{c} u_e(x) \\ w_e(x) \end{array} \right\} = \mathbf{F}(x) \mathbf{u}_e \quad , \quad \bar{\mathbf{u}}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$$

- Ogni singolo parametro scalare del vettore degli spostamenti nodali  $\mathbf{u}$  è associato ad una cinematica fondamentale della struttura, cioè ad una cinematica della struttura ottenuta per un valore arbitrario del parametro considerato e con valori nulli dei rimanenti parametri.
- Una generica cinematica compatibile dell'intera struttura risulta dalla combinazione lineare delle cinematiche fondamentali associate ad ognuno dei parametri scalari del vettore  $\mathbf{u}$

# Rappresentazione cinematica della struttura

Le cinematiche fondamentali della struttura / esempio



Asta AB

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{2}} U - \frac{1}{\sqrt{2}} W$$

$$\Delta w = \frac{1}{\sqrt{2}} U + \frac{1}{\sqrt{2}} W$$

$$\varphi_i = 0$$

$$\varphi_j = \varphi$$

Asta BC

$$\Delta u = -W$$

$$\Delta w = U$$

$$\varphi_i = \varphi$$

$$\varphi_j = 0$$

# Rappresentazione cinematica della struttura

## Osservazioni

- In generale, il numero dei parametri di spostamento nodale (e quindi il numero di cinematiche fondamentali) è  $3 \times n$ , dove  $n$  indica il numero di nodi.
- La necessaria presenza dei vincoli cinematici esterni (altrimenti la struttura sarebbe labile) predetermina i valori di alcuni parametri cinematici nodali e riduce il numero dei parametri cinematici indipendenti.
- Come vedremo, tale numero può essere ulteriormente ridotto da condizioni di vincolo costitutivo come, ad esempio, l'ipotesi di indeformabilità assiale delle travi.
- A meno di casi particolarmente semplici, è invece esclusa dalla nostra trattazione la presenza di sconnessioni interne (tipo cerniere interne, ecc.), che aumenterebbe il numero dei parametri cinematici indipendenti e richiederebbe uno studio ad hoc del problema.
- Fa eccezione il caso delle travature reticolari, la cui rappresentazione cinematica risulta particolarmente semplice essendo definita dalla sola posizione (e non rotazione) dei relativi nodi-cerniera.

## 2 Analisi matriciale di travature elastiche

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- **Analisi globale / equilibrio**
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

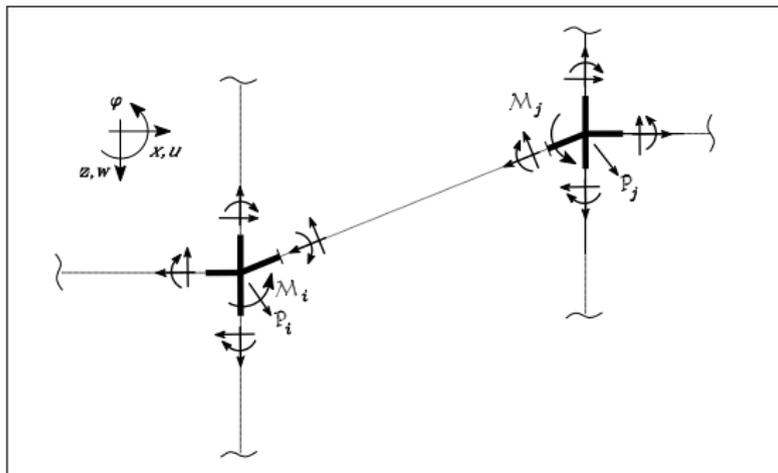
## 3 Una rivisitazione della strategia

- Una rappresentazione locale più efficiente
- Una rappresentazione locale naturale
- Il modello di trave di Timoshenko
- Presenza di stati di autotensioni

# Equilibrio nodale

## definizione di equilibrio nodale

*per ogni nodo, la risposta elastica, cioè la somma delle forze (e coppie) nodali interne, trasmesse dagli elementi convergenti sul nodo, deve equilibrare le forze (e coppie) applicate esternamente al nodo.*



# Equilibrio nodale

## definizione di equilibrio nodale

*per ogni nodo, la risposta elastica, cioè la somma delle forze (e coppie) nodali interne, trasmesse dagli elementi convergenti sul nodo, deve equilibrare le forze (e coppie) applicate esternamente al nodo.*

- Vettore globale dei carichi esterni nodali

$$\mathbf{p} \equiv [(P, Q, M)_1, \dots, (P, Q, M)_i, \dots, (P, Q, M)_j, \dots, (P, Q, M)_n]^t$$

- Equilibrio del generico nodo  $k$  (la somma è estesa a tutti gli elementi convergenti sul nodo):

$$P_k = \sum_e P_k^e, \quad Q_k = \sum_e Q_k^e, \quad M_k = \sum_e M_k^e$$

- Equilibrio globale su tutti i nodi della struttura (equazione dei lavori virtuali):

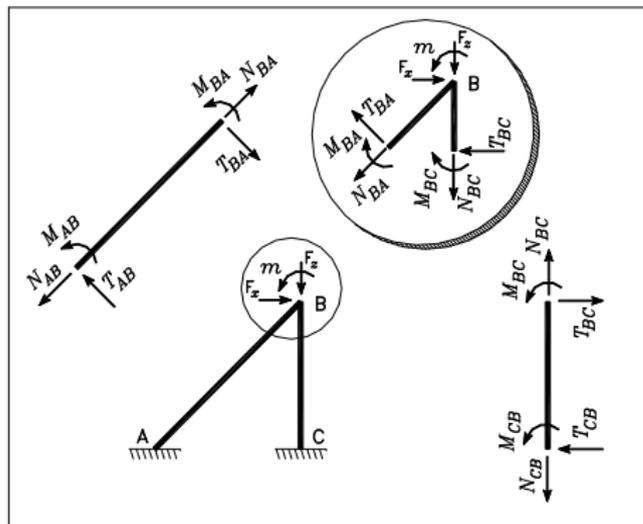
$$\underbrace{\mathbf{p}^t \delta \mathbf{u}}_{\text{lav.est. } \delta L_e} = \underbrace{\sum_e \int_I \boldsymbol{\sigma}^t \delta \boldsymbol{\epsilon} dx}_{\text{lav.int. } \delta L_i}, \quad \forall \delta \boldsymbol{\epsilon}[x] \text{ congruente con } \delta \mathbf{u}$$

# Equilibrio nodale

esempio (continuazione)

## definizione di equilibrio nodale

per ogni nodo, la risposta elastica, cioè la somma delle forze (e coppie) nodali interne, trasmesse dagli elementi convergenti sul nodo, deve equilibrare le forze (e coppie) applicate esternamente al nodo.



$$\begin{cases} \frac{N_{BA}}{\sqrt{2}} + \frac{T_{BA}}{\sqrt{2}} + T_{BC} = F_x \\ -\frac{N_{BA}}{\sqrt{2}} + \frac{T_{BA}}{\sqrt{2}} - N_{BC} = F_z \\ M_{BA} + M_{BC} = m \end{cases}$$

# Equilibrio nodale

## Rappresentazione vettoriale

- Equilibrio globale della struttura (equazione dei lavori virtuali):

$$\mathbf{p}^t \delta \mathbf{u} = \sum_e \int_I \boldsymbol{\sigma}^t \delta \boldsymbol{\epsilon} dx, \quad \forall \delta \boldsymbol{\epsilon}[x] \text{ congruente con } \delta \mathbf{u}$$

- Equilibrio della generica trave (equazione dei lavori virtuali):

$$\mathbf{s}_e^t \delta \mathbf{d}_e = \int_I \boldsymbol{\sigma}^t \delta \boldsymbol{\epsilon} dx, \quad \forall \delta \boldsymbol{\epsilon}[x] \text{ congruente con } \delta \mathbf{d}_e$$

Riscrittura della condizione di equilibrio su tutti i nodi della struttura:

$$\mathbf{p}^t \delta \mathbf{u} = \sum_e \mathbf{s}_e^t \delta \mathbf{d}_e = \sum_e \mathbf{s}_e^t (\mathbf{A}_e \delta \mathbf{u}) = \left( \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e \right)^t \delta \mathbf{u}$$

$\forall \delta \mathbf{d}_e$  congruente con  $\delta \mathbf{u}$  : in particolare per  $\delta \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \delta \mathbf{u}$

$$\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$$

# Risposta elastica ed equilibrio nodale

- I vettori  $\mathbf{s}_e$  sono rappresentativi delle azioni interne delle singole travi indotte dalla deformata elastica della stessa, in quanto forze nodali prodotte a livello di ogni elemento trave da questa deformazione (elastica) : **sono la risposta elastica relativa alle singole travi.**
- In tale senso il vettore

$$\mathbf{S} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$$

è rappresentativo delle azioni interne dell'intera struttura indotte dalla deformazione elastica della stessa, in quanto risultante nodale della risposta elastica delle singole travi: **è la risposta elastica della struttura.**

- La condizione di equilibrio nodale richiede l'uguaglianza tra le forze esterne applicate ai nodi della struttura e le forze interne della risposta elastica nodale (prodotta dalla deformazione interna alla struttura)

$$\mathbf{p} = \mathbf{S}$$

# Fasi dell'analisi

## decomposizione

discretizzazione

completa  $\Rightarrow$

localizzazione

completa  $\Rightarrow$

rappresentazione nodale

completa  $\Rightarrow$

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$$

## assemblaggio e soluzione

globalizzazione

completa  $\Rightarrow$

assemblaggio

completa  $\Rightarrow$

condizioni al contorno

calcolo delle variabili primarie

rappresentazione della soluzione

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$$

$$\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$$

## 2 Analisi matriciale di travature elastiche

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- **Analisi globale / il metodo delle rigidezze**
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

## 3 Una rivisitazione della strategia

- Una rappresentazione locale più efficiente
- Una rappresentazione locale naturale
- Il modello di trave di Timoshenko
- Presenza di stati di autotensioni

# Il metodo delle rigidezze

Il **metodo delle rigidezze** (o degli spostamenti) ...

*definisce* una strategia di risoluzione di travi elastiche con carichi esterni costituiti (o equivalenti) a forze e coppie applicate ai nodi.

*fa uso* delle seguenti relazioni:

- (a)  $\mathbf{s}_e = \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e$  (di elasticità di ogni singola trave);
- (b)  $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$  (di compatibilità cinematica nodale);
- (c)  $\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$  (di equilibrio nodale).

In particolare, il metodo delle rigidezze ...

*impone* le condizioni di equilibrio nodale (c)

*assumendo* le relazioni di elasticità (a),

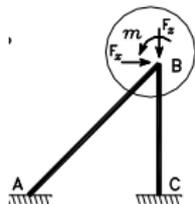
e *facendo uso* delle condizioni di compatibilità (b)

$$\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e = \sum_e \mathbf{A}_e^t (\bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e) = \sum_e \mathbf{A}_e^t (\bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{A}_e \mathbf{u}) = \left( \sum_e \mathbf{A}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{A}_e \right) \mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{u}$$

La matrice  $\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{A}_e$  è detta *matrice di rigidezza della struttura*.

# Assemblaggio della matrice di rigidezza

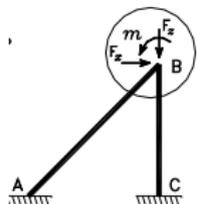
## esempio (continuazione)



	asta AB	asta BC
<i>rel. congruenza</i> $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$	$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{2}} (U - W), \quad \varphi_i = 0$ $\Delta w = \frac{1}{\sqrt{2}} (U + W), \quad \varphi_j = \varphi$	$\Delta u = -W, \quad \varphi_i = \varphi$ $\Delta w = U, \quad \varphi_j = 0$
<i>rel. costitutive</i> $\mathbf{s}_e = \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e$	$N_{AB} = \frac{EA}{\sqrt{2}l} \Delta u$ $T_{AB} = \frac{12EJ}{2\sqrt{2}l^3} \Delta w + \frac{6EJ}{2l^2} \varphi$ $M_{AB} = \frac{6EJ}{2l^2} \Delta w + \frac{2EJ}{\sqrt{2}l} \varphi$ $M_{BA} = \frac{6EJ}{2l^2} \Delta w + \frac{4EJ}{\sqrt{2}l} \varphi$	$N_{BC} = \frac{EA}{l} \Delta u$ $T_{BC} = \frac{12EJ}{l^3} \Delta w + \frac{6EJ}{l^2} \varphi$ $M_{BC} = \frac{6EJ}{l^2} \Delta w + \frac{4EJ}{l} \varphi$ $M_{CB} = \frac{6EJ}{l^2} \Delta w + \frac{2EJ}{l} \varphi$
<i>rel. equilibrio</i> $\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{N_{BA}}{\sqrt{2}} + \frac{T_{BA}}{\sqrt{2}} + T_{BC} = F_x \\ -\frac{N_{BA}}{\sqrt{2}} + \frac{T_{BA}}{\sqrt{2}} - N_{BC} = F_z \\ M_{BA} + M_{BC} = m \end{array} \right.$	

# Assemblaggio della matrice di rigidezza

## esempio (continuazione)



	asta AB	asta BC
<i>rel. congruenza</i> $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$	$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{2}} (U - W)$ , $\varphi_i = 0$ $\Delta w = \frac{1}{\sqrt{2}} (U + W)$ , $\varphi_j = \varphi$	$\Delta u = -W$ , $\varphi_i = \varphi$ $\Delta w = U$ , $\varphi_j = 0$
<i>rel. costitutive</i> $\mathbf{s}_e = \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{A}_e \mathbf{u}$	$N_{AB} = \frac{EA}{\sqrt{2}l} \left( \frac{U-W}{\sqrt{2}} \right)$ $T_{AB} = \frac{12EJ}{2\sqrt{2}l^3} \left( \frac{U+W}{\sqrt{2}} \right) + \frac{6EJ}{2l^2} \varphi$ $M_{AB} = \frac{6EJ}{2l^2} \left( \frac{U+W}{\sqrt{2}} \right) + \frac{2EJ}{\sqrt{2}l} \varphi$ $M_{BA} = \frac{6EJ}{2l^2} \left( \frac{U+W}{\sqrt{2}} \right) + \frac{4EJ}{\sqrt{2}l} \varphi$	$N_{BC} = \frac{EA}{l} (-W)$ $T_{BC} = \frac{12EJ}{l^3} (U) + \frac{6EJ}{l^2} \varphi$ $M_{BC} = \frac{6EJ}{l^2} (U) + \frac{4EJ}{l} \varphi$ $M_{CB} = \frac{6EJ}{l^2} (U) + \frac{2EJ}{l} \varphi$
<i>rel. equilibrio</i> $\mathbf{p} = \mathbf{K} \mathbf{u}$	$\begin{bmatrix} \left( \frac{EA}{2\sqrt{2}l} + (12 + \frac{3}{\sqrt{2}}) \frac{EJ}{l^3} \right) & \left( -\frac{EA}{2\sqrt{2}l} + \frac{3EJ}{\sqrt{2}l^3} \right) & (6 + \frac{3EJ}{\sqrt{2}}) \frac{EJ}{l^2} \\ \left( -\frac{EA}{2\sqrt{2}l} + \frac{3EJ}{\sqrt{2}l^3} \right) & \left( (1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}) \frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{\sqrt{2}l^3} \right) & \frac{3EJ}{\sqrt{2}l^2} \\ (6 + \frac{3EJ}{\sqrt{2}}) \frac{EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{\sqrt{2}l^2} & (4 + \frac{4EJ}{\sqrt{2}}) \frac{EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \\ m \end{bmatrix}$	

# Una rappresentazione energetica del metodo delle rigidezze

L'energia di deformazione (significato energetico della matrice di rigidezze):

$$\begin{aligned}\Phi[u] &= \sum_{\text{travi}} \Phi_e[u_e] = \sum \left( \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e \right) = \frac{1}{2} \sum (\mathbf{u}^t \mathbf{A}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{A}_e \mathbf{u}) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \underbrace{\left( \sum \mathbf{A}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{A}_e \right)}_{\mathbf{K}} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u}\end{aligned}$$

Il lavoro dei carichi :

$$\text{LC} = \mathbf{p}^t \mathbf{u}$$

Minimo della energia potenziale totale :

$$\begin{aligned}\Pi(u) = \Phi(u) - \text{LC} = \min_u &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{p}^t \mathbf{u} = \min_u \\ &\Rightarrow \delta \mathbf{u}^t (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{p}) = 0, \forall \delta \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}\end{aligned}$$

# Caratteristiche della matrice di rigidezza della struttura

- La matrice di rigidezza globale della struttura è simmetrica

l'operazione di assemblaggio  $\mathbf{K} = \sum_{e \in E} \mathbf{A}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{A}_e$  conserva, sulla matrice globale  $\mathbf{K}$ , le proprietà di simmetria delle matrici locali  $\bar{\mathbf{K}}_e$

- La matrice  $\mathbf{K}$  è singolare nelle tre direzioni che corrispondono ai tre modi rigidi della struttura ( $\mathbf{u}_{r1}, \mathbf{u}_{r2}, \mathbf{u}_{r3}$ )

I moti rigidi, per definizione, non producono deformazione nella struttura ed è pertanto nulla la relativa energia di deformazione e risulta

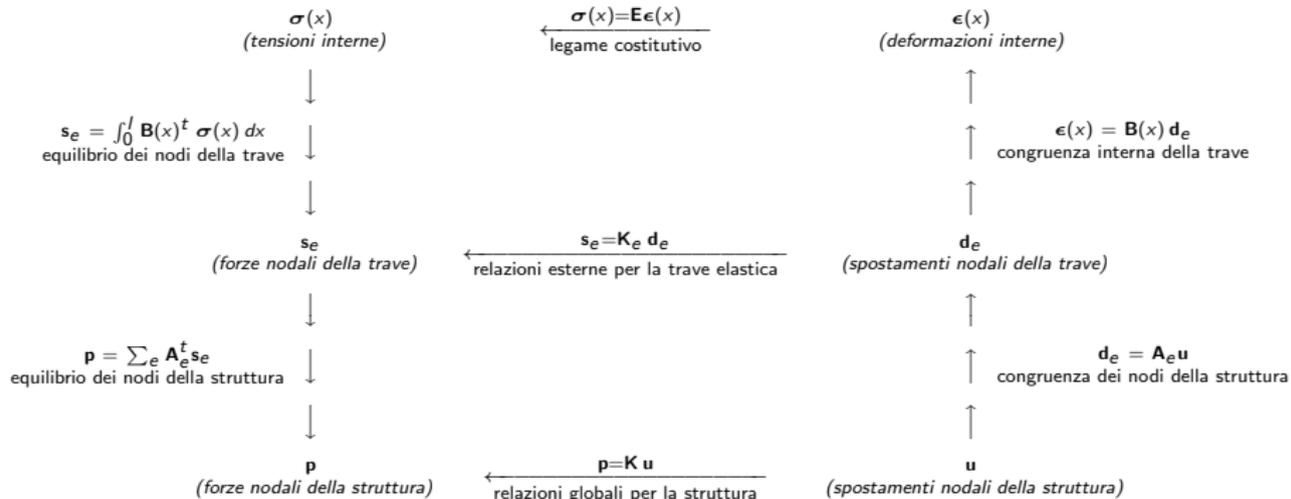
$$\Phi^r = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{rk}^t \mathbf{K} \mathbf{u}_{rk} = 0, \quad (k = 1, 2, 3)$$

- La matrice di rigidezza della struttura è definita positiva in tutte le direzioni diverse dalle tre direzioni di singolarità, cioè

$$\mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} > 0, \quad \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{u}_{rk}$$

E' una proprietà generale legata alla positività della energia di deformazione  $\Phi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} > 0$  della struttura: bisogna fisicamente compiere lavoro positivo per deformare un corpo

# Relazioni multilivello





# Fasi dell'analisi

## decomposizione

discretizzazione

completa  $\Rightarrow$ 

localizzazione

completa  $\Rightarrow$ 

rappresentazione nodale

completa  $\Rightarrow$ 

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$$

## assemblaggio e soluzione

globalizzazione

completa  $\Rightarrow$ 

assemblaggio

completa  $\Rightarrow$ 

condizioni al contorno

completa  $\Rightarrow$ 

$$\mathbf{p} = \mathbf{K} \mathbf{u}$$

calcolo delle variabili primarie

da completare

rappresentazione della soluzione

da completare

# I passi dell'analisi

Una strategia automatica di analisi

Proprio per la naturalezza con cui è stato possibile formalizzare le varie fasi del metodo in una successione di operazioni matriciali (il linguaggio dei calcolatori), il metodo delle rigidezze si presta in modo particolare ad una implementazione in codici di calcolo automatico.

- ① definizione dei parametri cinematici nodali  $\mathbf{u}$  e dei relativi vincoli;
- ② determinazione, per ogni elemento, delle matrici di congruenza  $\mathbf{A}_e$  e di rigidezza locale  $\bar{\mathbf{K}}_e$ ;
- ③ assemblaggio della matrice di rigidezza della struttura  $\mathbf{K} = \sum \mathbf{A}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{A}_e$  ;
- ④ assemblaggio del vettore  $\mathbf{p}$  dei carichi esterni nodali associato al vettore delle incognite cinematiche  $\mathbf{u}$  sulla base della relazione di dualità  $\mathbf{LC} = \mathbf{p}^t \mathbf{u}$  ;
- ⑤ risoluzione, in termini dei parametri nodali incogniti  $\mathbf{u}$ , del sistema algebrico

$$\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{p} = 0 ;$$

- ⑥ a partire dagli spostamenti nodali  $\mathbf{u}$ , ricostruzione della soluzione in termini di deformata e caratteristiche di sollecitazioni facendo uso, a livello di ciascun elemento, della soluzione della linea elastica.

$$\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{s}_e = \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e \longrightarrow (u(x), w(x), \varphi(x), \varepsilon(x), \chi(x), N(x), T(x), M(x))$$

# I passi dell'analisi

## Una strategia manuale di analisi

### 1 Analisi cinematica

- Sono definiti i parametri cinematici nodali indipendenti  $\mathbf{u}$ , congruenti con i vincoli interni ed esterni della struttura
  - Per ogni parametro nodale, è tracciata la relativa cinematica fondamentale: la combinazione lineare di queste rappresenta l'insieme delle possibili cinematiche compatibili per la struttura.
- 
- La corretta costruzione delle cinematiche fondamentali è fondamentale per il metodo delle rigidità.
  - Tale fase risulta delicata se, nell'ottica di un'analisi manuale al fine di ridurre il numero di incognite del problema, si introducono (come vedremo in seguito) vincoli interni di inestensibilità assiale delle aste.
  - I nuovi vincoli devono essere tenuti coerentemente in conto nel tracciamento delle cinematiche fondamentali.

# I passi dell'analisi

Una strategia manuale di analisi

- 1 Analisi cinematica
- 2 **Analisi locale**: per ogni trave ...
  - sono determinati i parametri cinematici deformativi (nel riferimento locale) in funzione dei parametri cinematici globali  $\mathbf{u}$  facendo uso dei coseni direttori dell'asta (la matrice di congruenza)

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$$

- sono determinate le forze nodali in funzione dei parametri deformativi facendo uso dei coefficienti di rigidità (la matrice di rigidità)

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{A}_e \mathbf{u}$$

# I passi dell'analisi

Una strategia manuale di analisi

- ① Analisi cinematica
- ② Analisi locale
- ③ **Analisi globale:** sui nodi della struttura
  - Sono scritte le condizioni di equilibrio su tutti i nodi della struttura tra i carichi esterni applicati  $\mathbf{p}$  e le forze nodali  $\bar{\mathbf{p}}_e$  trasmesse dalle varie aste confluenti nei nodi

$$\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e \Rightarrow \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$$

- Ciò conduce ad un sistema di equazioni algebriche lineari definite in termini della matrice di rigidezza della struttura  $\mathbf{K} = \sum \mathbf{A}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e$

si osservi che al sistema di equazioni algebriche possiamo pervenire assemblando direttamente la matrice di rigidezza  $\mathbf{K} = \sum \mathbf{A}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e$  ed il vettore dei carichi sulla base dell'assemblaggio rispettivamente dell'energia di deformazione e del lavoro dei carichi

$$\Phi[u] = \sum_{\text{travi}} \Phi_e[u_e] = \sum \left( \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e \right) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} \quad , \quad \text{LC} = \mathbf{p}^t \mathbf{u}$$

# I passi dell'analisi

Una strategia manuale di analisi

- 1 Analisi cinematica
- 2 Analisi locale
- 3 Analisi globale
- 4 **Risoluzione del sistema e rappresentazione della soluzione:** in termini di spostamenti e caratteristiche di sollecitazione

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}$$

$$\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{s}_e = \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e \longrightarrow (u(x), w(x), \varphi(x), \varepsilon(x), \chi(x), N(x), T(x), M(x))$$

# I passi dell'analisi

## Una strategia manuale di analisi

- 1 Analisi cinematica
- 2 Analisi locale
- 3 Analisi globale
- 4 Risoluzione del sistema e rappresentazione della soluzione

### osservazioni

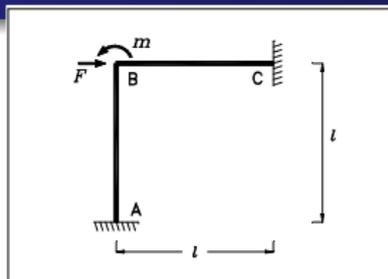
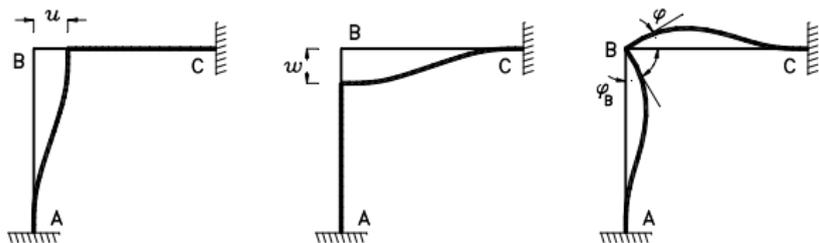
- In presenza di una struttura labile il metodo delle rigidezze conduce ad un sistema algebrico  $\mathbf{Ku} = \mathbf{p}$  di tipo singolare, e come tale non risolvibile (la matrice  $\mathbf{Ku} = \mathbf{p}$  non è invertibile).
- Il metodo delle rigidezze è indifferente al carattere isostatico o iperstatico di una struttura.
- Contrariamente al metodo delle forze, il metodo delle rigidezze non risulta appesantito dall'aumento del grado di iperstaticità di una struttura.
- Paradossalmente, l'aumento del grado di iperstaticità con l'introduzione di ulteriori vincoli cinematici comporta una riduzione del numero di parametri nodali indipendenti e, quindi, una semplificazione del sistema di equazioni algebriche di equilibrio nodale cui il metodo delle rigidezze perviene.

# Una applicazione

## Analisi elastica di un portale zoppo

### analisi cinematica (il vettore delle incognite $u$ )

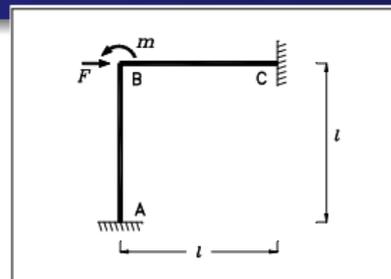
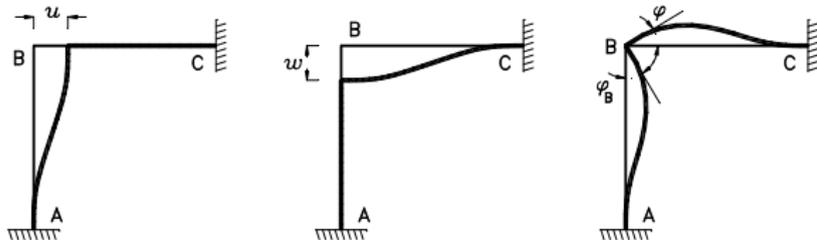
- Le deformate elastiche delle aste della struttura sono completamente determinate, mediante le equazioni della linea elastica, in funzione degli spostamenti dei relativi nodi
- La struttura presenta 3 nodi, ma il rispetto dei vincoli esterni (di incastro) riduce i parametri cinematici indipendenti alle sole componenti di spostamento ( $u, w, \varphi$ ) del nodo  $B$
- Ognuno di questi parametri è associato ad una cinematica fondamentale della struttura.



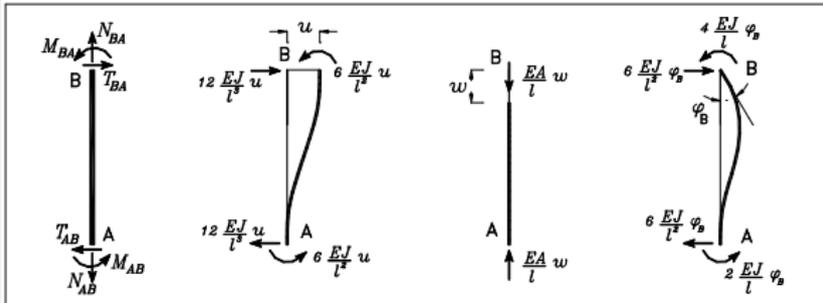
# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $u$ )



analisi locale delle aste ( $d_e = A_e u$ ,  $s_e = k_e d_e$ ) / asta AB



$$N_{AB} = N_{BA} = -\frac{EA}{l} w$$

$$T_{AB} = T_{BA} = \frac{12EJ}{l^3} u + \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

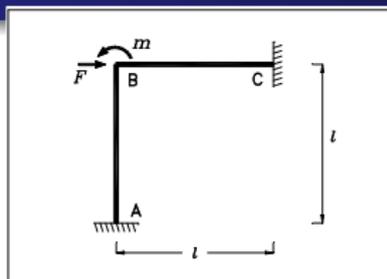
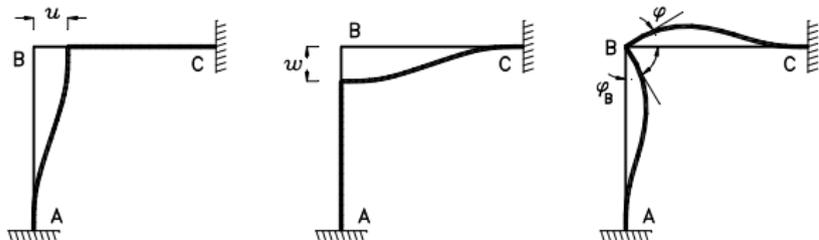
$$M_{AB} = \frac{6EJ}{l^2} u + \frac{2EJ}{l} \varphi$$

$$M_{BA} = \frac{6EJ}{l^2} u + \frac{4EJ}{l} \varphi$$

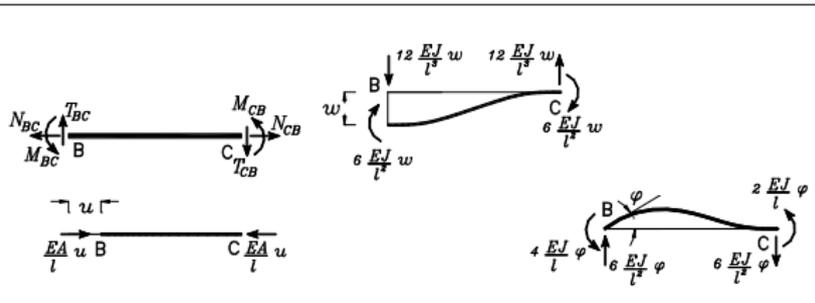
# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $u$ )



analisi locale delle aste ( $d_e = A_e u$ ,  $s_e = k_e d_e$ ) / asta BC



$$N_{BC} = N_{CB} = -\frac{EA}{l} u$$

$$T_{BC} = T_{CB} = -\frac{12EJ}{l^3} w + \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$M_{BC} = -\frac{6EJ}{l^2} w + \frac{4EJ}{l} \varphi$$

$$M_{CB} = -\frac{6EJ}{l^2} w + \frac{2EJ}{l} \varphi$$

# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $u$ )

analisi locale delle aste ( $d_e = A_e u$ ,  $s_e = k_e d_e$ )

$$N_{AB} = N_{BA} = -\frac{EA}{l} w$$

$$N_{BC} = N_{CB} = -\frac{EA}{l} u$$

$$T_{AB} = T_{BA} = \frac{12EJ}{l^3} u + \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$T_{BC} = T_{CB} = -\frac{12EJ}{l^3} w + \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$M_{AB} = \frac{6EJ}{l^2} u + \frac{2EJ}{l} \varphi$$

$$M_{BC} = -\frac{6EJ}{l^2} w + \frac{4EJ}{l} \varphi$$

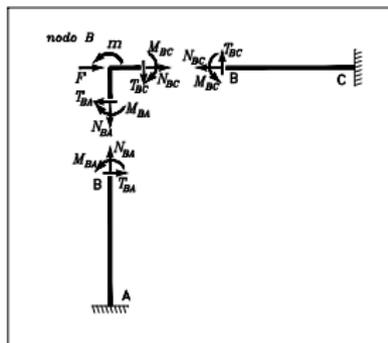
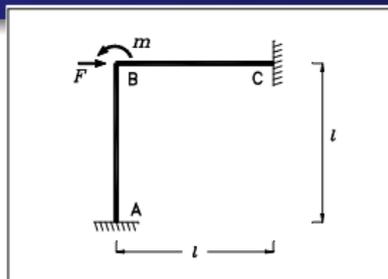
$$M_{BA} = \frac{6EJ}{l^2} u + \frac{4EJ}{l} \varphi$$

$$M_{CB} = -\frac{6EJ}{l^2} w + \frac{2EJ}{l} \varphi$$

le equazioni di equilibrio nodale ( $p = \sum_e A_e^t s_e$ )

Le relazioni di equilibrio che determinano i valori delle incognite cinematiche ( $u, w, \varphi$ ) sono duali, nel senso dei lavori virtuali, delle incognite stesse: le condizioni di equilibrio alla traslazione orizzontale (verso destra), alla traslazione verticale (verso il basso) e alla rotazione del nodo  $B$

$$T_{BA} - N_{BC} = F, \quad N_{BA} + T_{BC} = 0, \quad M_{BA} + M_{BC} = m$$



# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $\mathbf{u}$ )

analisi locale delle aste ( $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e$ )

$$N_{AB} = N_{BA} = -\frac{EA}{l} w$$

$$N_{BC} = N_{CB} = -\frac{EA}{l} u$$

$$T_{AB} = T_{BA} = \frac{12EJ}{l^3} u + \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$T_{BC} = T_{CB} = -\frac{12EJ}{l^3} w + \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$M_{AB} = \frac{6EJ}{l^2} u + \frac{2EJ}{l} \varphi$$

$$M_{BC} = -\frac{6EJ}{l^2} w + \frac{4EJ}{l} \varphi$$

$$M_{BA} = \frac{6EJ}{l^2} u + \frac{4EJ}{l} \varphi$$

$$M_{CB} = -\frac{6EJ}{l^2} w + \frac{2EJ}{l} \varphi$$

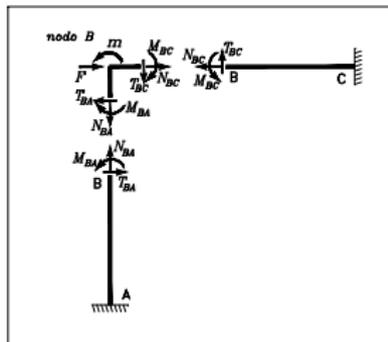
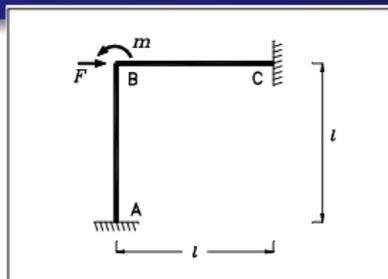
le equazioni di equilibrio nodale ( $\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$ )

Facendo uso delle relazioni locali  $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e$ , le relazioni di equilibrio sono espresse nelle incognite  $\mathbf{u}$

$$T_{BA} - N_{BC} = F \quad \frac{EA}{l} u + \frac{12EJ}{l^3} u + \frac{6EJ}{l^2} \varphi = F$$

$$-N_{BA} - T_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{EA}{l} w - \frac{12EJ}{l^3} w + \frac{6EJ}{l^2} \varphi = 0$$

$$M_{BA} + M_{BC} = m \quad \frac{6EJ}{l^2} u - \frac{6EJ}{l^2} w + \frac{8EJ}{l} \varphi = m$$

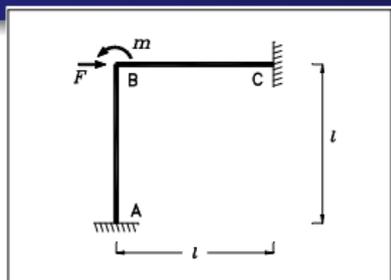


# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $\mathbf{u}$ )

analisi locale delle aste ( $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e$ )



le equazioni di equilibrio nodale ( $\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e = \mathbf{K} \mathbf{u}$ )

$$\frac{EA}{l} u + \frac{12EJ}{l^3} u + \frac{6EJ}{l^2} \varphi = F$$

$$\frac{EA}{l} w + \frac{12EJ}{l^3} w - \frac{6EJ}{l^2} \varphi = 0$$

$$\frac{6EJ}{l^2} u - \frac{6EJ}{l^2} w + \frac{8EJ}{l} \varphi = m$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} + 12 \frac{EJ}{l^3} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{EA}{l} + 12 \frac{EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{6EJ}{l^2} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{8EJ}{l} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F \\ 0 \\ m \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}}$$

La forma matriciale delle relazioni  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$  evidenzia la la matrice di rigidezza  $\mathbf{K}$  della struttura

la soluzione del problema ( $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p}$ )

$$\varphi = \frac{m - \frac{Fl}{2+\mu}}{8 \frac{EJ}{l} - 12 \frac{EJ}{l(2+\mu)}}, \quad u = \frac{\frac{Fl^3}{6EJ} - \varphi l}{2 + \mu}, \quad w = \frac{+\varphi l}{2 + \mu}, \quad \text{con } \mu = \frac{EAl^2}{6EJ}$$

## 2 Analisi matriciale di travature elastiche

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- **Il vincolo di inestensibilità assiale**
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

## 3 Una rivisitazione della strategia

- Una rappresentazione locale più efficiente
- Una rappresentazione locale naturale
- Il modello di trave di Timoshenko
- Presenza di stati di autotensioni

# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo/il vincolo di inestensibilità assiale

la soluzione del problema ( $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}$ )

$$\varphi = \frac{m - \frac{Fl}{2+\mu}}{8\frac{EJ}{l} - 12\frac{EJ}{l(2+\mu)}} , \quad u = \frac{\frac{Fl^3}{6EJ} - \varphi l}{2 + \mu} , \quad w = \frac{+\varphi l}{2 + \mu} , \quad \text{con } \mu = \frac{EAl^2}{6EJ}$$

influenza quantitativa della deformabilità assiale

- Il coefficiente  $\mu$  è una misura (adimensionale) del rapporto tra un indice di deformabilità assiale  $EAl$  e un indice di deformabilità flessionale  $\frac{EJ}{l}$
- Permette di studiare l'influenza della deformabilità assiale sulla soluzione del problema
- Per i consueti dimensionamenti dell'ingegneria civile, il coefficiente  $\mu$  assume valori elevati ( $\mu \gg 200$ ), per cui risulta

$$\varphi \approx \frac{ml}{8EJ} , \quad u \approx 0 , \quad w \approx 0$$

- per generici portali e telai, la soluzione è approssimata abbastanza bene dalla soluzione corrispondente alla condizione limite  $\mu \rightarrow \infty$  di aste indeformabili assialmente.
- risulta lecito trascurare nella soluzione il contributo legato alla deformabilità da sforzo normale rispetto al contributo legato alla deformabilità da momento flettente.

# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo/il vincolo di inestensibilità assiale

la soluzione (approssimata) del problema ( $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}$ )

$$\varphi \approx \frac{ml}{8EJ}, \quad u \approx 0, \quad w \approx 0, \quad \text{con } \mu = \frac{EA l^2}{6EJ} \rightarrow \infty$$

- per generici portali e telai, la soluzione è approssimata abbastanza bene dalla soluzione corrispondente alla condizione limite  $\mu \rightarrow \infty$  di aste indeformabili assialmente.
- risulta lecito trascurare nella soluzione il contributo legato alla deformabilità da sforzo normale rispetto al contributo legato alla deformabilità da momento flettente.

il vincolo cinematico interno di indeformabilità assiale

- Tali conclusioni suggeriscono una diversa possibile implementazione del metodo delle rigidezze, che introduce a priori, esplicitamente, l'ipotesi di aste indeformabili assialmente.
- Ciò introduce ulteriori vincoli cinematici (interni) nel problema, col vantaggio di ridurre il numero di parametri indipendenti necessari per la sua rappresentazione cinematica.
- Il vincolo di indeformabilità assiale rende indefinito il legame  $N = \frac{EA}{l} \Delta u$ : i valori dello sforzo normale possono essere solo determinati in base a considerazioni di equilibrio.

# Una applicazione

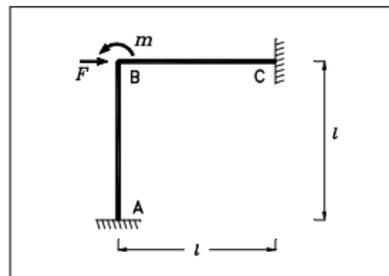
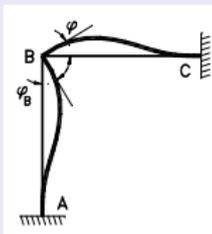
Analisi elastica di un portale zoppo/il vincolo di inestensibilità assiale

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $u$ )

- Per il portale, il vincolo di indeformabilità assiale delle due aste porta all'annullarsi dei parametri di spostamento orizzontale e verticale del nodo  $B$ , riducendo le incognite alla sola rotazione  $\varphi$  del nodo

$$\Delta l_{AB} = 0 = -w, \quad \Delta l_{BC} = 0 = -u$$

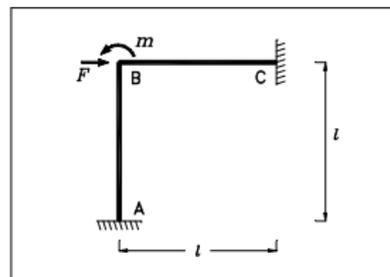
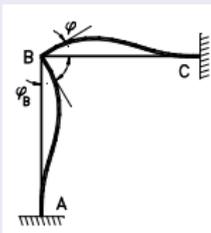
- La forma della configurazione deformata è pertanto descritta dalla sola cinematica fondamentale associata a tale parametro



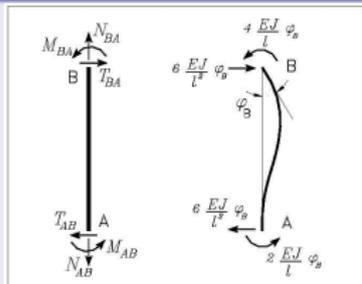
# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo/il vincolo di inestensibilità assiale

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $u$ )



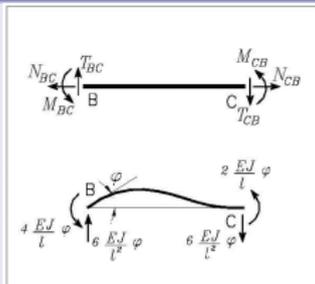
analisi locale delle aste ( $d_e = A_e u$ ,  $s_e = k_e d_e$ )



$$T_{AB} = \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$M_{AB} = \frac{2EJ}{l} \varphi$$

$$M_{BA} = \frac{4EJ}{l} \varphi$$



$$T_{BC} = \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$M_{BC} = \frac{4EJ}{l} \varphi$$

$$M_{CB} = \frac{2EJ}{l} \varphi$$

# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo/il vincolo di inestensibilità assiale

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $\mathbf{u}$ )

analisi locale delle aste ( $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e$ )

$$T_{AB} = \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$T_{BC} = \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$M_{AB} = \frac{2EJ}{l} \varphi$$

$$M_{BC} = \frac{4EJ}{l} \varphi$$

$$M_{BA} = \frac{4EJ}{l} \varphi$$

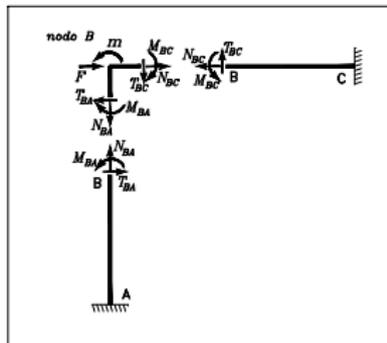
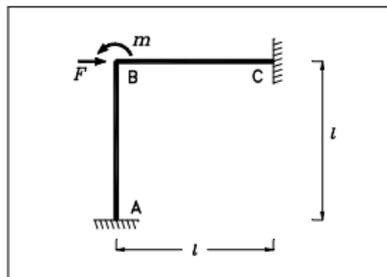
$$M_{CB} = \frac{2EJ}{l} \varphi$$

le equazioni di equilibrio nodale ( $\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$ )

Le relazioni di equilibrio che determinano i valori delle incognite cinematiche sono duali, nel senso dei lavori virtuali, delle incognite stesse: in tal caso, la rotazione del nodo  $B$  è associata alla sola condizione di equilibrio alla rotazione del nodo  $B$ .

Facendo uso delle relazioni locali  $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e$ :

$$M_{BA} + M_{BC} = m \quad \Rightarrow \quad \frac{8EJ}{l} \varphi = m$$

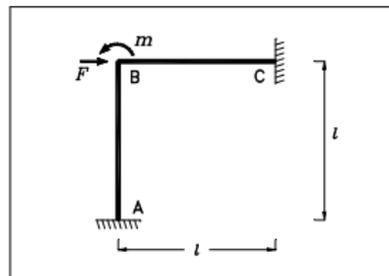


# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo/il vincolo di inestensibilità assiale

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $\mathbf{u}$ )

analisi locale delle aste ( $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e$ )



le equazioni di equilibrio nodale ( $\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e = \mathbf{K} \mathbf{u}$ )

$$\frac{8EJ}{l} \varphi = m$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 8 & EJ \\ & l \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} m \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}}$$

La forma matriciale delle relazioni  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$  evidenzia la la matrice di rigidezza  $\mathbf{K}$  della struttura

la soluzione del problema ( $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p}$ )

$$\varphi = \frac{ml}{8EJ}$$

corrisponde esattamente alla soluzione precedentemente ricavata

# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo/il vincolo di inestensibilità assiale

la soluzione del problema ( $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}$ )

$$\varphi = \frac{m l}{8EJ}$$

La ricostruzione locale delle sollecitazioni ( $T, M$ )

$$T_{AB} = \frac{6EJ}{l^2} \varphi = \frac{3m}{4l}$$

$$M_{AB} = \frac{2EJ}{l} \varphi = \frac{1}{4}m$$

$$M_{BA} = \frac{4EJ}{l} \varphi = \frac{1}{2}m$$

$$T_{BC} = \frac{6EJ}{l^2} \varphi = \frac{3m}{4l}$$

$$M_{BC} = \frac{4EJ}{l} \varphi = \frac{1}{2}m$$

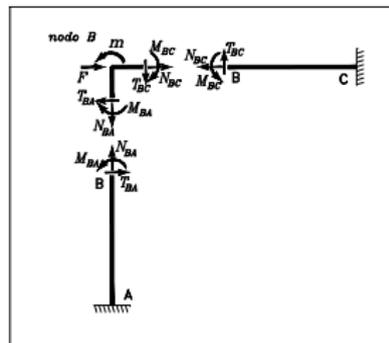
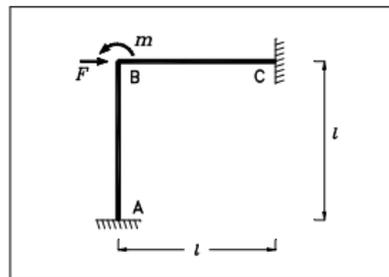
$$M_{CB} = \frac{2EJ}{l} \varphi = \frac{1}{4}m$$

La ricostruzione dello sforzo normale  $N$

I valori dello sforzo normale delle aste possono essere determinati (in molti casi) facendo uso delle equazioni di equilibrio (alla traslazione dei nodi) non ancora utilizzate

$$T_{BA} - N_{BC} = F \quad \Rightarrow \quad N_{BC} = T_{BA} - F = \frac{3m}{4l} - F$$

$$N_{AB} + T_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{AB} = -T_{BC} = -\frac{3m}{4l}$$



# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo/il vincolo di inestensibilità assiale

La ricostruzione locale delle sollecitazioni ( $N$ ,  $T$ ,  $M$ )

$$N_{AB} = -\frac{3m}{4l}$$

$$T_{AB} = \frac{6EJ}{l^2} \varphi = \frac{3m}{4l}$$

$$M_{AB} = \frac{2EJ}{l} \varphi = \frac{1}{4}m$$

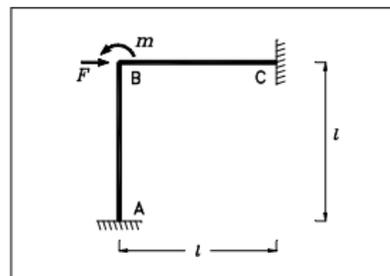
$$M_{BA} = \frac{4EJ}{l} \varphi = \frac{1}{2}m$$

$$N_{BC} = \frac{3m}{4l} - F$$

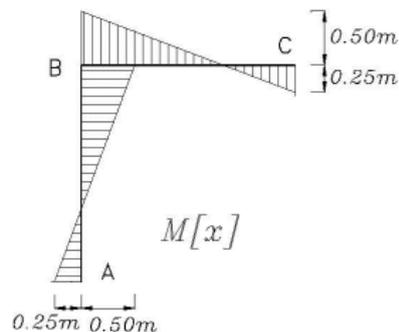
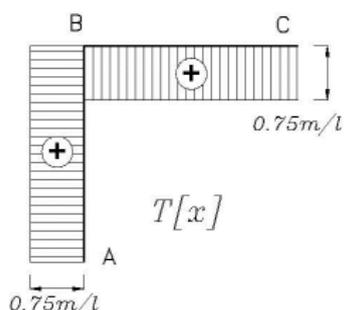
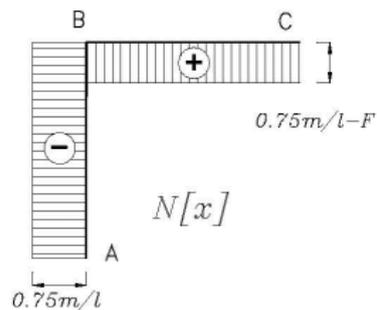
$$T_{BC} = \frac{6EJ}{l^2} \varphi = \frac{3m}{4l}$$

$$M_{BC} = \frac{4EJ}{l} \varphi = \frac{1}{2}m$$

$$M_{CB} = \frac{2EJ}{l} \varphi = \frac{1}{4}m$$



I diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione ( $N$ ,  $T$ ,  $M$ )



## 2 Analisi matriciale di travature elastiche

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- **Soluzione di incastro perfetto**
- Esempi di applicazioni

## 3 Una rivisitazione della strategia

- Una rappresentazione locale più efficiente
- Una rappresentazione locale naturale
- Il modello di trave di Timoshenko
- Presenza di stati di autotensioni

# Soluzione di incastro perfetto e soluzione nodale

In presenza di carichi ripartiti lungo una o più travi, per ogni trave la soluzione del problema locale è somma di due aliquote

## *soluzione di incastro perfetto* ( $\tilde{u}[x], \tilde{w}[x]$ )

- in equilibrio quindi con i carichi ripartiti localmente sulla trave,
- a spostamenti nodali nulli

$$EA\tilde{u}_{,xx} = -p_x \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}(l) = 0$$

$$EJ\tilde{w}_{,xxxx} = p_z + \mu_{,x} \quad \tilde{w}(0) = \tilde{\varphi}(0) = \tilde{w}(l) = \tilde{\varphi}(l) = 0 ,$$

## *soluzione nodale* ( $u[x], w[x]$ ) $\equiv \mathbf{F}(x) \mathbf{u}_e$ (o della **linea elastica**)

- in equilibrio con carichi ripartiti nulli
- univocamente definita, mediante le note funzioni polinomiali, dai valori degli spostamenti nodali del problema

Studiamo adesso come la soluzione locale di incastro perfetto condiziona la soluzione nodale e come quindi interviene nella generale soluzione di tutta la struttura

# Schema fittizio equivalente

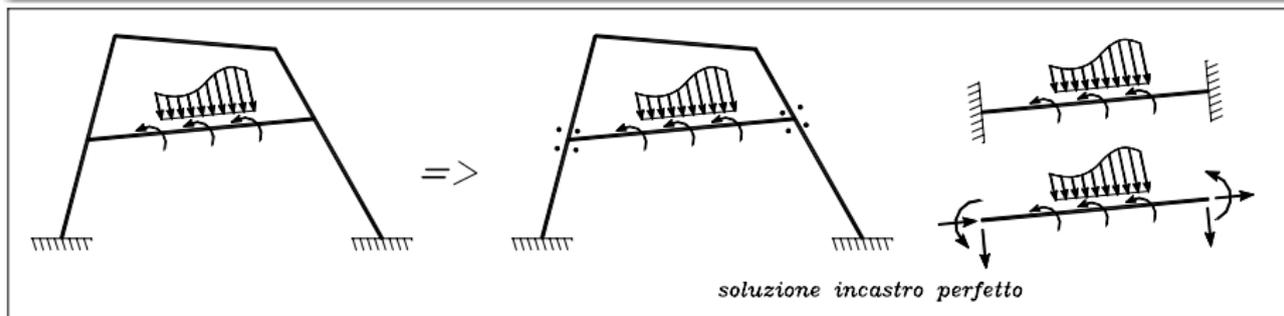
## soluzione di incastro perfetto ( $\tilde{u}[x]$ , $\tilde{w}[x]$ )

- in equilibrio quindi con i carichi ripartiti localmente sulla trave,
- a spostamenti nodali nulli

$$EA\tilde{u}_{,xx} = -p_x \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}(l) = 0$$

$$EJ\tilde{w}_{,xxxx} = p_z + \mu_{,x} \quad \tilde{w}(0) = \tilde{\varphi}(0) = \tilde{w}(l) = \tilde{\varphi}(l) = 0 ,$$

La soluzione di incastro perfetto è ottenuta introducendo dei vincoli fittizi di incastro che realizzano le condizioni di spostamenti nulli sul contorno delle travi



# Schema fittizio equivalente

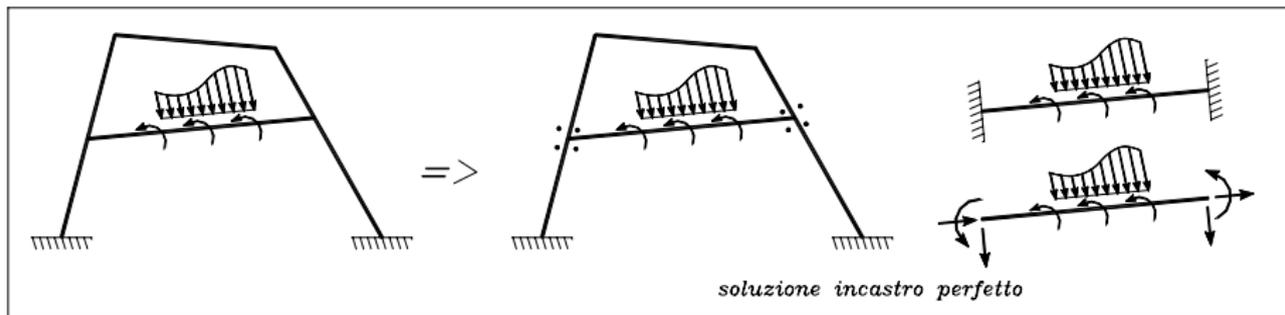
*soluzione di incastro perfetto* ( $\tilde{u}[x], \tilde{w}[x]$ )

$$EA\tilde{u}_{,xx} = -p_x \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}(l) = 0$$

$$EJ\tilde{w}_{,xxxx} = p_z + \mu_{,x} \quad \tilde{w}(0) = \tilde{\varphi}(0) = \tilde{w}(l) = \tilde{\varphi}(l) = 0 \quad ,$$

La soluzione di incastro perfetto è ottenuta introducendo dei vincoli fittizi di incastro che realizzano le condizioni di spostamenti nulli sul contorno delle travi

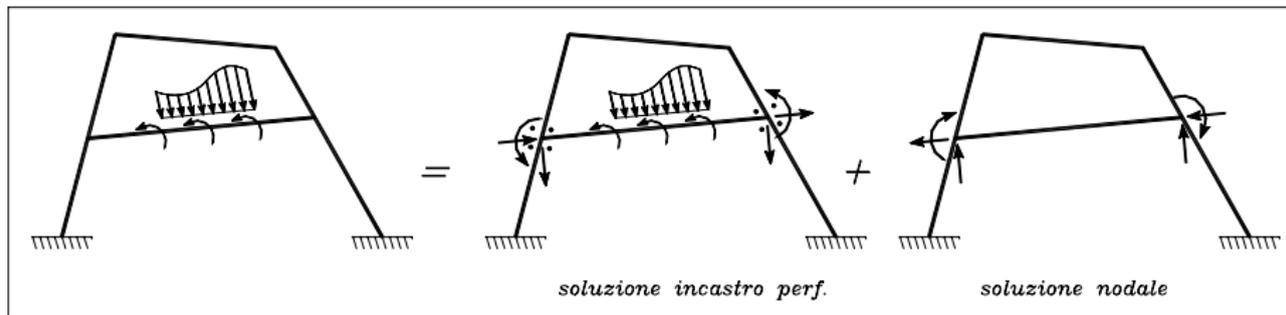
Introdurre dei vincoli fittizi di incastro ai nodi  $(i, j)$  della singola trave equivale ad applicare delle forze fittizie nodali corrispondenti alle reazioni  $\tilde{\mathbf{r}}_e \equiv (\tilde{N}_i, \tilde{T}_i, \tilde{M}_i, \tilde{N}_j, \tilde{T}_j, \tilde{M}_j)$  esercitate dai vincoli



# Reazioni di incastro perfetto e carichi equivalenti nodali

- Introdurre dei vincoli fittizi di incastro ai nodi equivale ad applicare ai nodi delle forze fittizie corrispondenti alle reazioni esercitate dai vincoli stessi.
  - sui nodi  $(i, j)$  della singola trave :  $\tilde{\mathbf{r}}_e \equiv (\tilde{N}_i, \tilde{T}_i, \tilde{M}_i, \tilde{N}_j, \tilde{T}_j, \tilde{M}_j)$ ;
  - sui nodi dell'intera struttura:  $\tilde{\mathbf{r}} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \tilde{\mathbf{r}}_e$
- L'equilibrio con i carichi effettivi applicati ai nodi liberi è ottenuto introducendo un carico aggiuntivo nodale  $-\tilde{\mathbf{r}} = -\sum_e \mathbf{A}_e^t \tilde{\mathbf{r}}_e$  equivalente all'assemblaggio delle reazioni vincolari cambiate di segno.

Tale carico aggiuntivo condiziona i valori della soluzione nodale del problema: esso è il **carico nodale equivalente** (in termini di soluzione nodale) alla presenza dei carichi ripartiti lungo le travi.



# Fasi del procedimento di risoluzione

- ① (*Soluzione di incastro perfetto*) Ogni elemento viene analizzato singolarmente determinando la soluzione di incastro perfetto ( $\{\tilde{u}, \tilde{w}\}, \{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\chi}\}, \{\tilde{N}, \tilde{T}, \tilde{M}\}$ ) correlata ai carichi distribuiti eventualmente presenti, e le reazioni nodali di incastro  $\tilde{\mathbf{r}}_e$  corrispondenti.
- ② (*I carichi nodali equivalenti*) E' assemblato il vettore globale dei carichi nodali equivalente alle reazioni di incastro perfetto  $\tilde{\mathbf{r}} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \tilde{\mathbf{r}}_e$ . Tale carico, cambiato di segno, viene aggiunto al carico effettivo esterno applicato ai nodi
- ③ (*Soluzione nodale*) Viene assemblata la matrice di rigidezza e risolto il sistema di equazioni

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{r}}$$

determinando i valori dei parametri cinematici nodali e quindi, per ogni elemento, la soluzione nodale ( $\{u, w\}, \{\varepsilon, \chi\}, \{N, T, M\}$ ).

- ④ (*Soluzione generale*) La soluzione completa del problema è ottenuta dalla sovrapposizione della soluzione di incastro perfetto, legata al termine  $(u_0[x], w_0[x])$ , e della soluzione nodale legata al termine  $(u[x], w[x])$

$$(u_0 + u, w_0 + w) , (\varepsilon_0 + \varepsilon, \chi_0 + \chi) , (N_0 + N, T_0 + T, M_0 + M)$$

## 2 Analisi matriciale di travature elastiche

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- **Esempi di applicazioni**

## 3 Una rivisitazione della strategia

- Una rappresentazione locale più efficiente
- Una rappresentazione locale naturale
- Il modello di trave di Timoshenko
- Presenza di stati di autotensioni

## 2 Analisi matriciale di travature elastiche

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

## 3 Una rivisitazione della strategia

- Una rappresentazione locale più efficiente
- Una rappresentazione locale naturale
- Il modello di trave di Timoshenko
- Presenza di stati di autotensioni

# Altre scelte implementative della strategia

Condizioni di vincoli interni di indeformabilità assiale, introdotte in un approccio manuale al fine di ridurre il numero delle incognite del problema, non hanno senso in un approccio di analisi automatica, dove il numero elevato di incognite non è certo un problema limitante con gli attuali strumenti di calcolo, nè in termini di costi/risorse computazionali nè in termini di tempi di calcolo.

## Scelte implementative particolari

- una rappresentazione locale a 4 o 6 parametri nodali contenenti direzioni di singolarità (modi rigidi)
- il modello locale di trave alla Bernoulli

## Alternative generalizzanti

- una rappresentazione locale a 3 parametri, nei soli tre modi deformativi
- un modello di trave più ricco (la trave di Timoshenko)
- presenza di stati di autotensione.

## 2 Analisi matriciale di travature elastiche

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

## 3 Una rivisitazione della strategia

- **Una rappresentazione locale più efficiente**
- Una rappresentazione locale naturale
- Il modello di trave di Timoshenko
- Presenza di stati di autotensioni

# La rappresentazione del livello locale

Osservazioni sulla scelta dei parametri nodali

## Proprietà della matrice di rigidezza locale

- La matrice di rigidezza locale della trave  $\mathbf{K}_e$  ha rango pari a tre
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  ha un numero di  $i = n_e - 3$  direzioni di singolarità, corrispondenti a modi rigidi, cioè direzioni  $\mathbf{u}_{ei}^r$  per le quali

$$(\mathbf{u}_{ei}^r)^t \mathbf{K}_e (\mathbf{u}_{ei}^r) = 0 \quad , \quad (i = 1, \dots)$$

dove  $n_e$  è il numero di parametri di rappresentazione locale  
( $n_e = 6, i = 3; n_e = 4, i = 1$ )

- Tali modi rigidi sono inessenziali al bilancio energetico complessivo in quanto sono associati a un valore nullo della energia di deformazione

$$\Phi_e^r = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{u}}_{ek}^r)^t \bar{\mathbf{K}}_e (\bar{\mathbf{u}}_{ek}^r) = 0 \quad , \quad (k = 1, 2, 3)$$

E' possibile pensare ad una diversa rappresentazione locale che filtri tutte le direzioni di moto rigido e renda più semplice la rappresentazione locale del problema nei soli tre modi deformativi della trave.

# La rappresentazione del livello locale

Osservazioni sulla scelta dei parametri nodali

- una rappresentazione locale a 6 parametri (3 direzioni di singolarità)

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \Leftrightarrow \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_j \\ T_j \\ M_j \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot & -\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot \\ \cdot & +\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} & \cdot & -\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} \\ \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{4EJ}{l} & \cdot & -\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot & +\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & \cdot & +\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} & \cdot & -\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_e} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ w_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}$$

- una rappresentazione locale a 4 parametri (una direzione di singolarità)

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e \Leftrightarrow \begin{bmatrix} N \\ T \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{6EJ}{l^2} \\ \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{4EJ}{l} & +\frac{2EJ}{l} \\ \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} & +\frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_e} \begin{bmatrix} u_j - u_i \\ w_j - w_i \\ \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix}$$

# La rappresentazione del livello locale

## Osservazioni sulla scelta dei parametri nodali

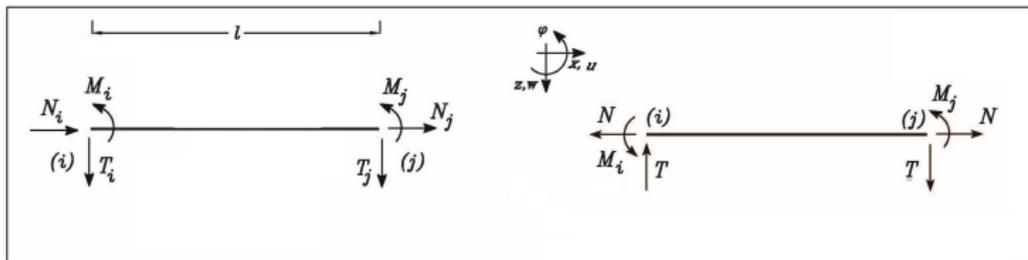
- una rappresentazione locale a 6 parametri (3 direzioni di singolarità)
- una rappresentazione locale a 4 parametri (una direzione di singolarità)
- La rappresentazione a 4 parametri è ricavata da quella a 6 parametri imponendo il soddisfacimento delle 2 condizioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale della generica trave:

$$\begin{aligned} N_i + N_j &= 0 \\ T_i + T_j &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} N &= -N_i = +N_j \\ T &= -T_i = +T_j \end{aligned}$$

Tale operazione condensa il numero dei parametri statici nodali e filtra dalla rappresentazione i due moti rigidi di traslazione orizzontale e verticale.

- L'ultima direzione di singolarità (il modo di rotazione rigida) è filtrata imponendo anche la condizione di equilibrio alla rotazione della generica trave:

$$T I = M_i + M_j$$



# Una diversa scelta dei parametri di rappresentazione locale

l parametri statici e cinematici duali energeticamente

- Sviluppi dell'energia di deformazione della trave tenendo conto della relazione di equilibrio alla rotazione  $T = \frac{M_i + M_j}{l}$

$$\begin{aligned}
 \Phi_e &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{p}}_e^t \bar{\mathbf{u}}_e &= \frac{1}{2} (N(\bar{u}_j - \bar{u}_i) + T(\bar{w}_j - \bar{w}_i) + M_i \varphi_i + M_j \varphi_j) \\
 &&= \frac{1}{2} (N(\bar{u}_j - \bar{u}_i) + \frac{M_i + M_j}{l} (\bar{w}_j - \bar{w}_i) + M_i \varphi_i + M_j \varphi_j) \\
 &&= \frac{1}{2} \left( N(\bar{u}_j - \bar{u}_i) + M_i \left( \varphi_i + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{l} \right) + M_j \left( \varphi_j + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{l} \right) \right) \\
 &&= \frac{1}{2} (N l \varepsilon + M_i \phi_i + M_j \phi_j) = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} Nl \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e}^t \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} = \frac{1}{2} \mathbf{s}_e^t \mathbf{d}_e
 \end{aligned}$$

individua i tre parametri statici ( $Nl$ ,  $M_i$ ,  $M_j$ ) e i tre parametri cinematici ( $\varepsilon$ ,  $\phi_i$ ,  $\phi_j$ ) di rappresentazione locale tra loro energeticamente duali

$$\varepsilon = \frac{\bar{u}_j - \bar{u}_i}{l} \quad , \quad \phi_i = \varphi_i + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{l} \quad , \quad \phi_j = \varphi_j + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{l}$$

# Una diversa scelta dei parametri di rappresentazione locale

Una rappresentazione locale riferita alla congiungente nodale

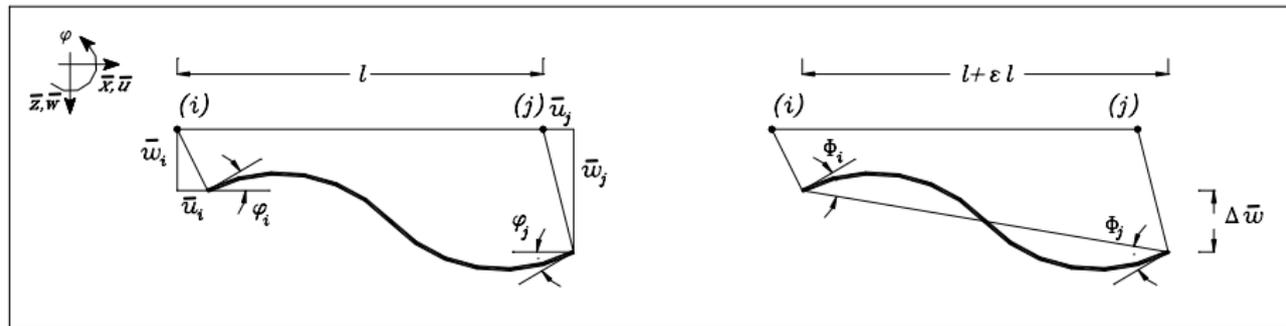
- La deformata della trave è descritta dai parametri adimensionali ( $\varepsilon, \phi_i, \phi_j$ ):

$\varepsilon$  : variazione percentuale di lunghezza

$$\varepsilon = \frac{\bar{u}_j - \bar{u}_i}{l} ,$$

$\phi_i, \phi_j$  : due rotazioni nodali riferite alla retta congiungente nodale.

$$\phi_i = \varphi_i + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{l} , \quad \phi_j = \varphi_j + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{l}$$



# La matrice di rigidità locale

La matrice di rigidità locale è strettamente connessa ai vettori di rappresentazione locale

- Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali:

$$N = \frac{EA}{l}(\bar{u}_j - \bar{u}_i) = EA\varepsilon$$

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{6EJ}{l^2}(\bar{w}_j - \bar{w}_i) + \frac{4EJ}{l}\varphi_i + \frac{2EJ}{l}\varphi_j \\ &= \frac{4EJ}{l^2}(\bar{w}_j - \bar{w}_i) + \frac{2EJ}{l^2}(\bar{w}_j - \bar{w}_i) + \frac{4EJ}{l}\varphi_i + \frac{2EJ}{l}\varphi_j \\ &= \frac{4EJ}{l}\left(\varphi_i + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{l}\right) + \frac{2EJ}{l}\left(\varphi_j + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{l}\right) = \frac{4EJ}{l}\phi_i + \frac{2EJ}{l}\phi_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_j &= \frac{6EJ}{l^2}(\bar{w}_j - \bar{w}_i) + \frac{2EJ}{l}\varphi_i + \frac{4EJ}{l}\varphi_j \\ &= \frac{2EJ}{l^2}(\bar{w}_j - \bar{w}_i) + \frac{4EJ}{l^2}(\bar{w}_j - \bar{w}_i) + \frac{2EJ}{l}\varphi_i + \frac{4EJ}{l}\varphi_j \\ &= \frac{2EJ}{l}\left(\varphi_i + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{l}\right) + \frac{4EJ}{l}\left(\varphi_j + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{l}\right) = \frac{2EJ}{l}\phi_i + \frac{4EJ}{l}\phi_j \end{aligned}$$

# La matrice di rigidezza locale

La matrice di rigidezza locale è strettamente connessa ai vettori di rappresentazione locale

- Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali:

$$\begin{aligned}
 N &= EA\varepsilon \\
 M_i &= \frac{4EJ}{l}\phi_i + \frac{2EJ}{l}\phi_j \\
 M_j &= \frac{2EJ}{l}\phi_i + \frac{4EJ}{l}\phi_j
 \end{aligned}
 \Leftrightarrow
 \underbrace{\begin{bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e}
 =
 \underbrace{\begin{bmatrix} +EA/l & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{4EJ}{l} & +\frac{2EJ}{l} \\ \cdot & \frac{2EJ}{l} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_e}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}$$

- La forma matriciale delle relazioni  $\mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$  evidenzia la nuova matrice di rigidezza locale  $\mathbf{K}_e$
- L'energia di deformazione della trave:

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \mathbf{s}_e^t \mathbf{d}_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$$

# Le matrici di congruenza

- Relazioni di congruenza cinematica locale in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \varepsilon = \frac{\bar{u}_j - \bar{u}_i}{l} \\ \phi_i = \varphi_i + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{l} \\ \phi_j = \varphi_j + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{l} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{u}_i = c u_i + s v_i \\ \bar{w}_i = s u_i - c v_i \\ \bar{u}_j = c u_j + s v_j \\ \bar{w}_j = s u_j - c v_j \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \phi_i \\ \phi_j \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_e} = \frac{1}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} -c & -s & 0 & +c & +s & 0 \\ -s & +c & l & +s & -c & 0 \\ -s & +c & 0 & +s & -c & l \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_e} \underbrace{\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_e}$$

# Le matrici di congruenza

- Relazioni di congruenza cinematica locale: **le matrici di congruenza**

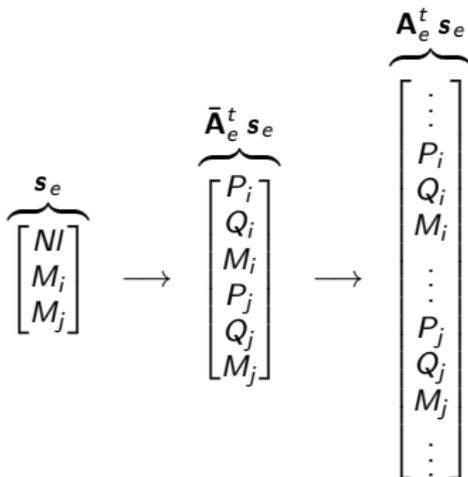
$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} &= \frac{1}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} -c & -s & 0 & +c & +s & 0 \\ -s & +c & l & +s & -c & 0 \\ -s & +c & 0 & +s & -c & l \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \phi_i \\ u_j \\ v_j \\ \phi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_e} \\
 \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} &\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} = \frac{1}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & -c & -s & 0 & \dots & +c & +s & 0 & \dots \\ \dots & -s & +c & l & \dots & +s & -c & 0 & \dots \\ \dots & -s & +c & 0 & \dots & +s & -c & l & \dots \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_e = \bar{\mathbf{A}}_e \mathbf{l}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ u_i \\ v_i \\ \phi_i \\ \vdots \\ u_j \\ v_j \\ \phi_j \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}
 \end{aligned}$$

# Relazioni di equilibrio

## Assemblaggio della risposta elastica

- Assemblaggio della risposta elastica

$$\mathbf{S} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$$



- Le condizioni di equilibrio nodale

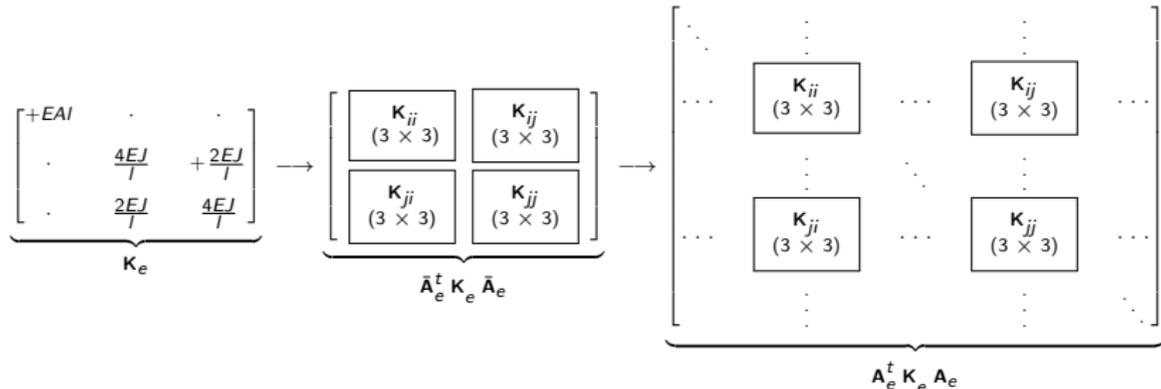
$$\mathbf{p} = \mathbf{S}$$

# Relazioni di equilibrio

## Assemblaggio della matrice di rigidezza

- Assemblaggio della matrice di rigidezza

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e ,$$



- Le condizioni di equilibrio nodale

$$\mathbf{p} = \mathbf{K} \mathbf{u}$$

# Osservazioni finali

Rappresentazione esterna ed interna: una scelta di semplicità

L'impostazione seguita utilizza contemporaneamente due diverse descrizioni statico-cinematiche della struttura:

## una descrizione esterna

in termini di spostamenti nodali  $\mathbf{u}$  e forze nodali  $\mathbf{p}$ , riferita all'intera struttura;

- rende semplice la scrittura delle condizioni di continuità tra gli elementi  $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$ , assicurate dalla identificazione degli spostamenti degli estremi delle aste con quelli dei nodi
- rende semplice la scrittura del lavoro esterno dei carichi  $p\mathbf{u} = \mathbf{p}^t \mathbf{u}$

## una descrizione interna

in termini di parametri deformativi  $\mathbf{d}_e$  e statici  $\mathbf{s}_e$ , riferita all'elemento.

- rende semplice la scrittura dell'energia di deformazione in termini dei soli modi deformativi della trave  $\Phi_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$

Questo formato concettuale assicura una modellazione coerente ed efficiente.

## 2 Analisi matriciale di travature elastiche

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

## 3 Una rivisitazione della strategia

- Una rappresentazione locale più efficiente
- **Una rappresentazione locale naturale**
- Il modello di trave di Timoshenko
- Presenza di stati di autotensioni

# Il paradigma dei modi naturali

La scelta dei modi deformativi che descrivono il livello locale dell'analisi non è univoca:

## la domanda

quale è allora la scelta che conduce alla più semplice rappresentazione in assoluto del livello locale?

## la risposta

il **paradigma dei modi naturali**:

*la rappresentazione locale più semplice è quella riferita a modi deformativi, i **modi naturali**, tra loro energeticamente disaccoppiati, cioè tali da condurre ad una matrice di rigidezza in forma diagonale.*

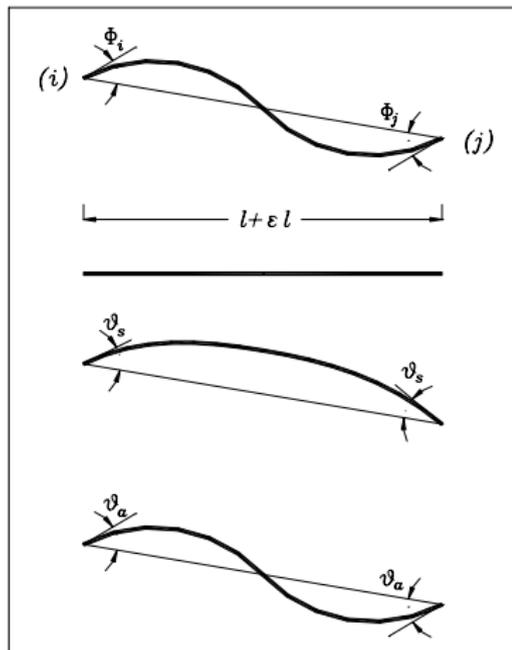
Da un punto di vista matematico i modi naturali corrispondono agli autovettori della matrice di rigidezza locale

# I modi naturali della trave

- $\varepsilon$  = modo di allungamento dell'asta;
- $\theta_s$  = modo di inflessione simmetrica;
- $\theta_a$  = modo di inflessione emisimmetrica;

Alcune relazioni:

$$\begin{cases} \phi_i = +\theta_s + \theta_a \\ \phi_j = -\theta_s + \theta_a \end{cases}, \quad \begin{cases} \theta_s = \frac{1}{2}(\phi_i - \phi_j) \\ \theta_a = \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_j) \end{cases}$$



# I parametri statici duali

- Rappresentazione equivalente della energia di deformazione:

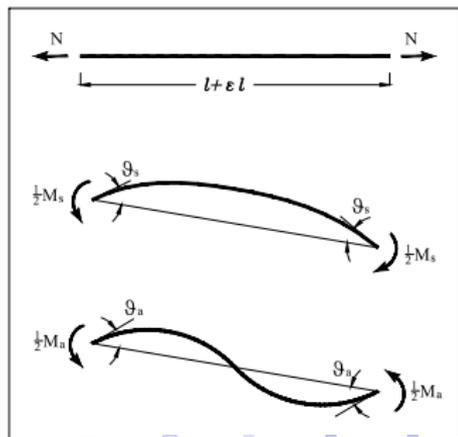
$$\begin{aligned}
 \Phi_e &= \frac{1}{2} (NI\varepsilon + M_i \phi_i + M_j \phi_j) = \frac{1}{2} (NI\varepsilon + M_i (+\theta_s + \theta_a) + M_j (-\theta_s + \theta_a)) \\
 &= \frac{1}{2} (NI\varepsilon + (M_i - M_j)\theta_s + (M_i + M_j)\theta_a) = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} NI \\ M_i - M_j \\ M_i + M_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e}{}^t \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \theta_s \\ \theta_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} = \frac{1}{2} \mathbf{s}_e^t \mathbf{d}_e
 \end{aligned}$$

- Ridefinizione dei vettore degli spostamenti e dei carichi nodali:

$$\mathbf{d}_e \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \theta_s \\ \theta_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_e = \begin{bmatrix} NI \\ M_s \\ M_a \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{cases} M_s = M_i - M_j \\ M_a = M_i + M_j \end{cases}, \quad \begin{cases} M_i = \frac{1}{2} (+M_s + M_a) \\ M_j = \frac{1}{2} (-M_s + M_a) \end{cases}$$



# La matrice di rigidità locale

- Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali:

$$N = EA\varepsilon$$

$$\begin{aligned} M_s = M_i - M_j &= \left( \frac{4EJ}{l} \phi_i + \frac{2EJ}{l} \phi_j \right) - \left( \frac{2EJ}{l} \phi_i + \frac{4EJ}{l} \phi_j \right) \\ &= \left( \frac{2EJ}{l} \phi_i - \frac{2EJ}{l} \phi_j \right) = \frac{4EJ}{l} \frac{1}{2} (\phi_i - \phi_j) = \frac{4EJ}{l} \theta_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_a = M_i + M_j &= \left( \frac{4EJ}{l} \phi_i + \frac{2EJ}{l} \phi_j \right) + \left( \frac{2EJ}{l} \phi_i + \frac{4EJ}{l} \phi_j \right) \\ &= \left( \frac{6EJ}{l} \phi_i + \frac{6EJ}{l} \phi_j \right) = \frac{12EJ}{l} \frac{1}{2} (\phi_i + \phi_j) = \frac{12EJ}{l} \theta_a \end{aligned}$$

# La matrice di rigidità locale

- Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali:

$$\begin{aligned}
 N &= EA\varepsilon \\
 M_s &= \frac{4EJ}{l} \theta_s \\
 M_a &= \frac{12EJ}{l} \theta_a
 \end{aligned}
 \Leftrightarrow
 \underbrace{\begin{bmatrix} N \\ M_s \\ M_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e}
 =
 \underbrace{\begin{bmatrix} +EA/l & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{4EJ}{l} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{12EJ}{l} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_e}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \theta_s \\ \theta_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}$$

- La forma matriciale delle relazioni  $\mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$  evidenzia la nuova matrice di rigidità locale  $\mathbf{K}_e$
- L'energia di deformazione della trave: la matrice diagonale indica che i modi naturali sono disaccoppiati energeticamente

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \mathbf{s}_e^t \mathbf{d}_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$$

# Le matrici di congruenza

- Relazioni di congruenza cinematica locale in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \theta_s \\ \theta_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \phi_i \\ \phi_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{u}_j - \bar{u}_i}{l} \\ \varphi_i + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{l} \\ \varphi_j + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{l} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{w}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c u_i + s v_i \\ s u_i - c v_i \\ c u_j + s v_j \\ s u_j - c v_j \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \theta_s \\ \theta_a \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_e} = \frac{1}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} -c & -s & 0 & +c & +s & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{l}{2} & 0 & 0 & -\frac{l}{2} \\ -s & +c & +\frac{l}{2} & +s & -c & +\frac{l}{2} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_e}$$

# Le matrici di congruenza

- Relazioni di congruenza cinematica locale: **le matrici di congruenza**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d_e \\ \varepsilon \\ \theta_s \\ \theta_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} = \frac{1}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} -c & -s & 0 & +c & +s & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{l}{2} & 0 & 0 & -\frac{l}{2} \\ -s & +c & +\frac{l}{2} & +s & -c & +\frac{l}{2} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_e}$$

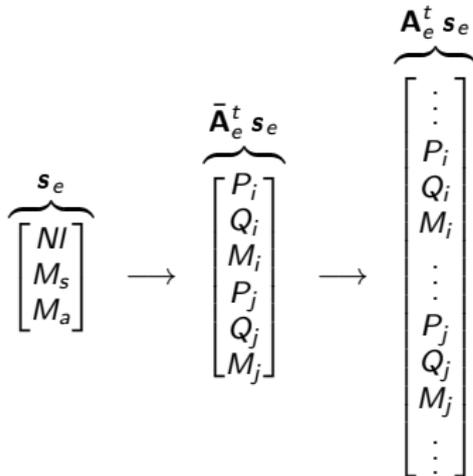
$$\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} d_e \\ \varepsilon \\ \theta_s \\ \theta_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} = \frac{1}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & -c & -s & 0 & \dots & +c & +s & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & +\frac{l}{2} & \dots & 0 & 0 & -\frac{l}{2} & \dots \\ \dots & -s & +c & +\frac{l}{2} & \dots & +s & -c & +\frac{l}{2} & \dots \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_e = \bar{\mathbf{A}}_e \mathbf{I}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ \vdots \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

# Relazioni di equilibrio

## Assemblaggio della risposta elastica

- Assemblaggio della risposta elastica

$$\mathbf{S} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$$



- Le condizioni di equilibrio nodale

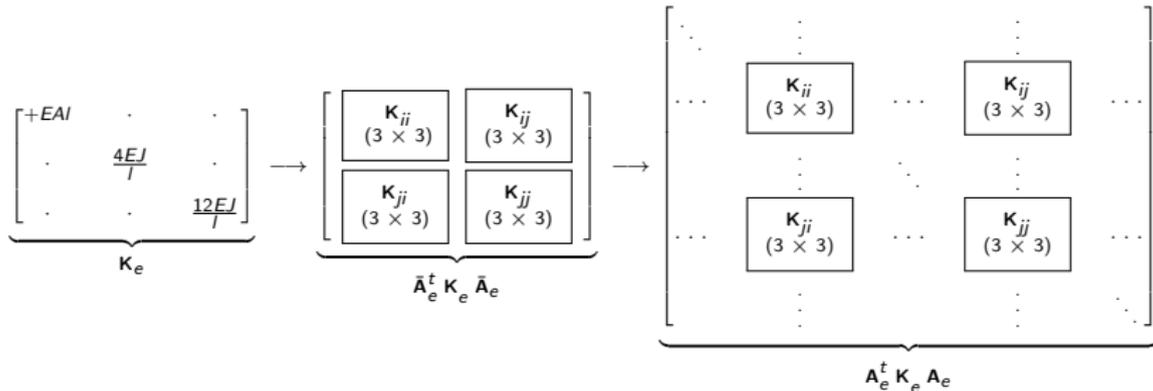
$$\mathbf{p} = \mathbf{S}$$

# Relazioni di equilibrio

## Assemblaggio della matrice di rigidezza

- Assemblaggio della matrice di rigidezza

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e,$$



- Le condizioni di equilibrio nodale

$$\mathbf{p} = \mathbf{K} \mathbf{u}$$

## 2 Analisi matriciale di travature elastiche

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

## 3 Una rivisitazione della strategia

- Una rappresentazione locale più efficiente
- Una rappresentazione locale naturale
- **Il modello di trave di Timoshenko**
- Presenza di stati di autotensioni

# La trave di Timoshenko

Un modello di trave con scorrimento tagliante

equazioni di campo (in termini di componenti di spostamento)

$$\forall x \in (0, l) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{equilibrio} \\ N_{,x} + p_x = 0 \\ T_{,x} + p_z = 0 \\ M_{,x} - T + \mu = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{leg. cost.} \\ N = EA\varepsilon \\ T = GA^* \gamma \\ M = EJ\chi \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{congruenza} \\ \varepsilon = u_{,x} \\ \gamma = \varphi + w_{,x} \\ \chi = \varphi_{,x} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} EA u_{,xx} = -p_x \\ GA (\varphi_{,x} + w_{,xx}) + p_z = 0 \\ EJ \varphi_{,xx} - GA (\varphi + w_{,x}) + \mu = 0 \end{array} \right.$$

- Il modello di trave di Timoshenko fornisce una più ricca rappresentazione del comportamento interno della trave in quanto mette in conto la deformabilità tagliante, trascurata nel modello di Eulero-Bernoulli
- Tale diversa caratterizzazione interna ridefinisce **solo** il livello locale di analisi  $\mathbf{s}_e = \tilde{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e$  e, quindi, la matrice di rigidezza locale  $\tilde{\mathbf{K}}_e$
- La nuova matrice di rigidezza  $\tilde{\mathbf{K}}_e$  è ottenibile per integrazione delle **equazioni di campo del nuovo problema**, con le relative condizioni al contorno
- **Una via più breve e meno tediosa consiste nell'operare tale ridefinizione a partire direttamente dai risultati già conseguiti per il modello di trave di Eulero-Bernoulli.**

# Energia di deformazione della trave di Timoshenko

Forma complementare

$$\begin{aligned}
 \Phi_e &= \frac{1}{2} \int_I \left( \frac{N^2}{EA} + \frac{T^2}{GA^*} + \frac{M^2}{EJ} \right) dx = \frac{1}{2} \int_I \left( \frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EJ} \right) dx + \frac{1}{2} \int_I \frac{T^2}{GA^*} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{s}_e^t \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{s}_e + \frac{1}{2} \int_I \frac{T^2}{GA^*} dx \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{s}_e^t \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{s}_e + \frac{1}{2} \frac{(M_i + M_j)^2}{GA^* l}
 \end{aligned}$$

- facendo uso della espressione del contributo legato alla trave di Eulero-Bernoulli

$$\frac{1}{2} \int_I \left( \frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EJ} \right) dx = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e = \frac{1}{2} \mathbf{s}_e^t \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{s}_e, \quad (\mathbf{K}_e^{-1} \equiv \text{matrice di flessibilità di E-B})$$

- facendo uso della relazione di equilibrio  $T = \text{cost} = \frac{M_i + M_j}{l}$  (assenza di carichi ripartiti)

# La matrice di rigidità

In termini dei parametri di rappresentazione nodale  $\mathbf{d}_e \equiv (\varepsilon, \phi_i, \phi_j)$  e  $\mathbf{s}_e \equiv (Nl, M_i, M_j)$

$$\begin{aligned}
 \Phi_e &= \frac{1}{2} \mathbf{s}_e^t \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{s}_e + \frac{1}{2} \frac{(M_i + M_j)^2}{GA^* l} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \tilde{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} Nl \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e}^t \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{3EJ} & -\frac{1}{6EJ} \\ \cdot & -\frac{1}{6EJ} & \frac{1}{3EJ} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_e^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} Nl \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e} + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} Nl \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e}^t \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{GA^* l} & \frac{1}{GA^* l} & \cdot \\ \frac{1}{GA^* l} & \frac{1}{GA^* l} & \cdot \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} Nl \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e} \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} Nl \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e}^t \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{l(4+\beta)}{12EJ} & -\frac{l(2-\beta)}{12EJ} \\ \cdot & -\frac{l(2-\beta)}{12EJ} & \frac{l(4+\beta)}{12EJ} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}_e^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} Nl \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}^t \underbrace{\begin{bmatrix} EA l & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{EJ(4+\beta)}{l(1+\beta)} & \frac{EJ(2-\beta)}{l(1+\beta)} \\ \cdot & \frac{EJ(2-\beta)}{l(1+\beta)} & \frac{EJ(4+\beta)}{l(1+\beta)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}
 \end{aligned}$$

- il coefficiente  $\beta = \frac{12EJ}{GA^* l^2}$  (rapporto tra rigidità flessionale e tagliante)
- la matrice di flessibilità  $\tilde{\mathbf{K}}_e^{-1}$
- la matrice di rigidità  $\tilde{\mathbf{K}}_e$

# La matrice di rigidezza

In termini dei parametri di rappresentazione nodale  $\mathbf{d}_e \equiv (\varepsilon, \phi_i, \phi_j)$  e  $\mathbf{s}_e \equiv (Nl, M_i, M_j)$

modello di trave di Timoshenko

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \tilde{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}^t \overbrace{\begin{bmatrix} EAI & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{EJ(4+\beta)}{l(1+\beta)} & \frac{EJ(2-\beta)}{l(1+\beta)} \\ \cdot & \frac{EJ(2-\beta)}{l(1+\beta)} & \frac{EJ(4+\beta)}{l(1+\beta)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}$$

modello di trave di Eulero-Bernoulli

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}^t \overbrace{\begin{bmatrix} EAI & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{4EJ}{l} & \frac{2EJ}{l} \\ \cdot & \frac{2EJ}{l} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}$$

# La matrice di rigidità

In termini dei parametri naturali di rappresentazione nodale  $\mathbf{d}_e \equiv (\varepsilon, \theta_s, \theta_a)$  e  $\mathbf{s}_e \equiv (NI, M_s, M_a)$

$$\begin{aligned}
 \Phi_e &= \frac{1}{2} \mathbf{s}_e^t \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{s}_e + \frac{1}{2} \frac{(M_i + M_j)^2}{GA^* I} = \frac{1}{2} \mathbf{s}_e^t \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{s}_e + \frac{1}{2} \frac{M_a^2}{GA^* I} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \tilde{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} NI \\ M_s \\ M_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e}^t \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{EAI} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{I}{4EJ} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{I}{12EJ} \end{bmatrix}}^{\mathbf{K}_e^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} NI \\ M_s \\ M_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e} + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} NI \\ M_s \\ M_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e}^t \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{GA^* I} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} NI \\ M_s \\ M_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e} \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} NI \\ M_s \\ M_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e}^t \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{EAI} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{I}{4EJ} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{I(1+\beta)}{12EJ} \end{bmatrix}}^{\tilde{\mathbf{K}}_e^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} NI \\ M_s \\ M_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \theta_s \\ \theta_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}^t \overbrace{\begin{bmatrix} EAI & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{4EJ}{I} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{12EJ}{I(1+\beta)} \end{bmatrix}}^{\tilde{\mathbf{K}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \theta_s \\ \theta_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}
 \end{aligned}$$

- il coefficiente  $\beta = \frac{12EJ}{GA^* I^2}$  (rapporto tra rigidità flessionale e tagliante)
- la matrice di flessibilità  $\tilde{\mathbf{K}}_e^{-1}$
- la matrice di rigidità  $\tilde{\mathbf{K}}_e$

# La matrice di rigidezza

In termini dei parametri naturali di rappresentazione nodale  $\mathbf{d}_e \equiv (\varepsilon, \theta_s, \theta_a)$  e  $\mathbf{s}_e \equiv (NI, M_s, M_a)$

## modello di trave di Timoshenko

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \tilde{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \theta_s \\ \theta_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}^t \overbrace{\begin{bmatrix} EAI & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{4EJ}{l} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{12EJ}{l(1+\beta)} \end{bmatrix}}^{\tilde{\mathbf{K}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \theta_s \\ \theta_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}$$

## modello di trave di Eulero-Bernoulli

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \theta_s \\ \theta_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}^t \overbrace{\begin{bmatrix} EAI & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{4EJ}{l} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{12EJ}{l} \end{bmatrix}}^{\mathbf{K}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \theta_s \\ \theta_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}$$

## 2 Analisi matriciale di travature elastiche

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

## 3 Una rivisitazione della strategia

- Una rappresentazione locale più efficiente
- Una rappresentazione locale naturale
- Il modello di trave di Timoshenko
- Presenza di stati di autotensioni

# Le autotensioni nelle travi

Gli stati di autotensioni sono sollecitazioni interne in equilibrio localmente con carichi esterni ripartiti nulli

nella trave ...

- sono associati ad una distribuzione di caratteristiche di sollecitazione  $\sigma_a(x) \equiv \{N^a(x), T^a(x), M^a(x)\}$  che rispettano le equazioni locali (differenziali) di equilibrio con carichi esterni ripartiti nulli

$$\left\{ \begin{array}{l} N^a_{,x} = 0 \\ T^a_{,x} = 0 \\ M^a_{,x} - T = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \sigma_a(x) \equiv \begin{array}{ll} N^a(x) = \text{cost} & = N^a \\ T^a(x) = \text{cost} & = \frac{dM(x)}{dx} = \frac{1}{l}(M_i^a + M_j^a) \\ M^a(x) = \text{lineare} & = -M_i^a + \frac{x}{l}(M_i^a + M_j^a) \end{array}$$

- sono espressi in modo univoco in funzione di tre parametri scalari ( $N^a, M_i^a, M_j^a$ )
- questi costituiscono i termini del vettore delle forze nodali in equilibrio con lo stato di autotensioni

$$\sigma_a(x) \longrightarrow \mathbf{s}_a = \begin{bmatrix} N^a \\ M_i^a \\ M_j^a \end{bmatrix} = \int_l \mathbf{B}(x)^t \sigma_a(x) dx$$

# Le autotensioni nelle travi

## la risposta elastica

- le autotensioni si sommano alle tensioni indotte dalle deformazioni elastiche

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \boldsymbol{\sigma}_a(x) + \boldsymbol{\sigma}_{el}(x) = \boldsymbol{\sigma}_a(x) + \mathbf{E} \mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e$$

- su ogni trave, le forze nodali in equilibrio (la risposta elastica) sono somma delle forze nodali associati alle tensioni elastiche e delle forze nodali associate alle autotensioni

$$\mathbf{s}_e = \int_I \mathbf{B}(x)^t \boldsymbol{\sigma}(x) dx = \underbrace{\int_I \mathbf{B}(x)^t \boldsymbol{\sigma}_a(x) dx}_{\mathbf{s}_a} + \underbrace{\int_I \mathbf{B}(x)^t \mathbf{E} \mathbf{B}(x) dx}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{d}_e = \mathbf{s}_a + \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$$

- La risposta elastica della struttura è somma di due aliquote, la prima direttamente indotta dallo stato di autotensioni iniziali  $\boldsymbol{\sigma}_a$  la seconda dallo stato di deformazione associato al campo di spostamenti  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{s}_e = \mathbf{s}_a + \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$$

## Parte III

# Aspetti implementativi

- 4 Strategie numeriche di analisi
  - Risoluzione di sistemi algebrico-lineari
  - Algoritmo di decomposizione alla Gauss
  - Il metodo Newton-Raphson modificato
  - Gestione delle condizioni di vincolo/cedimenti
  
- 5 Il codice di analisi automatica
  - Dati e variabili
  - Descrizione delle procedure di analisi

#### 4 Strategie numeriche di analisi

- Risoluzione di sistemi algebrico-lineari
- Algoritmo di decomposizione alla Gauss
- Il metodo Newton-Raphson modificato
- Gestione delle condizioni di vincolo/cedimenti

#### 5 Il codice di analisi automatica

- Dati e variabili
- Descrizione delle procedure di analisi

# Proprietà numeriche della matrice di rigidità

La matrice di rigidità è ...

**simmetrica**

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^t$$

**definita positiva**

cioè

$$\mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} > 0, \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$$

(quindi **invertibile** e con determinante positivo)

# Proprietà numeriche della matrice di rigidità

La matrice di rigidità è ...

simmetrica

definita positiva

**sparsa**

cioè con molti coefficienti nulli

L'operazione di assemblaggio assegna blocchi di matrici ( $3 \times 3$ )  $\mathbf{K}_{ij}$  fuori diagonale solo se è presente un elemento che collega i nodi  $(i, j)$

**bandata**

cioè i coefficienti non nulli sono addensati a cavallo della diagonale della matrice

In una numerazione ordinata dei nodi, gli elementi finiti collegano nodi tra loro vicini numericamente: ciò minimizza la distanza dei blocchi  $\mathbf{K}_{ij}$  dalla diagonale della matrice di rigidità

# Proprietà numeriche della matrice di rigidità

La matrice di rigidità è ...

simmetrica

definita positiva

sparsa

bandata

$$\mathbf{K} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & \cdot & k_{1,m} & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & k_{22} & \cdot & k & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ k_{1,m} & \cdot & k_{2,2} & \cdot & k & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & k & \cdot & k_{44} & \cdot & k & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & k & \cdot & k_{55} & \cdot & k & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & k & \cdot & k_{66} & \cdot & k & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & k & \cdot & k_{ss} & \cdot & k_{s,n} \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & k & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & k_{s,n} & \cdot & k_{nn} \end{bmatrix}}_{(n \times n)}$$

Le proprietà della matrice di rigidità riducono i costi computazionali di memorizzazione della stessa

Le proprietà della matrice di rigidità condizionano la scelta delle strategie numeriche di soluzione del sistema algebrico di equazioni  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$

# Strategie di risoluzione di sistemi algebrico-lineari $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$

## *metodi iterativi* (Gauss-Seidel, Cross, Kani, . . .)

- basati sulla generazione di una sequenza di soluzioni approssimate,
- forniscono la soluzione esatta in una sequenza, teoricamente infinita, di passi,
- non hanno bisogno di memorizzare e invertire l'intera matrice del problema
- non sono affetti da errori di troncamento decimale (errore di roundoff) e perdita di cifre significative

## *metodi diretti*

- lo schema base che seguono è il metodo di sostituzione alla Gauss
- permettono di pervenire alla soluzione esatta in un numero finito di passi.
- hanno bisogno di memorizzare ed invertire l'intera matrice del problema.
- sono affetti da errori di roundoff e perdita di cifre significative

# Strategie di risoluzione di sistemi algebrico-lineari $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$

## *metodi iterativi* (Gauss-Seidel, Cross, Kani, . . .)

in un problema ad elevato numero di incognite, hanno bisogno di un numero elevatissimo di operazioni da eseguire e convergono con estrema lentezza.

## *metodi diretti*

- lo schema base che seguono è il metodo di sostituzione alla Gauss
- permettono di pervenire alla soluzione esatta in un numero finito di passi.
- **hanno bisogno di memorizzare ed invertire l'intera matrice del problema.**
- sono affetti errori di roundoff e perdita di cifre significative

Le proprietà specifiche della matrice di rigidità ne rendono agevole computazionalmente la memorizzazione e l'inversione.

# Efficacia dei metodi diretti di risoluzione

operazioni di memorizzazione ed inversione della matrice di rigidezza

L'efficacia dei metodi diretti è legata alle specifiche proprietà (simmetrica, definita positiva e bandata) della matrice di rigidezza  $\mathbf{K}$  del problema e osservando che il processo di decomposizione non altera la struttura a banda della matrice.

- l'intera matrice ( $n \times n$ ) può essere conservata memorizzando una sola semibanda ( $n \times m$ )

⇒ Riduzione notevole dell'impegno di memoria, essendo  $m \ll n$ ;

- tenendo conto della struttura a banda, possono essere evitate tutte le operazioni che coinvolgono i termini nulli fuori banda

⇒ **Riduzione drastica dell'impegno di calcolo:**

- per la positività della matrice  $\mathbf{K}$ , tutti i suoi minori sono ancora positivi

⇒ **Nella decomposizione sono evitate le operare di pivotaggio**

# Strategie di risoluzione di sistemi algebrico-lineari $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$

## *metodi diretti*

- lo schema base che seguono è il metodo di sostituzione alla Gauss
- permettono di pervenire alla soluzione esatta in un numero finito di passi.
- hanno bisogno di memorizzare ed invertire l'intera matrice del problema.
- sono affetti errori di roundoff e perdita di cifre significative

Le proprietà specifiche della matrice di rigidità ne rendono agevole computazionalmente la memorizzazione e l'inversione.

# Strategie di risoluzione di sistemi algebrico-lineari $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$

## metodi diretti

- lo schema base che seguono è il metodo di sostituzione alla Gauss
- permettono di pervenire alla soluzione esatta in un numero finito di passi.
- hanno bisogno di memorizzare ed invertire l'intera matrice del problema.
- sono affetti errori di roundoff e perdita di cifre significative

## accoppiamento strategia iterativa con metodo diretto alla Gauss

**Nel problema strutturale in esame, una strategia efficace di soluzione accoppia una metodologia di tipo diretto (di sostituzione alla Gauss) con una strategia (iterativa) per limitare e ridurre l'errore di roundoff**

### iterazione Newton-Raphson Modificato

$$\text{step1 : } \mathbf{r}_j = \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}_j)$$

$$\text{step2 : } \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j$$

$$\text{step3 : } \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \Delta \mathbf{u}$$

go to step1 :

### metodo di sostituzione alla Gauss

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{p}$$

# Errori numerici e strategie di analisi

- Il computer lavora facendo uso di un numero limitato di cifre significative: inevitabilmente le operazioni eseguite sono affette da errori numerici di troncamento decimale
- ? Ciò si riflette nelle operazioni di assemblaggio e decomposizione della matrice di rigidità: la matrice finale  $\tilde{\mathbf{K}}^{-1}$  è diversa dalla matrice esatta  $\mathbf{K}^{-1}$

$$\tilde{\mathbf{K}}^{-1} \neq \mathbf{K}^{-1}$$

- Tale errore condiziona la soluzione del problema algebrico  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{p} \neq \mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p}$$

- Una possibile scelta per ridurre tale errore è di inquadrare la risoluzione in una **strategia iterativa alla Newton-Raphson Modificato**:

$$\begin{aligned} \text{step1 : } & \mathbf{r}_j = \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}_j) \\ \text{step2 : } & \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j \\ \text{step3 : } & \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \Delta \mathbf{u} \\ \text{go to step1 : } & \end{aligned}$$

#### 4 Strategie numeriche di analisi

- Risoluzione di sistemi algebrico-lineari
- **Algoritmo di decomposizione alla Gauss**
- Il metodo Newton-Raphson modificato
- Gestione delle condizioni di vincolo/cedimenti

#### 5 Il codice di analisi automatica

- Dati e variabili
- Descrizione delle procedure di analisi

# Matrici triangolari: algoritmi back substitution

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{U} \\
 \left[ \begin{array}{cccc}
 u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\
 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & \cdots & 0 & u_{nn}
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{x} \\
 \left[ \begin{array}{c}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \vdots \\
 x_n
 \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \mathbf{b} \\
 \left[ \begin{array}{c}
 b_1 \\
 b_2 \\
 \vdots \\
 b_n
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Data una matrice triangolare alta  $\mathbf{U}$  di dimensioni  $(n \times n)$  ed un vettore di termini noti  $\mathbf{b}$  di dimensioni  $(n)$ , la soluzione  $\mathbf{x}$  del sistema di equazioni  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  può essere ottenuta mediante la sequenza:

$$\text{for } (k=n, n-1, \dots, 1) \text{ do} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j}{u_{kk}}
 \end{array} \right.$$

# Matrici triangolari: algoritmi forward substitution

$$\overbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn-1} & l_{nn} \end{bmatrix}}^{\mathbf{L}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}^{\mathbf{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}}$$

Data una matrice triangolare bassa  $\mathbf{L}$  di dimensioni  $(n \times n)$  ed un vettore di termini noti  $\mathbf{b}$  di dimensioni  $(n)$ , la soluzione  $\mathbf{x}$  del sistema di equazioni  $\mathbf{Lx} = \mathbf{b}$  può essere ottenuta mediante la sequenza:

$$\text{for } (k=1,2,\dots,n) \text{ do}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} x_j}{l_{kk}} \end{array} \right.$$

# Algoritmo di sostituzione alla Gauss

- **si basa** sul seguente

## Teorema (di equivalenza)

Sia  $\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  un sistema di equazioni algebriche lineari, e si applichi a tale sistema una sequenza qualsiasi di operazioni del tipo:

- moltiplicazione di una equazione per una costante;
- addizione di un multiplo di una equazione ad un'altra;
- scambio di due equazioni.

Si ottiene un sistema  $\mathbf{K}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$  equivalente a quello di partenza (nel senso che ammette la stessa soluzione  $\mathbf{x}$ ).

# Algoritmo di sostituzione alla Gauss

- **si articola** nelle seguenti fasi:

## fase I : la riduzione

trasformazione del problema algebrico in uno equivalente caratterizzato da una matrice dei coefficienti di forma triangolare alta

$$\mathbf{Kx} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

## fase II : la soluzione

risoluzione del problema equivalente mediante algoritmo back-substitution

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y}$$

# Procedimento di riduzione alla Gauss

Un esempio

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +5 & -4 & +1 & 0 \\ -4 & +6 & -4 & +1 \\ +1 & -4 & +6 & -4 \\ 0 & +1 & -4 & +5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \Rightarrow$$

step 1

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +5 & -4 & +1 & 0 & | & 0 \\ -4 & +6 & -4 & +1 & | & 1 \\ +1 & -4 & +6 & -4 & | & 0 \\ 0 & +1 & -4 & +5 & | & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K|b}}$$

↓

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +5 & -4 & +1 & 0 & | & 0 \\ 0 & +\frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & +1 & | & 1 \\ 0 & -\frac{16}{5} & +\frac{29}{5} & -4 & | & 0 \\ 0 & +1 & -4 & +5 & | & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_1|\mathbf{b}_1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +5 & -4 & +1 & 0 \\ 0 & +\frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & +1 \\ 0 & 0 & +\frac{15}{7} & -\frac{20}{7} \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{5}{6} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U} \equiv \mathbf{K}_3} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{8}{7} \\ -\frac{7}{6} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y} \equiv \mathbf{b}_3} \Leftarrow$$

# Procedimento di riduzione alla Gauss

Un esempio

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +5 & -4 & +1 & 0 \\ -4 & +6 & -4 & +1 \\ +1 & -4 & +6 & -4 \\ 0 & +1 & -4 & +5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \Rightarrow$$

step 2

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +5 & -4 & +1 & 0 & | & 0 \\ 0 & +\frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & +1 & | & 1 \\ 0 & -\frac{16}{5} & +\frac{29}{5} & -4 & | & 0 \\ 0 & +1 & -4 & +5 & | & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_1|\mathbf{b}_1}$$

↓

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +5 & -4 & +1 & 0 & | & 0 \\ 0 & +\frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & +1 & | & 1 \\ 0 & 0 & +\frac{15}{7} & -\frac{20}{7} & | & \frac{8}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{20}{7} & +\frac{65}{14} & | & -\frac{5}{14} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_2|\mathbf{b}_2}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +5 & -4 & +1 & 0 \\ 0 & +\frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & +1 \\ 0 & 0 & +\frac{15}{7} & -\frac{20}{7} \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{5}{6} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U} \equiv \mathbf{K}_3} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{8}{7} \\ -\frac{7}{6} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y} \equiv \mathbf{b}_3} \Leftarrow$$

# Procedimento di riduzione alla Gauss

Un esempio

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +5 & -4 & +1 & 0 \\ -4 & +6 & -4 & +1 \\ +1 & -4 & +6 & -4 \\ 0 & +1 & -4 & +5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +5 & -4 & +1 & 0 \\ 0 & +\frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & +1 \\ 0 & 0 & +\frac{15}{7} & -\frac{20}{7} \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{5}{6} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U} \equiv \mathbf{K}_3} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{8}{7} \\ -\frac{7}{6} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y} \equiv \mathbf{b}_3} \Leftarrow$$

step 3

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +5 & -4 & +1 & 0 & | & 0 \\ 0 & +\frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & +1 & | & 1 \\ 0 & 0 & +\frac{15}{7} & -\frac{20}{7} & | & \frac{8}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{20}{7} & +\frac{65}{14} & | & -\frac{5}{14} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_2 | \mathbf{b}_2}$$

↓

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +5 & -4 & +1 & 0 & | & 0 \\ 0 & +\frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & +1 & | & 1 \\ 0 & 0 & +\frac{15}{7} & -\frac{20}{7} & | & \frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{5}{6} & | & -\frac{7}{6} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_3 | \mathbf{b}_3}$$

# Procedimento di riduzione alla Gauss

Descrizione delle operazioni di riga

$$\begin{array}{l}
 \text{riga} \\
 p = 1 : \\
 \left. \begin{array}{l}
 \text{for } (i=2,3,\dots,n) \text{ do} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 b_i^{(1)} = b_i - \frac{b_1 * k_{i1}}{k_{11}} \\
 \text{for } (j=2,3,\dots,n) \text{ do} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 k_{ij}^{(1)} = k_{ij} - \frac{k_{1j} * k_{i1}}{k_{11}}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{riga} \\
 p = 2 : \\
 \left. \begin{array}{l}
 \text{for } (i=3,4,\dots,n) \text{ do} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{b_2^{(1)} * k_{i2}^{(1)}}{k_{22}^{(1)}} \\
 \text{for } (j=3,4,\dots,n) \text{ do} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 k_{ij}^{(2)} = k_{ij}^{(1)} - \frac{k_{2j}^{(1)} * k_{i2}^{(1)}}{k_{22}^{(1)}}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{riga} \\
 p : \\
 \left. \begin{array}{l}
 \text{for } (i=p+1,\dots,n) \text{ do} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 b_i^{(p)} = b_i^{(p-1)} - \frac{b_p^{(p-1)} * k_{ip}^{(p-1)}}{k_{pp}^{(p-1)}} \\
 \text{for } (j=p+1,\dots,n) \text{ do} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 k_{ij}^{(p)} = k_{ij}^{(p-1)} - \frac{k_{pj}^{(p-1)} * k_{ip}^{(p-1)}}{k_{pp}^{(p-1)}}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array} \right\} \Rightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{for } (p=1,\dots,n) \text{ do} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{for } (i=p+1,\dots,n) \text{ do} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 m = k_{ip}^{(p-1)} / k_{pp}^{(p-1)} \\
 b_i^{(p)} = b_i^{(p-1)} - b_p^{(p-1)} * m \\
 \text{for } (j=p+1,\dots,n) \text{ do} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 k_{ij}^{(p)} = k_{ij}^{(p-1)} - k_{pj}^{(p-1)} * m
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

# Procedimento di riduzione alla Gauss

Operazioni logiche equivalenti ai passi del procedimento

L'operazione di riduzione connessa alla  $p$ -esima riga equivale a premoltiplicare la matrice  $\mathbf{K}^{(p-1)}$  e il vettore  $\mathbf{b}^{(p-1)}$  per una matrice triangolare bassa  $\tilde{\mathbf{L}}_p$

$$\tilde{\mathbf{L}}_p \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \tilde{l}_{p+1,p} & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & \tilde{l}_{n-1,p} & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{l}_{n,p} & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{L}_p^{-1} \quad \text{con} \quad \tilde{l}_{i,p} = -\frac{k_{p,i}^{(p-1)}}{k_{p,p}^{(p-1)}}$$

la matrice  $\tilde{\mathbf{L}}_p$  e la sua inversa  $\mathbf{L}_p = \tilde{\mathbf{L}}_p^{-1}$  sono matrici triangolari basse

- ancora con termini unitari sulla diagonale
- unici termini non nulli sulla  $p$ -esima colonna, con  $l_{i,p} = -\tilde{l}_{i,p}$

# Procedimento di riduzione alla Gauss

Operazioni logiche equivalenti: step 1 di esempio

step 1

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{K}_1 \\
 \left[ \begin{array}{cccc} +5 & -4 & +1 & 0 \\ 0 & +\frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & +1 \\ 0 & -\frac{16}{5} & +\frac{29}{5} & -4 \\ 0 & +1 & -4 & +5 \end{array} \right] \\
 \\
 \mathbf{b}_1 \\
 \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \mathbf{L}_1^{-1} \\
 \left[ \begin{array}{cccc} +1 & 0 & 0 & 0 \\ +\frac{4}{5} & +1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{array} \right] \\
 \\
 \mathbf{L}_1^{-1} \\
 \left[ \begin{array}{cccc} +1 & 0 & 0 & 0 \\ +\frac{4}{5} & +1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{K} \\
 \left[ \begin{array}{cccc} +5 & -4 & +1 & 0 \\ -4 & +6 & -4 & +1 \\ +1 & -4 & +6 & -4 \\ 0 & +1 & -4 & +5 \end{array} \right] \\
 \\
 \mathbf{b} \\
 \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{K} , \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{b}$$

# Procedimento di riduzione alla Gauss

Operazioni logiche equivalenti: step 2 di esempio

step 2

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{K}_2 \\
 \left[ \begin{array}{cccc}
 +5 & -4 & +1 & 0 \\
 0 & +\frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & +1 \\
 0 & 0 & +\frac{15}{7} & -\frac{20}{7} \\
 0 & 0 & -\frac{20}{7} & +\frac{65}{14}
 \end{array} \right] \\
 \\
 \mathbf{b}_2 \\
 \left[ \begin{array}{c}
 0 \\
 +1 \\
 +\frac{8}{7} \\
 -\frac{5}{14}
 \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \mathbf{L}_2^{-1} \\
 \left[ \begin{array}{cccc}
 +1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & +1 & 0 & 0 \\
 0 & +\frac{16}{14} & +1 & 0 \\
 0 & -\frac{5}{14} & 0 & +1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{K}_1 \\
 \left[ \begin{array}{cccc}
 +5 & -4 & +1 & 0 \\
 0 & +\frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & +1 \\
 0 & -\frac{16}{5} & +\frac{29}{5} & -4 \\
 0 & +1 & -4 & +5
 \end{array} \right]
 \\
 \\
 \mathbf{b}_1 \\
 \left[ \begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{K}_1 = \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{K} \quad , \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{b}_1 = \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{b}$$

# Procedimento di riduzione alla Gauss

Operazioni logiche equivalenti: step 3 di esempio

step 3

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{K}_3 \\
 \left[ \begin{array}{cccc} +5 & -4 & +1 & 0 \\ 0 & +\frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & +1 \\ 0 & 0 & +\frac{15}{7} & -\frac{20}{7} \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{5}{6} \end{array} \right] \\
 \\
 \mathbf{b}_3 \\
 \left[ \begin{array}{c} 0 \\ +1 \\ +\frac{8}{7} \\ -\frac{7}{6} \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \mathbf{L}_3^{-1} \\
 \left[ \begin{array}{cccc} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{20}{15} & +1 \end{array} \right] \\
 \\
 \mathbf{L}_3^{-1} \\
 \left[ \begin{array}{cccc} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{20}{15} & +1 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{K}_2 \\
 \left[ \begin{array}{cccc} +5 & -4 & +1 & 0 \\ 0 & +\frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & +1 \\ 0 & 0 & +\frac{15}{7} & -\frac{20}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{20}{7} & +\frac{65}{14} \end{array} \right] \\
 \\
 \mathbf{b}_2 \\
 \left[ \begin{array}{c} 0 \\ +1 \\ +\frac{8}{7} \\ -\frac{5}{14} \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{U} \equiv \mathbf{K}_3 = \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{K}_2 = \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{K}_1 = \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{K} \\
 \mathbf{y} \equiv \mathbf{b}_3 = \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{b}_2 = \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{b}_1 = \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{b}
 \end{array}$$

# Procedimento di riduzione alla Gauss

Operazioni logiche equivalenti: la decomposizione  $\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{U}$

La sequenza di operazione di riga nell'intero processo di riduzione alla Gauss corrisponde alla sequenza di prodotti matriciali

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{K}^{(n)} = \mathbf{L}_n^{-1} \mathbf{L}_{n-1}^{-1} \cdots \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{K}, \quad \mathbf{y} \equiv \mathbf{b}^{(p)} = \mathbf{L}_n^{-1} \mathbf{L}_{n-1}^{-1} \cdots \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{b}$$

- Il prodotto tra due matrici triangolari basse (con elementi unitari sulla diagonale) è ancora una matrice triangolare bassa (con elementi unitari sulla diagonale).
- L'inversa di una matrice triangolare bassa (con elementi unitari sulla diagonale) è ancora una matrice triangolare bassa (con elementi unitari sulla diagonale).

$$\mathbf{L}_n^{-1} \mathbf{L}_{n-1}^{-1} \cdots \mathbf{L}_1^{-1} = \mathbf{L}^{-1}$$

# Procedimento di riduzione alla Gauss

Operazioni logiche equivalenti: la decomposizione  $\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{U}$

La sequenza di operazione di riga nell'intero processo di riduzione alla Gauss corrisponde alla sequenza di prodotti matriciali

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{K}^{(n)} = \mathbf{L}_n^{-1} \mathbf{L}_{n-1}^{-1} \cdots \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{K} \quad , \quad \mathbf{y} \equiv \mathbf{b}^{(p)} = \mathbf{L}_n^{-1} \mathbf{L}_{n-1}^{-1} \cdots \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{L}_n^{-1} \mathbf{L}_{n-1}^{-1} \cdots \mathbf{L}_1^{-1} = \mathbf{L}^{-1}$$

Il processo di riduzione alla Gauss corrisponde a premoltiplicare la matrice  $\mathbf{K}$  e il vettore dei termini noti  $\mathbf{b}$  per la matrice triangolare bassa  $\mathbf{L}^{-1}$

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \quad , \quad \mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{b}$$

In modo equivalente, l'algoritmo di Gauss vede la matrice  $\mathbf{K}$  del problema come prodotto di una matrice triangolare bassa  $\mathbf{L}$  (con valori unitati lungo la diagonale) per un triangolare alta  $\mathbf{U}$

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

# Algoritmo di decomposizione alla Gauss

## fase I : la riduzione

trasformazione del problema algebrico in uno equivalente caratterizzato da una matrice dei coefficienti di forma triangolare alta

$$\mathbf{Kx} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

Il processo di riduzione alla Gauss corrisponde a premoltiplicare la matrice  $\mathbf{K}$  e il vettore dei termini noti  $\mathbf{b}$  per la matrice triangolare bassa  $\mathbf{L}^{-1}$

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{K} \quad , \quad \mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$$

## fase II : la soluzione

risoluzione del problema equivalente mediante algoritmo back-substitution

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y}$$

# Algoritmo di decomposizione alla Gauss

l'implementazione dell'algoritmo

## fase I : la riduzione

ad un problema equivalente

$$\mathbf{Kx} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \quad , \quad \mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{b}$$

## fase II : la soluzione

risoluzione del problema equivalente  
mediante algoritmo back-substitution

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y}$$

```

for (p=1,...,n) do
  for (i=p+1,...,n) do
    {
      m = kip(p-1) / kpp(p-1)
      bi(p) = bi(p-1) - bp(p-1) * m
      for (j=p+1,...,n) do
        {
          kij(p) = kij(p-1) - kpj(p-1) * m
        }
    }
  }

```

```

for (p=n,...,1) do
  for (i=p+1,...,n) do
    {
      bi(p) = bi(p-1) - bp(p-1) * kip
    }
  }
  bp(p) = bp(p-1) / kpp

```

# Algoritmo di decomposizione alla Gauss

rappresentazione  $\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{U}$

**riduzione della matrice**

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}$$

equivale a rappresentare la matrice secondo il prodotto

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

**riduzione del termine noto**

$$\mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$$

equivale a risolvere un problema mediante algoritmo forward-substitution

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

**la risoluzione**

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y}$$

equivale a risolvere un problema mediante algoritmo back-substitution

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

# Algoritmo di Gauss

## Rappresentazione generale

### Il metodo di decomposizione e sostituzione alla Gauss ...

**rappresenta** la matrice di rigidità del problema  $\mathbf{K}$  come prodotto di una matrice triangolare bassa  $\mathbf{L}$  (con valori unitati lungo la diagonale) per un triangolare alta  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

**suddivide** il problema  $\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  in due sottoproblemi:

- $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ;
- $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

**risolve** quindi il problema  $\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  in due differenti fasi:

- *Forward substitution* :  $\mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$ ;
- *Back substitution* :  $\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y}$

# Algoritmo di decomposizione alla Gauss

rappresentazione  $\mathbf{K} = \mathbf{LU}$ : implementazione dell'algoritmo

## fase I : la riduzione

ad un problema equivalente

$$\mathbf{Kx} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{b}$$

## fase II : la soluzione

risoluzione del problema equivalente  
mediante algoritmo back-substitution

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y}$$

```

for (p=1,...,n) do
  for (i=p+1,...,n) do
    {
      m = kip(p-1) / kpp(p-1)
      bi(p) = bi(p-1) - bp(p-1) * m
      for (j=p+1,...,n) do
        {
          kij(p) = kij(p-1) - kpj(p-1) * m
        }
    }
  }

```

```

for (p=n,...,1) do
  {
    for (i=p+1,...,n) do
      {
        bi(p) = bi(p-1) - bp(p-1) * kip
      }
    }
  }
  bp(p) = bp(p-1) / kpp

```

## limitazione

la riduzione del termine noto è contemporaneamente alla riduzione della matrice

# Algoritmo di decomposizione alla Gauss

soluzione per successivi diversi valori del carico

Volendo risolvere il sistema per un nuovo termine noto  $\tilde{\mathbf{p}}$ , ...

$$\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{L}\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{b}} \\ \mathbf{U}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{L}^{-1}\tilde{\mathbf{b}} \\ \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\tilde{\mathbf{y}} \end{cases}$$

## decomposizione $\mathbf{K} = \mathbf{LU}$

- ... **dobbiamo** avere memoria della matrice di partenza  $\mathbf{K}$  del problema (ripetendo le operazioni di decomposizione  $\mathbf{K}$ ),
- ... **oppure dobbiamo** avere memoria delle **due** matrici triangolari  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{U}$  prodotto della operazione di decomposizione di  $\mathbf{K}$ ,

$$\mathbf{L}\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{b}} \quad , \quad \mathbf{U}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{y}}$$

risolvendo il problema mediante forward e back-substitution

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{L}^{-1}\tilde{\mathbf{b}} \quad , \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{-1}\tilde{\mathbf{y}}$$

# Una variante del metodo di Gauss

La decomposizione  $\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^t$

sfrutta la simmetria della matrice di rigidezza del problema,

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^t \Rightarrow \mathbf{LU} = \mathbf{U}^t\mathbf{L}^t \Rightarrow \mathbf{U} = \mathbf{DL}^t, \text{ con } \mathbf{D} \text{ matrice diagonale}$$

$\mathbf{U}$  è una triangolare alta

- avente sulla diagonale i termini della matrice  $\mathbf{D}$
- i cui termini sopra la diagonale corrispondono ai trasposti dei termini della matrice triangolare bassa  $\mathbf{L}$

la decomposizione  $\mathbf{K} = \mathbf{LU}$  assume la forma particolare  $\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^t$

# Algoritmo di decomposizione alla Gauss

rappresentazione  $\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^T$ : soluzione per successivi diversi valori del carico

Volendo risolvere il sistema per un nuovo termine noto  $\tilde{\mathbf{p}}$ , ...

$$\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$$

## decomposizione $\mathbf{K} = \mathbf{LU}$

- ... **dobbiamo** avere memoria della matrice di partenza  $\mathbf{K}$  del problema (ripetendo le operazioni di decomposizione  $\mathbf{K}$ ),
- ... **oppure dobbiamo** avere memoria delle **due** matrici triangolari  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{U}$  prodotto della operazione di decomposizione di  $\mathbf{K}$ ,

## decomposizione $\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^t$

- ... **dobbiamo solo** avere memoria di **una** matrice triangolare, la matrice decomposta  $\mathbf{U} = \mathbf{DL}^t$  (negli stessi spazi di memoria prima occupati dalla matrice  $\mathbf{K}$ )

# Algoritmo di decomposizione alla Gauss

representazione  $\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^T$ : implementazione automatica

**riduzione della matrice  $\mathbf{DL}^T = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K}$**

equivale alla rappresentazione della matrice

$$\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^T$$

```

for (p=1,...,n) do
  for (i=p+1,...,n) do
    {
      m = kip(p-1) / kpp(p-1)
      for (j=p+1,...,n) do
        {
          kij(p) = kij(p-1) - kpj(p-1) * m
        }
      kip(p) = m
    }
  
```

**riduzione del termine noto  $\mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{b}$**

equivale a risolvere un problema

$$\mathbf{L} \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

mediante algoritmo forward-substitution

```

for (p=1,...,n) do
  for (i=p+1,...,n) do
    {
      bi(p) = bi(p-1) - bp(p-1) * kip
    }
  
```

**la risoluzione  $\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{L}^{-T} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{y}$**

equivale a risolvere un problema

$$\mathbf{DL}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

mediante algoritmo back-substitution

```

for (p=n,...,1) do
  {
    bi(p) = bi(p) / kpp
    for (i=p+1,...,n) do
      {
        bi(p) = bi(p-1) - bp(p-1) * kip
      }
    }
  
```

# Algoritmo di decomposizione alla Gauss

rappresentazione  $\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^T$ : implementazione automatica per successivi diversi valori del carico

**riduzione della matrice  $\mathbf{DL}^T = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K}$**

equivale alla rappresentazione della matrice

$$\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^T$$

**riduzione del termine noto  $\mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{b}$**

equivale a risolvere un problema

$$\mathbf{L} \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

mediante algoritmo forward-substitution

```

for (p=1,...,n) do
  for (i=p+1,...,n) do
    {
      m = kip(p-1) / kpp(p-1)
      for (j=p+1,...,n) do
        {
          kij(p) = kij(p-1) - kpj(p-1) * m
        }
      kip(p) = m
    }
  
```

```

for (p=1,...,n) do
  for (i=p+1,...,n) do
    {
      bi(p) = bi(p-1) - bp(p-1) * kip
    }
  
```

la riduzione della matrice e del termine noto avvengono in tempi diversi

- l'operazione di riduzione della matrice (la più costosa computazionalmente) avviene una sola volta indipendentemente dal vettore dei termini noti
- tale operazione può essere implementata in un'apposita routine (decom)
- la riduzione del termine noto è un'operazione da eseguire per ogni nuovo vettore dei termini noti

# Algoritmo di decomposizione alla Gauss

rappresentazione  $\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^T$ : implementazione automatica per successivi diversi valori del carico

Ogni nuovo vettore dei termini noti comporta in sequenza una operazione di riduzione e di risoluzione con la determinazione del valore delle incognite

Tale sequenza di operazioni possono essere implementate in un'apposita routine

## riduzione del termine noto $\mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{b}$

equivale a risolvere un problema

$$\mathbf{L} \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

mediante algoritmo forward-substitution

```
for (p=1,...,n) do
  for (i=p+1,...,n) do
    {  $b_i^{(p)} = b_i^{(p-1)} - b_p^{(p-1)} * k_{ip}$ 
```

## la risoluzione $\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{L}^{-T} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{y}$

equivale a risolvere un problema

$$\mathbf{DL}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

mediante algoritmo back-substitution

```
for (p=n,...,1) do
  {  $b_i^{(p)} = b_i^{(p)} / k_{pp}$ 
  for (i=p+1,...,n) do
    {  $b_i^{(p)} = b_i^{(p-1)} - b_p^{(p-1)} * k_{ip}$ 
```

# Algoritmo di decomposizione alla Gauss

rappresentazione  $\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^T$ : implementazione automatica per successivi diversi valori del carico

## la routine decom

riduzione della matrice  $\mathbf{DL}^T = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K}$

```

for (p=1,...,n) do
  for (i=p+1,...,n) do
    {
      m =  $k_{ip}^{(p-1)} / k_{pp}^{(p-1)}$ 
      for (j=p+1,...,n) do
        {
           $k_{ij}^{(p)} = k_{ij}^{(p-1)} - k_{pj}^{(p-1)} * m$ 
        }
      }
    }
  }
   $k_{ip}^{(p)} = m$ 

```

## la routine solve

riduzione del termine noto  $\mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{b}$

mediante algoritmo forward-substitution

```

for (p=1,...,n) do
  for (i=p+1,...,n) do
    {
       $b_i^{(p)} = b_i^{(p-1)} - b_p^{(p-1)} * k_{ip}$ 
    }
  }

```

la risoluzione  $\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{L}^{-T} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{y}$

mediante algoritmo back-substitution

```

for (p=n,...,1) do
  {
     $b_i^{(p)} = b_i^{(p)} / k_{pp}$ 
    for (i=p+1,...,n) do
      {
         $b_i^{(p)} = b_i^{(p-1)} - b_p^{(p-1)} * k_{ip}$ 
      }
    }
  }

```

#### 4 Strategie numeriche di analisi

- Risoluzione di sistemi algebrico-lineari
- Algoritmo di decomposizione alla Gauss
- **Il metodo Newton-Raphson modificato**
- Gestione delle condizioni di vincolo/cedimenti

#### 5 Il codice di analisi automatica

- Dati e variabili
- Descrizione delle procedure di analisi

# Errori numerici e strategie di analisi

- Il computer lavora facendo uso di un numero limitato di cifre significative: inevitabilmente le operazioni eseguite sono affette da errori numerici di troncamento decimale
- Ciò si riflette nelle operazioni di assemblaggio e decomposizione della matrice di rigidità: la matrice finale  $\tilde{\mathbf{K}}^{-1}$  è diversa dalla matrice esatta  $\mathbf{K}^{-1}$

$$\tilde{\mathbf{K}}^{-1} \neq \mathbf{K}^{-1}$$

- Tale errore condiziona la soluzione del problema algebrico  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{p} \neq \mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p}$$

- Una possibile scelta per ridurre tale errore è di inquadrare la risoluzione in una **strategia iterativa alla Newton-Raphson Modificato**:

$$\begin{aligned} \text{step1 : } & \mathbf{r}_j = \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}_j) \\ \text{step2 : } & \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j \\ \text{step3 : } & \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \Delta \mathbf{u} \\ \text{go to step1 : } & \end{aligned}$$

# Strategia iterativa Newton-Raphson modificato

## Fasi della strategia iterativa

$$\text{step1 : } \mathbf{r}_j = \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}_j)$$

$$\text{step2 : } \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j$$

$$\text{step3 : } \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \Delta \mathbf{u}$$

go to step1 :

### I<sup>a</sup> fase (respo)

dato un campo di spostamenti  $\mathbf{u}$ , ricerca la risposta elastica della struttura

$$\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{S}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{K} \mathbf{u}$$

### II<sup>a</sup> fase (solve)

ricerca la correzione  $\Delta \mathbf{u}$  del campo di spostamenti che riduca lo squilibrio tra carichi e risposta elastica della struttura

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}) \longrightarrow \Delta \mathbf{u}$$

# Strategia iterativa Newton-Raphson modificato

## Fasi della strategia iterativa

### 1<sup>a</sup> fase (respo)

$$\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{S}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{K} \mathbf{u}$$

- Avendo decomposto la matrice di rigidezza, essa non è più disponibile in memoria.
- Tuttavia tale fase può essere eseguita mediante un assemblaggio della risposta elastica a livello di ogni elemento della struttura

$$\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e \longrightarrow \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$$

- Questa fase può essere implementata in una apposita routine

# Strategia iterativa Newton-Raphson modificato

## Fasi della strategia iterativa

### II<sup>a</sup> fase (solve)

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}) \longrightarrow \Delta \mathbf{u}$$

- Questa fase è sviluppata in una apposita routine sulla base dell'algorithmo di decomposizione alla Gauss

# Strategia iterativa Newton-Raphson modificato

## Fasi della strategia iterativa

$$\text{step1 : } \mathbf{r}_j = \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}_j)$$

$$\text{step2 : } \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j$$

$$\text{step3 : } \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \Delta \mathbf{u}$$

go to step1 :

### I<sup>a</sup> fase (respo)

$$\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{S}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{K} \mathbf{u}$$

### II<sup>a</sup> fase (solve)

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}) \longrightarrow \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{u})$$

# Strategia iterativa Newton-Raphson modificato

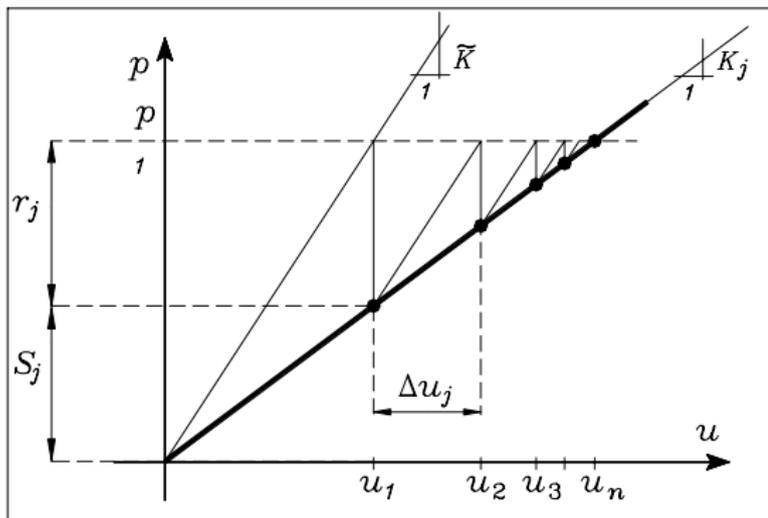
Rappresentazione geometrica

step1 :  $\mathbf{r}_j = \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}_j)$

step2 :  $\Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j$

step3 :  $\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \Delta \mathbf{u}$

go to step1 :



# Strategia iterativa Newton-Raphson modificato

Sviluppi teorici (metodo di Newton)

$$\text{step1 : } \mathbf{r}_j = \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}_j)$$

$$\text{step2 : } \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j$$

$$\text{step3 : } \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \Delta \mathbf{u}$$

go to step1 :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{r}(\mathbf{u}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{S}(\mathbf{u}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{K}\mathbf{u}) = -\mathbf{K}$$

- Uno sviluppo asintotico approssimato:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) \approx \mathbf{r}(\mathbf{u}) + \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{r}(\mathbf{u}) \right|_0 \Delta \mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}$$

- L'ipotesi sul residuo al passo successivo:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) \approx 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{u})$$

# Strategia iterativa Newton-Raphson modificato

Sviluppi teorici (metodo di Newton)

$$\text{step1 : } \mathbf{r}_j = \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}_j)$$

$$\text{step2 : } \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j$$

$$\text{step3 : } \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \Delta \mathbf{u}$$

go to step1 :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{r}(\mathbf{u}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{S}(\mathbf{u}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{K}\mathbf{u}) = -\mathbf{K}$$

- Uno sviluppo asintotico approssimato:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) \approx \mathbf{r}(\mathbf{u}) + \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{r}(\mathbf{u}) \right|_0 \Delta \mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}$$

- L'ipotesi sul residuo al passo successivo:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) \approx 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{u})$$

# Strategia iterativa Newton-Raphson modificato

Sviluppi teorici (metodo di Newton)

$$\text{step1 : } \mathbf{r}_j = \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}_j)$$

$$\text{step2 : } \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j$$

$$\text{step3 : } \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \Delta \mathbf{u}$$

go to step1 :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{r}(\mathbf{u}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{S}(\mathbf{u}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{K}\mathbf{u}) = -\mathbf{K}$$

- Uno sviluppo asintotico approssimato:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) \approx \mathbf{r}(\mathbf{u}) + \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{r}(\mathbf{u}) \right|_0 \Delta \mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}$$

- L'ipotesi sul residuo al passo successivo:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) \approx 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{u})$$

# Strategia iterativa Newton-Raphson modificato

Sviluppi teorici (metodo di Newton)

$$\text{step1 : } \mathbf{r}_j = \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}_j)$$

$$\text{step2 : } \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j$$

$$\text{step3 : } \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \Delta \mathbf{u}$$

go to step1 :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{r}(\mathbf{u}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{S}(\mathbf{u}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{K}\mathbf{u}) = -\mathbf{K}$$

- Uno sviluppo asintotico approssimato:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) \approx \mathbf{r}(\mathbf{u}) + \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{r}(\mathbf{u}) \right|_0 \Delta \mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}$$

- L'ipotesi sul residuo al passo successivo:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) \approx 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{u})$$

# Strategia iterativa Newton-Raphson modificato

Condizione di convergenza

Lo schema Newton-Raphson Modificato comporta:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j &= \mathbf{p} - \mathbf{K} \mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_{j+1} &= \mathbf{u}_j + \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{j+1} &= \mathbf{p} - \mathbf{K} \mathbf{u}_{j+1} \\ &= \mathbf{p} - \mathbf{K} \mathbf{u}_j - \mathbf{K} \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j \\ &= \mathbf{r}_j - \mathbf{K} \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K} \tilde{\mathbf{K}}^{-1}) \mathbf{r}_j \end{aligned}$$

# Strategia iterativa Newton-Raphson modificato

## Condizione di convergenza

Lo schema Newton-Raphson Modificato comporta:  $\mathbf{r}_{j+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{K}}^{-1}) \mathbf{r}_j$

## Condizione di convergenza

La seguente condizione sul raggio spettrale della matrice  $\mathbf{I} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{K}}^{-1}$

$$-1 < \rho(\mathbf{I} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{K}}^{-1}) < 1$$

risulta sufficiente per la convergenza del processo iterativo, in quanto assicura che, ad ogni ciclo, si riduca sempre l'entità dell'errore residuo sull'equazione del problema, cioè

$$\|\mathbf{r}\|_{j+1} < \|\mathbf{r}\|_j, \quad \text{con } \|\mathbf{r}\| = \left( \mathbf{r}^t \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r} \right)^{\frac{1}{2}}$$

# Strategia iterativa Newton-Raphson modificato

## Condizione di convergenza

$$-1 < \rho(\mathbf{I} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{K}}^{-1}) < 1$$

- Definita la relazione di minoranza tra due matrici sulla base della relazione di minoranza tra i rispettivi raggi spettrali

$$\mathbf{A} < \mathbf{B} \Leftrightarrow \rho(\mathbf{A}) < \rho(\mathbf{B})$$

- ricordando il raggio spettrale della matrice identità  $\rho(\mathbf{I}) = 1$ , e quindi

$$\mathbf{A} < \mathbf{I} \Leftrightarrow \rho(\mathbf{A}) < 1$$

- La condizione di convergenza può essere riscritta nella forma

$$-1 < \mathbf{I} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{K}}^{-1} < \mathbf{I} \Leftrightarrow \begin{cases} -\mathbf{I} < \mathbf{I} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{K}}^{-1} & \Rightarrow \mathbf{K} < 2\tilde{\mathbf{K}} \\ \mathbf{I} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{K}}^{-1} < \mathbf{I} & \Rightarrow \mathbf{0} < \mathbf{K} \end{cases}$$

$$\mathbf{0} < \mathbf{K} < 2\tilde{\mathbf{K}}$$

# Strategia iterativa Newton-Raphson modificato

## Condizione di convergenza

Condizione di convergenza può essere riscritta nella forma più espressiva

$$0 < \mathbf{K} < 2\tilde{\mathbf{K}}$$

## Osservazioni

- Nel problema strutturale in esame, la seconda parte  $\mathbf{K} < 2\tilde{\mathbf{K}}$  della condizione di convergenza è ampiamente verificata essendo  $\tilde{\mathbf{K}} \approx \mathbf{K}$
- La prima parte  $\mathbf{K} > 0$  della condizione di convergenza (la positività della matrice di rigidezza del problema), è verificata a patto di imporre al problema un sistema di vincoli esterni che annullano i moti rigidi della struttura filtrando le direzioni di singolarità della matrice di rigidezza.

# Misura e controllo dell'errore numerico

La soluzione  $\mathbf{u}_j$  al  $j$ -esimo passo del processo iterativo differisce dalla soluzione esatta incognita cercata  $\mathbf{u}_{es}$

$$\mathbf{u}_j \neq \mathbf{u}_{es}$$

Al fine di accettare la soluzione al  $j$ -esimo passo come una stima sufficientemente accurata della soluzione esatta (ed interrompere il ciclo iterativo), si pone il problema di

- definire una opportuna misura dell'errore  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{es}$
- definire un criterio di controllo dell'errore

# Misura e controllo dell'errore numerico

## la misura dell'errore

una scelta opportuna è di misurare l'errore  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{ES}$ , ad ogni ciclo iterativo, attraverso il valore della energia di deformazione elastica associata, approssimando questa mediante la valutazione data attraverso la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}^{-1}$  esistente

$$\|\Delta \mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_j^t \mathbf{K}^{-1} \mathbf{r}_j \approx \frac{1}{2} \mathbf{r}_j^t \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j$$

- tale misura è omogenea dimensionalmente e tiene conto in modo pesato delle diverse componenti dell'errore
- dal punto di vista computazionale, è di valutazione immediata all'interno delle fasi di soluzione alla Gauss dove  $\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{L}}^t$  ed  $\mathbf{y}_j = \tilde{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{r}_j$ :

$$\|\Delta \mathbf{u}\|^2 \approx \frac{1}{2} \mathbf{r}_j^t \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_j^t \tilde{\mathbf{L}}^{-t}) \tilde{\mathbf{D}}^{-1} (\tilde{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{r}_j) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{y}$$

# Misura e controllo dell'errore numerico

la misura dell'errore/aspetti operativi

$$\|\Delta \mathbf{u}\|^2 \approx \frac{1}{2} \mathbf{r}_j^t \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j = \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{y}$$

nella routine solve

**riduzione del termine noto  $\mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{b}$**

mediante algoritmo forward-substitution

$$\|\Delta \mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{y}$$

**la risoluzione  $\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{L}^{-T} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{y}$**

mediante algoritmo back-substitution

```
for (p=1,...,n) do
  for (i=p+1,...,n) do
    {
      {
        b_i^{(p)} = b_i^{(p-1)} - b_p^{(p-1)} * k_ip
```

```
for (i=1,...,n) do
  {
    dot = dot + b_i * b_i / k_ii
```

```
for (p=n,...,1) do
  {
    b_p^{(p)} = b_p^{(p-1)} / k_pp
    for (i=p+1,...,n) do
      {
        b_i^{(p)} = b_i^{(p-1)} - b_p^{(p-1)} * k_ip
```

# Misura e controllo dell'errore numerico

## la misura dell'errore

$$\|\Delta \mathbf{u}\|^2 \approx \frac{1}{2} \mathbf{r}_j^t \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j$$

## il controllo dell'errore

accettare una fissata tolleranza *toll* sull'errore commesso nella valutazione della soluzione esatta  $\mathbf{u}_{es}$  significa verificare:

$$\|\Delta \mathbf{u}\| < toll \|\mathbf{u}_{es}\| \Leftrightarrow \|\Delta \mathbf{u}\|^2 < toll^2 \|\mathbf{u}_{es}\|^2, \quad \text{con } \|\mathbf{u}_{es}\|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{es}^t \mathbf{K} \mathbf{u}_{es}$$

- La quantità  $\|\mathbf{u}_{es}\|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{es}^t \mathbf{K} \mathbf{u}_{es}$  è a priori sconosciuta
- Una stima abbastanza approssimata di  $\|\mathbf{u}_{es}\|^2$  è data dalla energia di deformazione associata allo squilibrio iniziale della struttura, misurato al primo ciclo del processo iterativo

$$\|\mathbf{u}_{es}\|^2 \approx \frac{1}{2} \mathbf{r}_1^t \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_1$$

#### 4 Strategie numeriche di analisi

- Risoluzione di sistemi algebrico-lineari
- Algoritmo di decomposizione alla Gauss
- Il metodo Newton-Raphson modificato
- Gestione delle condizioni di vincolo/cedimenti

#### 5 Il codice di analisi automatica

- Dati e variabili
- Descrizione delle procedure di analisi

# Esempio di un problema vincolato

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 = \delta_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}}_{u + u_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 = r_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}}_P \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix}}_K \left( \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 = 0 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}}_{u + u_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ u_2 = \delta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_0} \right) = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ r_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}}_P
 \end{array}$$
  

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}}_u = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ r_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}}_P - \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \delta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ r_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}}_P - \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}}_{S(u_0)}$$

## Esempio di un problema vincolato

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 = \delta_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u} + \mathbf{u}_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 = r_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 = 0 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u} + \mathbf{u}_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ u_2 = \delta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_0} \right) = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ r_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ r_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}} - \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}(\mathbf{u}_0)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & | & k_{13} & k_{14} \\ k_{13} & | & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & | & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}} - \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}(\mathbf{u}_0)}$$

$$k_{12} \cdot u_1 + k_{22} \cdot 0 + k_{23} \cdot u_3 + k_{24} \cdot u_4 = r_2 - s_2$$

# Gestione delle condizioni di vincolo/cedimento

In conclusione ...

- la presenza di vincoli rigidi può essere gestita eliminando l'incognita relativa al vincolo dal processo di soluzione, mediante una condensazione del problema (e della relativa righe e colonne della matrice  $\mathbf{K}$ ).
- oppure, in alternativa equivalente, non condensando le righe e colonne corrispondenti della matrice, ma azzerandone i valori e bypassando con dei controlli logici tutte le relative operazioni che li coinvolgono.
- nel caso di cedimenti assegnati ai vincoli  $\delta$ , questi influiscono sui valori delle incognite mediante un termine noto aggiuntivo pari all'opposto della risposta elastica associata al valore del cedimento  $\mathbf{S}(\delta)$ .
- la gestione dei cedimenti dei vincoli  $\delta$  si inquadra in modo naturale nella sequenza iterativa con cui è risolto il problema elastico

al primo ciclo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_o = \delta &\longrightarrow \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}_o \\
 &\longrightarrow \mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \epsilon_e \\
 &\longrightarrow \mathbf{S}(\mathbf{u}_o) = \sum \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e \\
 \mathbf{r}_o &= \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}_o)
 \end{aligned}$$

$$\text{step1 : } \quad \mathbf{r}_j = \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}_j)$$

$$\text{step2 : } \quad \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j$$

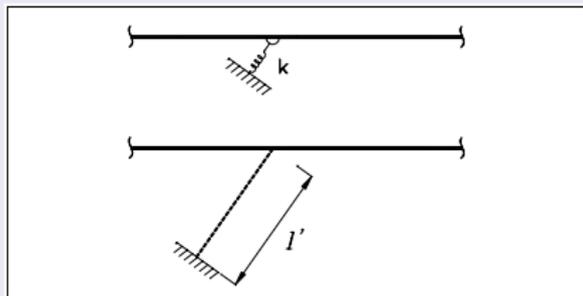
$$\text{step3 : } \quad \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \Delta \mathbf{u}$$

go to step1 :

# Gestione di cedimenti elastici

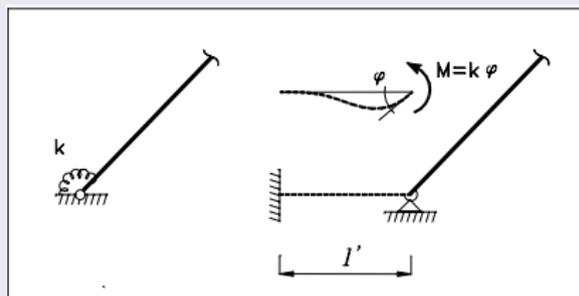
La presenza di vincoli elastici può essere gestita sostituendoli, sulla struttura, con degli elementi aggiuntivi deformabili equivalenti, cioè degli elementi aggiuntivi con dimensioni e caratteri costitutivi tarati in modo da essere equivalenti, dal punto di vista meccanico, alla presenza dei vincoli cedevoli elasticamente.

## caso di molle lineari



$$F = \frac{EA'}{l'} \Delta u \equiv k \Delta u \Rightarrow \begin{cases} \frac{EA'}{l'} = k \\ GA' = EJ' = 0 \end{cases}$$

## caso di molle rotazionali



$$M = 4 \frac{EJ'}{l'} \varphi \equiv k \varphi \Rightarrow \begin{cases} EA' = GA' = 0 \\ 4 \frac{EJ'}{l'} = k \end{cases}$$

#### 4 Strategie numeriche di analisi

- Risoluzione di sistemi algebrico-lineari
- Algoritmo di decomposizione alla Gauss
- Il metodo Newton-Raphson modificato
- Gestione delle condizioni di vincolo/cedimenti

#### 5 Il codice di analisi automatica

- Dati e variabili
- Descrizione delle procedure di analisi

# Analisi automatica delle strutture

La formalizzazione matriciale data al problema dell'analisi strutturale si presta in modo naturale ad essere implementata in un codice di analisi automatica.

- L'uso del formalismo matriciale ha permesso di ricondurre il problema dell'analisi strutturale ad un nucleo computazionale costituito dalla risoluzione di un sistema di equazioni algebriche.
- La risoluzione di tale sistema, anche in presenza di un elevato numero di incognite, è facilmente conseguibile mediante l'uso di algoritmi automatici implementabili in un calcolatore
- La possibilità offerta dal calcolatore di risolvere sistemi di equazioni a elevato numero di incognite resterebbe tuttavia di utilità limitata se non fosse ugualmente possibile generare in modo automatico anche i coefficienti del sistema.

# Analisi automatica delle strutture

La formalizzazione matriciale data al problema dell'analisi strutturale si presta in modo naturale ad essere implementata in un codice di analisi automatica.

Per **analisi matriciale delle strutture** si intende non solo una semplice formalizzazione del problema strutturale, ma una metodologia unitaria, un processo che, in modo del tutto automatico,

*a partire*

dai dati di input descrittivi del problema strutturale

*genera e risolve*

il problema algebrico

*elabora e rappresenta*

la soluzione in termini di spostamenti e sollecitazioni significativi nei punti della struttura.

#### 4 Strategie numeriche di analisi

- Risoluzione di sistemi algebrico-lineari
- Algoritmo di decomposizione alla Gauss
- Il metodo Newton-Raphson modificato
- Gestione delle condizioni di vincolo/cedimenti

#### 5 Il codice di analisi automatica

- Dati e variabili
- Descrizione delle procedure di analisi

# Descrizione della struttura

per ogni nodo ( $i = 1 \dots n$ )

$x_i$  - posizione rispetto al riferimento globale ( $x, y$ )

$f_i$  - forze e coppia agenti sul nodo / cedimenti del nodo

$w_i$  - condizioni di vincolo nodali (1 presenza / 0 assenza)

$u_i$  - spostamenti e rotazione del nodo

per ogni trave ( $e = 1 \dots m$ )

$i_e, j_e$  - indici dei nodi estremi dell'asta

$A, J$  - Area e Momento d'inerzia della sezione

$\chi$  - Fattore di riduzione per area equivalente a taglio

$E, G$  - coefficienti elastici del materiale

$N^o, M_{ie}^o, M_{je}^o$  - presollecitazioni nell'asta

$N, M_{ie}, M_{je}$  - sollecitazioni nell'asta

Gli spostamenti nodali  $u_i$  e le sollecitazioni  $N_e, M_{ie}, M_{je}$  sono in generale ricavate dall'analisi; tutte le altre quantità sono assegnate in fase di input.

# La struttura-dati delle travature elastiche

## variabili strutturate

<i>tipo</i>	<i>campo</i>	<i>descrizione</i>
generali	Nn	num. tot. nodi
	Ne	num. tot. aste
	Nt	num. tot. sezione-tipo
Nodo	n (x,y) w[1..3] p[1..3]	num nodo coordinate nodali vincoli nodali carichi/cedimenti
Asta	(ne) (ie,je) ke (px,py,mu) Sno,Mi0,Mj0 Sn,Mi,Mj	num asta nodi asta tipo sezione carichi ripartiti presollecitazioni sollecitazioni
Sezione	E G A I xhi	modulo di Young mod. elast. tang. area della sezione mom. inerzia sezione fattore riduzione taglio

## vettori globali

- U** vettore delle variabili primarie (dimensione= $3 \times Nn$ ): sono costituite dalle tre componenti di spostamento ( $u, w, \varphi$ ) di ognuno dei nodi della struttura.
- P** vettore dei carichi nodali (dimensione= $3 \times Nn$ ): sono costituite dalle tre componenti di carico ( $P, Q, C$ ) applicato su ognuno dei nodi della struttura;
- S** vettore di buffer (dimensione= $3 \times Nn$ ): di supporto allo sviluppo delle elaborazioni;
- St** memorizza la matrice di rigidezza della struttura;

# La struttura-dati delle travature elastiche

## variabili strutturate

tipo	campo	descrizione
generali	Nn	num tot nodi
	Ne	num tot aste
	Nt	num tot sez-tipo
Nodo	n	num nodo
	(x,y)	coordinate nodali
	w[1..3]	vincoli nodali
	p[1..3]	carichi/cedimenti
Asta	(ne)	num asta
	(ie,je)	nodi asta
	ke	tipo sezione
	(px,py,mu)	carichi ripartiti
	Sno,Mi0,Mj0	presollecitazioni
	Sn,Mi,Mj	sollecitazioni
Sezione	E	modulo di Young
	G	mod. elast tang.
	A	area sez
	I	mom inerzia sez
	xhi	fatt riduz taglio

## codice frame.pas (pascal compiler)

```

const
  MAXTYPES = 80;      { .....Max numero tipi sezione elementi }
  MAXNODES = 300;    { ..... Max numero di nodi }
  MAXELEM = 300;     { ..... Max numero di elementi }

type
  float = real;
  ETYPE = array[1..MAXTYPES] of
    record An : float;      { ..... area }
           Jt : float;     { ..... mom. inerzia }
           xhi : float;    { ..... fatt. taglio }
           E : float;     { .. modulo elast. norm. }
           G : float;     { .. modulo elast. tang. }
    end;
  NODE = array[1..MAXNODES] of
    record x,y : float;    { ..... coordinate }
           w : array [1..3] of integer; { cond.vincoli/pos.var. }
           f : array [1..3] of float;   { ... carichi/cedimenti }
    end;
  ELEM = array[1..MAXELEM] of
    record ie,je : integer; { ..... nodi estremali }
           ke : integer;   { ..... tipo sezione }
           Le : float;     { ..... lunghezza }
           ca,sa : float;  { ..... coseni direttori }
           pxe,pye : float; { ... carichi ripartiti }
           Sn0,Mi0,Mj0 : float; { ... presollecitazioni }
           Sn,Mi,Mj : float; { ..... sollecitazioni }
    end;

var
  Nt : integer; { ..... numero di tipi sezione }
  Nn : integer; { ..... numero di nodi }
  Ne : integer; { ..... numero di elementi }
  pT : ETYPE;  { ..... caratteristiche delle sezioni }
  pN : NODE;   { ..... caratteristiche dei nodi }
  pA : ELEM;   { ..... caratteristiche degli elementi }
  
```

# La struttura-dati delle travature elastiche

## variabili strutturate

tipo	campo	descrizione
generali	Nn	num tot nodi
	Ne	num tot aste
	Nt	num tot sez-tipo
Nodo	n	num nodo
	(x,z)	coordinate nodali
	w[1..3]	vincoli nodali
Asta	p[1..3]	carichi/cedimenti
	(ne)	num asta
	(ie,je)	nodi asta
	ke	tipo sezione
	(px,py,mu)	carichi ripartiti
	Sno,Mi0,Mj0	presollecitazioni
Sezione	Sn,Mi,Mj	sollecitazioni
	E	modulo di Young
	G	mod. elast tang.
	A	area sez
	I	mom inerzia sez
	xhi	fatt riduz taglio

## codice frame.c (c compiler)

```

typedef struct
{ double A, /* ..... area sezione */
  J, /* ..... raggio giratore di inerzia */
  xhi, /* ..... fattore di taglio */
  E, /* ..... modulo di elasticita normale */
  G; /* ..... modulo di elasticita tangenz. */
} SEZIONE;

typedef struct
{ int w[3]; /* ..... vincoli e numerazione interna */
  double x, y, /* ..... coordinate nodali */
  f[3]; /* ..carichi nodali o spostamenti vinc. */
} NODO;

typedef struct
{ int i, j, /* ..... indici dei nodi dell'asta */
  k; /* ..... indice della sezione */
  double le, /* ..... lunghezza dell'asta */
  ca,sa, /* ..... coseni direttori */
  px,py, /* ..... carichi ripartiti */
  N1,Mi,Mj, /* ..... sollecitazioni */
  N10,Mi0,Mj0; /* ..... presollecitazioni */
} ASTA;

typedef struct
{ int ns, /* ..... numero di sezioni */
  nn, /* ..... numero nodi */
  ne; /* ..... numero di aste */
  NODO *Nod; /* ..... caratteristiche nodi */
  ASTA *Ast; /* ..... caratteristiche aste */
  SEZIONE *Sez; /* ..... caratteristiche sezioni */
} DATI;

DATI Dati; /* ..... dati struttura */

```

# L'organizzazione delle variabili

Una gestione semplice delle variabili vincolate

Le variabili sono organizzate nel vettore  $U$  semplicemente in modo sequenziale sulla base della numerazione dei nodi

ciò rende estremamente banale identificarne la posizione a partire dal numero del nodo e dalla componente della variabile.

## ordine variabili

comp.	pos
$u_i$	$3 \times (i - 1) + 1$
$w_i$	$3 \times (i - 1) + 2$
$\varphi_i$	$3 \times (i - 1) + 3$

## esempio

nodo	cond.	val.		pos.		U
1	lib.	$u_1$	→	1	→	$u_1$
	lib.	$w_1$	→	2	→	$w_1$
	vinc.	$\varphi_1$	→	3	→	$\varphi_1$
2	lib.	$u_2$	→	4	→	$u_2$
	vinc.	$w_2$	→	5	→	$w_2$
	lib.	$\varphi_2$	→	6	→	$\varphi_2$
3	lib.	$u_3$	→	7	→	$u_3$
	lib.	$w_3$	→	8	→	$w_3$
	lib.	$\varphi_3$	→	9	→	$\varphi_3$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
n	vinc.	$u_n$	→	$3 \times n - 2$	→	$u_n$
	lib.	$w_n$	→	$3 \times n - 1$	→	$w_n$
	lib.	$\varphi_n$	→	$3 \times n$	→	$\varphi_n$

# L'organizzazione delle variabili

Una gestione semplice delle variabili vincolate

Le variabili sono organizzate nel vettore  $U$  semplicemente in modo sequenziale sulla base della numerazione dei nodi

ciò rende estremamente banale identificarne la posizione a partire dal numero del nodo e dalla componente della variabile.

La matrice di rigidezza è assemblata in modo completo ma annullando righe e colonne corrispondenti alle variabili vincolate e filtrando le operazioni di decomposizione

Il risultato finale è equivalente all'operazione di condensazione del sistema algebrico, senza tuttavia turbare l'ordine delle variabili.

## Svantaggi

sono connessi al fatto che la matrice di rigidezza va assemblata completa di righe e colonne a valori nulli, inutilizzate in tutte le operazioni del problema

# L'organizzazione delle variabili

Una gestione efficiente delle variabili vincolate

Le variabili sono organizzate nel vettore  $\mathbf{u}$  nel rispetto della sequenza dei nodi ma mettendo in testa del vettore le variabili attive e in coda le variabili vincolate.

<i>nodo</i>	<i>cond.</i>	<i>val.</i>	$\rightarrow$	<i>pos.</i>		$\mathbf{U}$		
1	lib.	$u_1$	$\rightarrow$	1	$\nearrow$	$u_1$	$\leftarrow$	1
	lib.	$w_1$	$\rightarrow$	2	$\nearrow$	$w_1$	$\leftarrow$	2
	vinc.	$\varphi_1$	$\rightarrow$	$3 \times n$	$\searrow$	$u_2$	$\leftarrow$	3
2	lib.	$u_2$	$\rightarrow$	3	$\nearrow$	$\varphi_2$	$\leftarrow$	4
	vinc.	$w_2$	$\rightarrow$	$3 \times n - 1$	$\searrow$	$u_3$	$\leftarrow$	5
	lib.	$\varphi_2$	$\rightarrow$	4	$\nearrow$	$w_3$	$\leftarrow$	6
3	lib.	$u_3$	$\rightarrow$	5	$\nearrow$	$\varphi_3$	$\leftarrow$	7
	lib.	$w_3$	$\rightarrow$	6	$\nearrow$	$\cdot$	$\leftarrow$	8
	lib.	$\varphi_3$	$\rightarrow$	7	$\nearrow$	$\cdot$	$\leftarrow$	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$w_n$	$\leftarrow$	$na - 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\varphi_n$	$\leftarrow$	$na$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$u_n$	$\leftarrow$	$na + 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		
n	vinc.	$u_n$	$\rightarrow$	$na + 1$	$\searrow$	$\cdot$	$\leftarrow$	$na + nv - 2$
	lib.	$w_n$	$\rightarrow$	$na - 1$	$\nearrow$	$w_2$	$\leftarrow$	$na + nv - 1$
	lib.	$\varphi_n$	$\rightarrow$	$na$	$\nearrow$	$\varphi_1$	$\leftarrow$	$na + nv$

# L'organizzazione delle variabili

Una gestione efficiente delle variabili vincolate

Le variabili sono organizzate nel vettore  $\mathbf{u}$  nel rispetto della sequenza dei nodi ma mettendo in testa del vettore le variabili attive e in coda le variabili vincolate.

Il vettore  $\mathbf{U}$  presenterà una struttura composta da due blocchi, il primo di dimensione  $N_a$ , relativo alle variabili attive, il secondo, di dimensione  $N_v$ , relativo alle variabili vincolate.

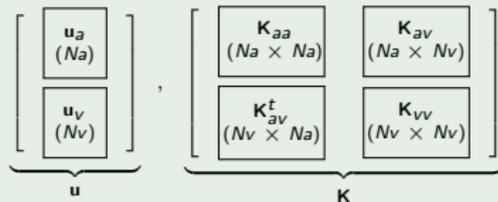
A ciò corrisponde una matrice di rigidezza con una struttura a blocchi

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ (N_a) \\ \mathbf{u}_v \\ (N_v) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{av} \\ (N_a \times N_a) & (N_a \times N_v) \\ \mathbf{K}_{av}^t & \mathbf{K}_{vv} \\ (N_v \times N_a) & (N_v \times N_v) \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}}$$

# L'organizzazione delle variabili

Una gestione efficiente delle variabili vincolate

Le variabili sono organizzate nel vettore  $\mathbf{u}$  nel rispetto della sequenza dei nodi ma mettendo in testa del vettore le variabili attive e in coda le variabili vincolate.



## Svantaggi

Mancando una regola semplice di corrispondenza tra le variabili e la posizione occupata, tale posizione deve essere memorizzata espressamente nella struttura dei dati del programma.

## Vantaggi

- Solo il blocco  $\mathbf{K}_{aa}$  della matrice è assemblato e conservato in memoria.
- Le operazioni di decomposizione relative a tale blocco non necessitano controlli logici.
- **Il tutto si traduce in termini di risparmio dei costi computazionale.**

# L'organizzazione delle variabili

## Una gestione efficiente delle variabili vincolate

### variabili strutturate

tipo	campo	descrizione
generali	Nn	num tot nodi
	Ne	num tot aste
	Nt	num tot sez-tipo
Nodo	n	num nodo
	(x,z) w[1..3] p[1..3]	coordinate nodali vinc/posizioni var carichi/cedimenti
Asta	(ne)	num asta
	(ie,je) ke	nodi asta tipo sezione
	(px,py,mu) Sno,Mi0,Mj0 Sn,Mi,Mj	carichi ripartiti presollecitazioni sollecitazioni
Sezione	E	modulo di Young
	G	mod. elast tang.
	A	area sez
	I xhi	mom inerzia sez fatt riduz taglio

### Svantaggi

Mancando una regola semplice di corrispondenza tra le variabili e la posizione occupata, tale posizione deve essere memorizzata espressamente nella struttura dei dati del programma.

### codice frame.pas (pascal compiler)

```

const
  MAXTYPES  = 80;      { .....Max numero tipi sezione elementi }
  MAXNODES  = 300;    { ..... Max numero di nodi }
  MAXELEM   = 300;    { ..... Max numero di elementi }

type
  float      = real;
  ETYPE     = array[1..MAXTYPES] of
    record
      An : float;      { ..... area }
      Jt : float;      { ..... mom. inerzia }
      xhi: float;      { ..... fatt. taglio }
      E  : float;      { .. modulo elast. norm. }
      G  : float;      { .. modulo elast. tang. }
    end;
  NODE      = array[1..MAXNODES] of
    record
      x,y : float;      { ..... coordinate }
      w  : array [1..3] of integer; { cond.vincoli/pos.var. }
      f  : array [1..3] of float;   { ... carichi/cedimenti }
    end;
  ELEM      = array[1..MAXELEM] of
    record
      ie,je : integer;  { ..... nodi estremali }
      ke    : integer;  { ..... tipo sezione }
      Le    : float;    { ..... lunghezza }
      ca,sa : float;    { ..... coseni direttori }
      pxe,pye : float;  { ... carichi ripartiti }
      Sn0,Mi0,Mj0 : float; { ... presollecitazioni }
      Sn,Mi,Mj : float;  { ..... sollecitazioni }
    end;

var
  Nt : integer; { ..... numero di tipi sezione }
  Nn : integer; { ..... numero di nodi }
  Ne : integer; { ..... numero di elementi }
  pT : ETYPE;   { ..... caratteristiche delle sezioni }
  pN : NODE;    { ..... caratteristiche dei nodi }
  pA : ELEM;    { ..... caratteristiche degli elementi }

```

# L'organizzazione delle variabili

## Una gestione efficiente delle variabili vincolate

### variabili strutturate

tipo	campo	descrizione
generali	Nn	num tot nodi
	Ne	num tot aste
	Nt	num tot sez-tipo
Nodo	n	num nodo
	(x,z)	coordinate nodali
	w[1..3] p[1..3]	vinc/posizioni var carichi/cedimenti
Asta	(ne)	num asta
	(ie,je)	nodi asta
	ke	tipo sezione
	(px,py,mu)	carichi ripartiti
	Sno,Mi0,Mj0 Sn,Mi,Mj	presollecitazioni sollecitazioni
Sezione	E	modulo di Young
	G	mod. elast tang.
	A	area sez
	I	mom inerzia sez
	xhi	fatt riduz taglio

### Svantaggi

Mancando una regola semplice di corrispondenza tra le variabili e la posizione occupata, tale posizione deve essere memorizzata espressamente nella struttura dei dati del programma.

### codice frame.c (c compiler)

```

typedef struct
{ double A, /* ..... area sezione */
  J, /* ..... raggio giratore di inerzia */
  xhi, /* ..... fattore di taglio */
  E, /* ..... modulo di elasticita normale */
  G; /* ..... modulo di elasticita tangenz. */
} SEZIONE;

typedef struct
{ int w[3]; /* ..... vincoli e numerazione interna */
  double x, y, /* ..... coordinate nodali */
  f[3]; /* ..carichi nodali o spostamenti vinc. */
} NODO;

typedef struct
{ int i, j, /* ..... indici dei nodi dell'asta */
  k; /* ..... indice della sezione */
  double le, /* ..... lunghezza dell'asta */
  ca,sa, /* ..... coseni direttori */
  px,py, /* ..... carichi ripartiti */
  Nl,Mi,Mj, /* ..... sollecitazioni */
  Nl0,Mi0,Mj0; /* ..... presollecitazioni */
} ASTA;

typedef struct
{ int ns, /* ..... numero di sezioni */
  nn, /* ..... numero nodi */
  ne; /* ..... numero di aste */
  NODO *Nod; /* ..... caratteristiche nodi */
  ASTA *Ast; /* ..... caratteristiche aste */
  SEZIONE *Sez; /* ..... caratteristiche sezioni */
} DATI;

DATI Dati; /* ..... dati struttura */

```

# La gestione della matrice

- Della matrice di rigidezza  $\mathbf{K}$  è significativo solo il blocco  $\mathbf{K}_{aa}$  connesso alle variabili non vincolate del problema.
- Il blocco  $\mathbf{K}_{aa}$  della matrice di rigidezza, con dimensioni  $(Na \times Na)$ , presenta una struttura a banda, con dimensione della semibanda pari ad  $mm \ll Na$ .
- La matrice di rigidezza può essere conservata memorizzando solo gli  $(Na \times mm)$  dati della semibanda di  $\mathbf{K}_{aa}$ .

$$\mathbf{K}_{aa} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & \cdot & k_{1,m} & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & k_{22} & \cdot & k & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ k_{1,m} & \cdot & k_{33} & \cdot & k & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & k & \cdot & k_{44} & \cdot & k & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & k & \cdot & k_{55} & \cdot & k & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & k & \cdot & k_{66} & \cdot & k & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & k & \cdot & k_{ss} & \cdot & k_{s,n} \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & k & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & k_{s,n} & \cdot & k_{nn} \end{bmatrix}}_{(Na \times Na)} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & \cdot & k_{1,m} \\ k_{22} & \cdot & k \\ k_{33} & \cdot & k \\ k_{44} & \cdot & k \\ k_{55} & \cdot & k \\ k_{66} & \cdot & k \\ k_{ss} & \cdot & k_{sn} \\ \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ k_{nn} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(Na \times mm)} \equiv St$$

- Corrispondenza di posizioni:  $\begin{cases} \text{se } i \leq j, & \mathbf{K}(i,j) \rightarrow St(i,j-i+1) \\ \text{se } i > j, & \mathbf{K}(i,j) \rightarrow St(j,i-j+1) \end{cases}$

#### 4 Strategie numeriche di analisi

- Risoluzione di sistemi algebrico-lineari
- Algoritmo di decomposizione alla Gauss
- Il metodo Newton-Raphson modificato
- Gestione delle condizioni di vincolo/cedimenti

#### 5 Il codice di analisi automatica

- Dati e variabili
- Descrizione delle procedure di analisi

# Descrizione del codice di analisi

Lo schema del codice

## Le fasi dell'analisi

da implementare in apposite procedure:

**input** : lettura e preprocessing dati

**assem** : assemblaggio matrice rigidezza  $\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e$ ;

**decom** : decomposizione matrice rigidezza  $\mathbf{K} \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{-1}$ ;

**respo** : assemblaggio risposta elastica  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$

**solve** : calcolo incremento soluzione  $\mathbf{r} = \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}) \rightarrow \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}$

**output** : elaborazione e rappresentazione dei risultati dell'analisi

# Descrizione del codice di analisi

## Lo schema del codice

### Le fasi dell'analisi

**input** : lettura e preprocessing dati  
**assem** : assemblaggio matrice rigidezza  
**decom** : decomposizione matrice rigidezza  
**respo** : assemblaggio risposta elastica  
**solve** : calcolo incremento della soluzione  
**output** : elaborazione dei risultati dell'analisi

realizza il ciclo iterativo N-R modificato:

*step1* :  $\mathbf{r}_j = \mathbf{p} - \mathbf{S}(\mathbf{u}_j)$   
*step2* :  $\Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j$   
*step3* :  $\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \Delta \mathbf{u}$   
*go to step1* :

### Schema del main

```

input
assem
decom
repeat
  respo(u → S)
  r = p - S
  solve(r →  $\Delta \mathbf{u}$ )
  u = u +  $\Delta \mathbf{u}$ 
until( $\|\mathbf{r}\| < \epsilon$ )
output
  
```





# Schemi di procedure

routine di basso livello  $\text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e)$

## $\text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e)$

per ogni asta, calcola:

- matrice congruenza locale

$$\mathbf{A}_e \equiv \mathbf{A}[1..6, 1..3]$$

- matrice rigidezza locale

$$\mathbf{K}_e \equiv \begin{bmatrix} D11 & . & . \\ . & D22 & D23 \\ . & D23 & D33 \end{bmatrix}$$

- vettore indici posizioni nodali  $\mathbf{l}_e \equiv \text{we}[1..6]$ .

## codice frame.pas (Pascal compiler)

```

type
  CHARELEM = record  we: array[1..6] of integer;  { .. posizione variabili }
                   A : array[1..3,1..6] of float; { matrice di congruenza }
                   D11,D22,D33,D23 : float;      { coefficienti rigidezza }
               end;

var
  pC      : CHARELEM; { ..... caratt. geometriche e meccaniche elemento }

procedure Element (n : integer);
var k      : integer;
    c,beta : float;
begin
  with pA[n],pC,pT[ke] do
  begin
    for k:=1 to 3 do
    begin
      we[ k ]:=pN[ie].w[k];
      we[3+k]:=pN[je].w[k];
    end;
    A[1,1]:=-ca;    A[1,2]:=-sa;    A[1,3]:=0;
    A[1,4]:= ca;    A[1,5]:= sa;    A[1,6]:=0;
    A[2,1]:=-sa/Le; A[2,2]:=+ca/Le; A[2,3]:=1;
    A[2,4]:=+sa/Le; A[2,5]:=-ca/Le; A[2,6]:=0;
    A[3,1]:=-sa/Le; A[3,2]:=+ca/Le; A[3,3]:=0;
    A[3,4]:=+sa/Le; A[3,5]:=-ca/Le; A[3,6]:=1;
    beta:=6*E*Jt/(G*xhi*An*sqr(Le));
    c:=2*E*Jt/Le;
    D11:=E*An/Le;
    D22:=(2+beta)/(1+2*beta)*c;
    D33:=D22;
    D23:=(1-beta)/(1+2*beta)*c;
  end;
end;

```

# Schemi di procedure

routine di basso livello  $\text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e)$

## $\text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e)$

per ogni asta, calcola:

- matrice congruenza locale

$$\mathbf{A}_e \equiv \mathbf{A}[1..6, 1..3]$$

- matrice rigidezza locale

$$\mathbf{K}_e \equiv \begin{bmatrix} D11 & . & . \\ . & D22 & D23 \\ . & D23 & D33 \end{bmatrix}$$

- vettore indici posizioni nodali  $\mathbf{l}_e \equiv \text{we}[1..6]$ .

## codice frame.c (c compiler)

```
typedef struct
{ int   we[6];           /* ..... indici variabili nodi asta */
  double A[3][6],       /* ..... matrice di congruenza */
        D11,D22,D33,D23; /* ..... matrice di rigidezza locale */
} ELEMENTO;
ELEMENTO Elm;          /* ..... geometria attuale elemento */

int Elemento(ASTA *pA)
{ SEZIONE *sez = Dati.Sez+pA->k-1;
  NODO *ni = Dati.Nod+pA->i-1,
        *nj = Dati.Nod+pA->j-1;
  double ca,sa,le,EA,GA,EJ,c,beta;
  int k, *we=Elm.we;
  for(k=3; k--;)
  { we[k ] = ni->w[k];
    we[k+3] = nj->w[k];
  }
  le=pA->le; ca=pA->ca; sa=pA->sa;
  Elm.A[0][0]=-ca/le; Elm.A[0][1]=-sa/le; Elm.A[0][2]= 0.0;
  Elm.A[0][3]=ca/le; Elm.A[0][4]=+sa/le; Elm.A[0][5]= 0.0;
  Elm.A[1][0]=-sa/le; Elm.A[1][1]=+ca/le; Elm.A[1][2]= 1.0;
  Elm.A[1][3]=sa/le; Elm.A[1][4]=-ca/le; Elm.A[1][5]= 0.0;
  Elm.A[2][0]=-sa/le; Elm.A[2][1]=+ca/le; Elm.A[2][2]= 0.0;
  Elm.A[2][3]=sa/le; Elm.A[2][4]=-ca/le; Elm.A[2][5]= 1.0;
  EJ = sez->E*sez->J; GA = sez->G*sez->xhi*sez->A;
  EA = sez->E*sez->A;
  beta=6*EJ/(GA*le*le); c=2*EJ/le;
  Elm.D11=EA*le;
  Elm.D22=(2+beta)/(1+2*beta)*c;
  Elm.D33=Elm.D22;
  Elm.D23=(1-beta)/(1+2*beta)*c;
  return 0;
}
```

# Schemi di procedure

la procedura Respo : assemblaggio risposta elastica  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$

## Respo

for n := 1 to Ne do (ciclo su tutte le aste)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e); \\ \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} \\ \mathbf{s}_e = \mathbf{s}_a + \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e \\ \mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{A}_e^T \mathbf{s}_e \end{array} \right.$$

## Elem(n, $\mathbf{A}_e$ , $\mathbf{K}_e$ , $\mathbf{l}_e$ )

è una routine di basso livello che, per ogni asta, calcola:

- la matrice di congruenza locale  $\mathbf{A}_e \equiv \mathbf{A}[1..6, 1..3]$
- la matrice di rigidità locale  $\mathbf{K}_e \equiv \begin{bmatrix} D11 & . & . \\ . & D22 & D23 \\ . & D23 & D33 \end{bmatrix}$
- il vettore degli indici delle posizioni nodali  $\mathbf{l}_e \equiv \mathbf{we}[1..6]$ .

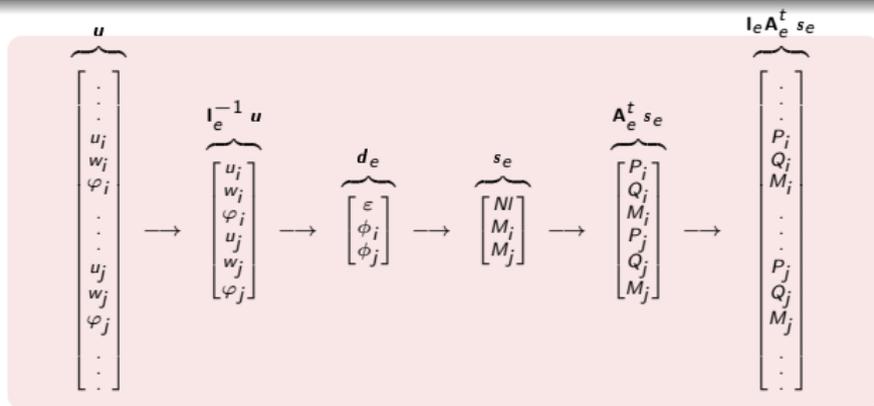
# Schemi di procedure

la procedura Respo : assemblaggio risposta elastica  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$

## Respo

for n := 1 to Ne do (ciclo su tutte le aste)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e); \\ \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} \\ \mathbf{s}_e = \mathbf{s}_a + \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e \\ \mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{A}_e^T \mathbf{s}_e \end{array} \right.$$



# Schemi di procedure

la procedura Respo : assemblaggio risposta elastica  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \sum_e \mathbf{A}_e^T \mathbf{s}_e$

## Schema procedura Respo

for n := 1 to Ne do

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e); \\ \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} \\ \mathbf{s}_e = \mathbf{s}_a + \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e \\ \mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{A}_e^T \mathbf{s}_e \end{array} \right.$$

## codice frame.pas (Pascal compiler)

```

procedure RispostaElastica (var U,S : VECTOR);
var n,i,j : integer;
    c      : float;
    eps    : array [1..3] of float;
begin
  FillChar(S^,SizeOf(float)*Neq,0);
  for n:=1 to Ne do
  begin
    Element(n);
    with pA[n], pC do
    begin
      for i:=1 to 3 do
      begin
        c:=0;
        for j:=1 to 6 do c:=c+A[i,j]*U^[we[j]];
        eps[i]:=c;
      end;
      Sn:=Sn0+D11*eps[1];
      Mi:=Mi0+D22*eps[2]+D23*eps[3];
      Mj:=Mj0+D33*eps[3]+D23*eps[2];
      for i:=1 to 6 do if we[i] <= Na then
        S^[we[i]]:=S^[we[i]]+A[1,i]*Sn+A[2,i]*Mi+A[3,i]*Mj;
      end;
    end;
  end;
end;

```

# Schemi di procedure

la procedura Respo : assemblaggio risposta elastica  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \sum_e \mathbf{A}_e^T \mathbf{s}_e$

## Schema procedura Respo

for n := 1 to Ne do

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e); \\ \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} \\ \mathbf{s}_e = \mathbf{s}_a + \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e \\ \mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{A}_e^T \mathbf{s}_e \end{array} \right.$$

## codice frame.c (c compiler)

```
void RispostaElastica()
{ int n, i, j, *we;
  double My,MiE,MjE,
          c,eps[3];
  ASTA *pA=Dati.Ast;
  memset(S, 0, Dim.neq*sizeof(double));

  for(n=Dati.ne; n--; pA++)
  { Elemento(pA);

    for (i=3, we=Elm.we; i--;)
      for (j=6, eps[i]=0; j--;) eps[i]+=Elm.A[i][j]*U[we[j]];

    pA->N1=Elm.D11*eps[0];
    pA->Mi=Elm.D22*eps[1]+Elm.D23*eps[2];
    pA->Mj=Elm.D33*eps[2]+Elm.D23*eps[1];

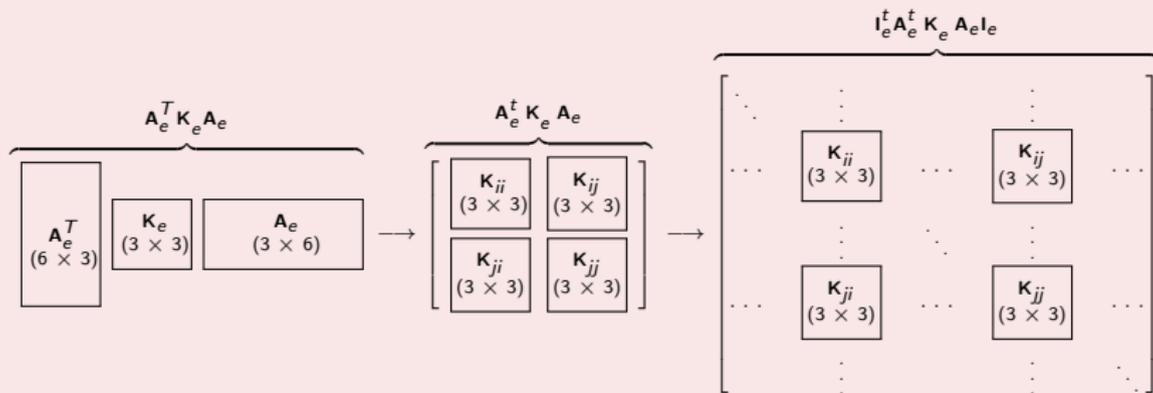
    for (i=6, we=Elm.we; i--;)
      S[we[i]]+= Elm.A[0][i]*pA->N1+Elm.A[1][i]*pA->Mi
              +Elm.A[2][i]*pA->Mj;
  }
}
```

# Schemi di procedure

la procedura Assem : assemblaggio matrice elastica  $\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e$

## Assem

for n := 1 to Ne do (ciclo su tutte le aste)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, I_e); \\ \mathbf{K} = \mathbf{K} + \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e \end{array} \right.$$


# Schemi di procedure

la procedura Assem : assemblaggio matrice elastica  $\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e$

## Schema procedura Assem

for n := 1 to Ne do

$$\begin{cases} \text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, l_e); \\ \mathbf{K} = \mathbf{K} + \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e \end{cases}$$

## codice frame.pas (Pascal compiler)

```

procedure MatriceElastica;
var i,j,n : integer;
begin
  for i:=1 to band do
    begin
      GetMem(St[i],SizeOf(float)*Na);
      FillChar(St[i]^,SizeOf(float)*Na,0)
    end;
  for n:=1 to Ne do
    begin
      Element(n);
      with pC do
        for j:=1 to 6 do
          if (we[j]<=Na) then
            for i:=1 to 6 do
              if (we[i]<=we[j]) then
                St[we[j]-we[i]+1]^[we[i]]:=St[we[j]-we[i]+1]^[we[i]]
                  +D11*A[1,i]*A[1,j]+D22*A[2,i]*A[2,j]
                  +D33*A[3,i]*A[3,j]+D23*(A[2,i]*A[3,j]+A[3,i]*A[2,j]);
            end;
          end;
    end;
end;

```

# Schemi di procedure

la procedura Assem : assemblaggio matrice elastica  $\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e$

## Schema procedura Assem

for n := 1 to Ne do

$$\begin{cases} \text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, l_e); \\ \mathbf{K} = \mathbf{K} + \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e \end{cases}$$

## codice frame.c (C compiler)

```
void MatriceElastica()
{ int    n, i, j, m, e;
  ASTA *pA = Dati.Ast;
  int *we=Elm.we;
  for(i=0; i<Dim.na; i++)
  memset(St[i], 0, Dim.bw*sizeof(double));
  for(n=Dati.ne; n--; pA++)
  { Elemento( pA );
    for(j=0; j<6; j++) if( Elm.we[j] < Dim.na )
      for(i=0; i<6; i++) if( Elm.we[i]<=Elm.we[j] )
        St[Elm.we[i]][Elm.we[j]-Elm.we[i]] += Elm.D11*Elm.A[0][i]*Elm.A[0][j]
          +Elm.D22*Elm.A[1][i]*Elm.A[1][j]
          +Elm.D33*Elm.A[2][i]*Elm.A[2][j]
          +Elm.D23*(Elm.A[1][i]*Elm.A[2][j]
            +Elm.A[2][i]*Elm.A[1][j]);
  }
}
```

# Schemi di procedure

la procedura Decom : decomposizione matrice rigidità  $\mathbf{K} \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{-1}$

$$\text{Decom } \mathbf{U} = \mathbf{DL}^T = \tilde{\mathbf{L}}^{-1}\mathbf{K}$$

equivale a rappresentare la matrice secondo il prodotto

$$\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^T$$

```

for (p=1,...,n) do
  for (i=p+1,...,n) do
    {
      m = kip(p-1) / kpp(p-1)
      for (j=p+1,...,n) do
        {
          kij(p) = kij(p-1) - kpj(p-1) * m
        }
      }
    }
  }
  kip(p) = m

```

# Schemi di procedure

la procedura Decom : decomposizione matrice rigidità  $\mathbf{K} \rightarrow \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{L}}^T = \tilde{\mathbf{L}}^{-1}\mathbf{K}$

## Schema procedura Decom

```

for (p=1,...,n) do
  for (i=p+1,...,n) do
    {
      m = kip(p-1) / kpp(p-1)
      for (j=p+1,...,n) do
        {
          kij(p) = kij(p-1) - kpj(p-1) * m
        }
      kip(p) = m
    }
  
```

## codice frame.pas (Pascal compiler)

```

procedure BandDec (var St : MATRIX;
                  Na,band : integer);
var n,m,i,j,k : integer;
    c : float;
Begin
  for n:=1 to Na do if St[1]^ [n] <> 0 then
    for m:=2 to band do if St[m]^ [n] <> 0 then
      begin
        i:=n+m-1;
        if i<=Na then
          begin
            c:=St[m]^ [n]/St[i]^ [n];
            j:=0;
            for k:=m to band do
              begin
                j:=Succ(j);
                St[j]^ [i]:=St[j]^ [i]-c*St[k]^ [n]
              end;
            St[m]^ [n]:=c
          end;
        end;
      end;
End;

```

# Schemi di procedure

la procedura Decom : decomposizione matrice rigidità  $\mathbf{K} \rightarrow \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{L}}^T = \tilde{\mathbf{L}}^{-1}\mathbf{K}$

## Schema procedura Decom

```
for (p=1,...,n) do
  for (i=p+1,...,n) do
    {
      m = kip(p-1) / kpp(p-1)
      for (j=p+1,...,n) do
        {
          kij(p) = kij(p-1) - kpj(p-1) * m
        }
      kip(p) = m
    }
```

## codice frame.c (C compiler)

```
void bandDec(M, bw, neq)
double **M;
int bw, neq;
{ int ml, n, m, i, j, k;
  double d;

  ml = 0;
  for (n=0; n<neq; n++)
  { if (M[n][0] > 1e-12)
    for (m=1; m<bw && (i=n+m)<neq; m++)
    { d = M[n][m]/M[n][0];
      for (j=0, k=m; k<bw; k++, j++)
        M[i][j] -= d*M[n][k];
      M[n][m] = d;
    }
  }
}
```

# Schemi di procedure

la procedura Solve : calcolo incremento soluzione  $\Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}$

## Solve

La soluzione del problema  $\mathbf{Kx} = \mathbf{b}$  è ottenuta in due tempi successivi:

- riduzione del termine noto  $\mathbf{b}$ , cioè risoluzione mediante forward-substitution del problema

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{r}$$

- risoluzione mediante back-substitution del problema

$$\mathbf{DL}^T \mathbf{x} = \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{L}}^{-T} \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{y}$$

```

for (p=1,...,n) do
  {
    for (i=p+1,...,n) do
      {
         $b_i^{(p)} = b_i^{(p-1)} - b_p^{(p-1)} * k_{ip}$ 
      }
    }
  }
for (p=n,...,1) do
  {
     $b_p^{(p)} = b_p^{(p-1)} / k_{pp}$ 
    for (i=p+1,...,n) do
      {
         $b_i^{(p)} = b_i^{(p-1)} - b_p^{(p-1)} * k_{ip}$ 
      }
    }
  }

```

# Schemi di procedure

la procedura Solve : calcolo incremento soluzione  $\mathbf{u} \rightarrow (\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{r}) \rightarrow (\Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{L}}^{-T} \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{y})$

## Schema procedura Solve

```

for (p=1,...,n) do
  {
    for (i=p+1,...,n) do
      {
         $b_i^{(p)} = b_i^{(p-1)} - b_p^{(p-1)} * k_{ip}$ 
      }
    }
  }
for (p=n,...,1) do
  {
     $b_i^{(p)} = b_i^{(p)} / k_{pp}$ 
    for (i=p+1,...,n) do
      {
         $b_i^{(p)} = b_i^{(p-1)} - b_p^{(p-1)} * k_{ip}$ 
      }
    }
  }

```

## codice frame.pas (Pascal compiler)

```

procedure BandSol (var St : MATRIX;
                  var S : VECTOR;
                  var dot : float;
                  Na,band : integer);
var i,n,m : integer;
    c : float;
Begin
  for n:=1 to Na do if St[1]^ [n]<>0 then
    for m:=2 to band do if S^[n] <>0 then
      begin
        i:=n+m-1;
        if i<=Na then S^[i]:=S^[i]-St[m]^ [n]*S^[n]
      end;
      dot:=0;
    for n:=Na downto 1 do if St[1]^ [n]<>0 then
      begin
        c:=S^[n]/St[1]^ [n];
        dot:=dot+c*S^[n];
        for m:=2 to band do
          begin
            i:=n+m-1;
            if i<=Na then c:=c-St[m]^ [n]*S^[i]
          end;
          S^[n]:=c
        end
      end;
End;

```

# Schemi di procedure

la procedura Solve : calcolo incremento soluzione  $\mathbf{u} \rightarrow (\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{r}) \rightarrow (\Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{L}}^{-T} \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{y})$

## Schema procedura Solve

```

for (p=1,...,n) do
{
  for (i=p+1,...,n) do
  {
     $b_i^{(p)} = b_i^{(p-1)} - b_p^{(p-1)} * k_{ip}$ 
  }
  for (p=n,...,1) do
  {
     $b_i^{(p)} = b_i^{(p)} / k_{pp}$ 
    for (i=p+1,...,n) do
    {
       $b_i^{(p)} = b_i^{(p-1)} - b_p^{(p-1)} * k_{ip}$ 
    }
  }
}

```

## codice frame.c (C compiler)

```

double bandSol(M, p, bw, neq)
double **M, *p;
int bw, neq;
{ int n, m, i;
  double d, norm;
  for (n=0; n<neq; n++)
  { if (M[n][0] > 1e-12)
    for (m=1; m<bw && (i=n+m)<neq; m++)
      p[i] -= M[n][m]*p[n];
  }
  norm = 0.0;
  for (n=neq; n--;)
  { if (M[n][0] > 1e-12)
    { d = p[n];
      p[n] /= M[n][0];
      norm += d*p[n];
      for (m=1; m<bw && (i=n+m)<neq; m++)
        p[n] -= M[n][m]*p[i];
    }
  }
  return norm;
}

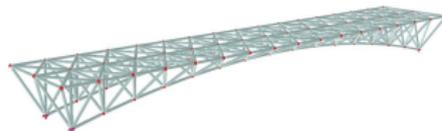
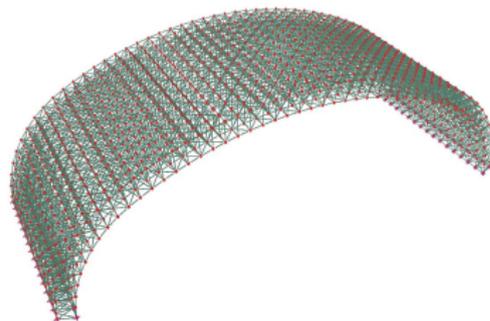
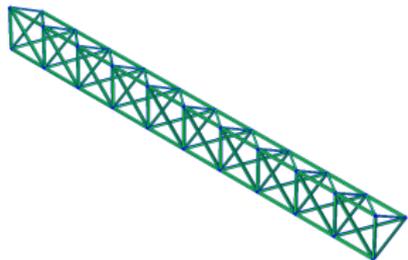
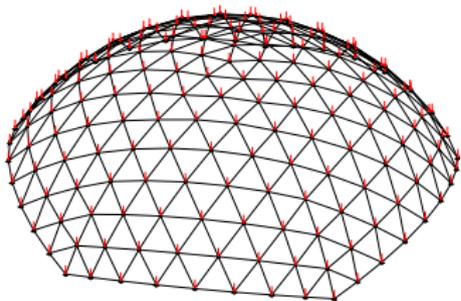
```

# Parte IV

## Complementi

- 6 Estensione a problemi tridimensionali
  - La travatura reticolare spaziale
    - Il telaio tridimensionale
    - Un caso particolare: il graticcio piano
  
- 7 Trave elastica su suolo alla Winkler
  - Il modello di trave su suolo alla Winkler
  - Il graticcio su fondazione alla Winkler

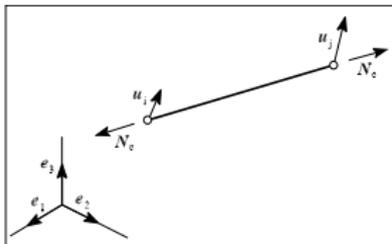
# Esempi di travature reticolari



Le *strutture reticolari* sono composte dall'assemblaggio di aste rettilinee collegate tra loro mediante nodi cerniera (incapaci di trasmettere momento flettente) e caricate da forze esterne agenti sui nodi.

# Descrizione della struttura

## Dati e variabili



per ogni nodo ( $i = 1 \dots n$ )

$x_i$  - posizione rispetto ad una terna di assi ( $x_1, x_2, x_3$ )

$f_i$  - forze esterne agenti sul nodo nelle tre direzioni

$w_i$  - presenza (1) od assenza (0) di vincolo

$u_i$  - spostamento del nodo nelle tre direzioni

per ogni asta ( $e = 1 \dots m$ )

$i_e, j_e$  - indici dei nodi estremi dell'asta

$A_e$  - Area della sezione

$E_e$  - coefficiente elastico del materiale

$N_{0e}$  - sforzo di pretensione iniziale nell'asta

$N_e$  - sforzo normale presente nell'asta

Lo spostamento nodale  $u_i$  e lo sforzo normale  $N_e$  sono in generale ricavati dall'analisi; tutte le altre quantità sono assegnate in fase di input.

# Analisi locale dell'elemento

## Parametri geometrici

La lunghezza  $L_e$  e il vettore dei coseni direttori  $\alpha_e$  dell'elemento

$$L_e^2 = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^T (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad , \quad \alpha_e = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) / L_e$$

## Descrizione statico-cinematica esterna

Spostamenti  $\mathbf{u}_e := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{pmatrix}$  e forze  $\mathbf{p}_e := \begin{pmatrix} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_j \end{pmatrix}$  nodali nel riferimento globale della struttura.

## Descrizione statico-cinematica interna

Allungamenti assiali  $\varepsilon$  e sforzi normali  $N$  delle aste  $\mathbf{d}_e \equiv \varepsilon$  ,  $\mathbf{s}_e \equiv N$ , con

$$\Phi_e[u] := (N_{0e}\varepsilon_e + \frac{1}{2}k_e\varepsilon_e^2) \quad , \quad k_e := \frac{E_e A_e}{L_e} \quad , \quad N_e = N_{0e} + \frac{E_e A_e}{L_e} \varepsilon_e$$

## la matrice di congruenza

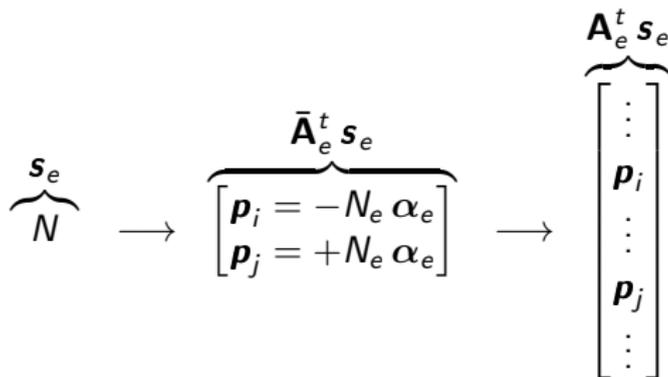
Le due descrizioni sono strettamente correlate attraverso la matrice di congruenza:

$$\varepsilon_e = \alpha_e^T (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_e = -\alpha_e^T \mathbf{u}_i + \alpha_e^T \mathbf{u}_j = \underbrace{[-\alpha_e^T \quad , \quad +\alpha_e^T]}_{\bar{\mathbf{A}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_e} \quad , \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_e \\ +\alpha_e \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_e^T} N_e$$

# Analisi globale: le relazioni di equilibrio

Assemblaggio della risposta elastica

$$\mathbf{S} = \sum_e \bar{\mathbf{A}}_e^t \mathbf{s}_e \equiv \sum_e \begin{bmatrix} -\alpha_e \\ +\alpha_e \end{bmatrix} N_e$$



- Le condizioni di equilibrio nodale

$$\mathbf{p} = \mathbf{S}$$

# Analisi globale: le relazioni di equilibrio

Assemblaggio della matrice di rigidità

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \sum_e \frac{1}{2} \underbrace{\frac{E_e A_e}{L_e} \varepsilon_e^2}_{\mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e} = \frac{1}{2} \sum_e \mathbf{u}_e^t \underbrace{\left( \frac{E_e A_e}{L_e} \begin{bmatrix} +\alpha_e \alpha_e^T & -\alpha_e \alpha_e^T \\ -\alpha_e \alpha_e^T & +\alpha_e \alpha_e^T \end{bmatrix} \right)}_{\bar{\mathbf{A}}_e^T \mathbf{K}_e \bar{\mathbf{A}}_e} \mathbf{u}_e,$$

$$\underbrace{\frac{E_e A_e}{L_e}}_{\mathbf{K}_e} \rightarrow \left[ \begin{array}{cc} \underbrace{\mathbf{K}_{ii}}_{+\frac{E_e A_e}{L_e} \alpha_e \alpha_e^T} & \underbrace{\mathbf{K}_{ij}}_{-\frac{E_e A_e}{L_e} \alpha_e \alpha_e^T} \\ \underbrace{\mathbf{K}_{ji}}_{-\frac{E_e A_e}{L_e} \alpha_e \alpha_e^T} & \underbrace{\mathbf{K}_{jj}}_{+\frac{E_e A_e}{L_e} \alpha_e \alpha_e^T} \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \boxed{\mathbf{K}_{ij} (3 \times 3)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \boxed{\mathbf{K}_{ji} (3 \times 3)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right]$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\bar{\mathbf{A}}_e^t \mathbf{K}_e \bar{\mathbf{A}}_e} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\mathbf{A}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e}$$

- Le condizioni di equilibrio nodale  $\mathbf{p} = \mathbf{K} \mathbf{u}$

# La struttura-dati delle travi reticolari

## variabili strutturate

tipo	campo	descrizione
generali	Nn	num tot nodi
	Ne	num tot aste
	Nt	num tot sez-tipo
Nodo	n	num nodo
	x[1..3]	coordinate nodali
	w[1..3]	vincoli nodali
	p[1..3]	carichi/cedimenti
Asta	ne	num asta
	(ie,je)	nodi asta
	ke	tipo sezione
	Sno	presollecitazioni
	Sn	sollecitazioni
	E	modulo di Young
Sezione	E	modulo di Young
	A	area sez

## codice truss.pas (pascal compiler)

```

const
  MAXTYPES = 80;    { .....Max numero tipi sezione elementi }
  MAXNODES = 500;  { .....Max numero di nodi }
  MAXELEM = 500;   { .....Max numero di elementi }

type
  float = real;
  ETYPE = array[1..MAXTYPES] of
    record An : float;          { ..... area }
          E : float;          { .. modulo elast. norm. }
    end;
  NODE = array[1..MAXNODES] of
    record x : array [1..3] of float; { ..... coordinate }
          w : array [1..3] of integer; { cond.vincoli/pos.var. }
          f : array [1..3] of float;  { ... carichi/cedimenti }
    end;
  ELEM = array[1..MAXELEM] of
    record ie,je: integer;      { ..... nodi estremali }
          ke : integer;        { ..... tipo sezione }
          Le : float;          { ..... lunghezze }
          cd : array [1..3] of float; { .... coseni direttori }
          Sn0 : float;         { .... presollecitazioni }
          Sn : float;          { ..... sollecitazioni }
    end;

var
  Nt : integer; { ..... numero di tipi sezione }
  Nn : integer; { ..... numero di nodi }
  Ne : integer; { ..... numero di elementi }
  pT : ETYPE;   { ..... caratteristiche delle sezioni }
  pN : NODE;    { ..... caratteristiche dei nodi }
  pA : ELEM;    { ..... caratteristiche degli elementi }

```

# Schemi di procedure

routine di basso livello  $\text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e)$

## $\text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e)$

per ogni asta, calcola:

- matrice (1x6) di congruenza locale  
 $\mathbf{A}_e \equiv \mathbf{A}[1..6]$
- matrice (1x1) di rigidità locale  
 $\mathbf{K}_e \equiv [\mathbf{D}11]$
- vettore indici posizioni nodali  $\mathbf{l}_e \equiv \text{we}[1..6]$ .

## codice truss.pas (Pascal compiler)

```

procedure Element (n : integer);
var k      : integer;
    c,beta : float;
begin
  with pA[n],pC,pT[ke] do
  begin
    for k:=1 to 3 do
    begin
      we[ k ]:=pN[ie].w[k];
      we[3+k]:=pN[je].w[k];
    end;
    A[1]:=-cd[1]; A[2]:=-cd[2]; A[3]:=-cd[3];
    A[4]:= cd[1]; A[5]:= cd[2]; A[6]:=cd[3];
    D11:=E*An/Ln;
  end;
end;

```

# Schemi di procedure

la procedura Respo : assemblaggio risposta elastica  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$

## Schema procedura Respo

for n := 1 to Ne do

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e); \\ \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} \\ \mathbf{s}_e = \mathbf{s}_a + \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e \\ \mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{A}_e^T \mathbf{s}_e \end{array} \right.$$

## codice truss.pas (Pascal compiler)

```

procedure RispostaElastica (var U,S : VECTOR);
var n,i,j : integer;
    c      : float;
    eps    : float;
begin
  FillChar(S^,SizeOf(float)*Neq,0);
  for n:=1 to Ne do
  begin
    Element(n);
    with pA[n], pC do
    begin
      c:=0;
      for j:=1 to 6 do c:=c+A[j]*U^[we[j]];
      eps:=c;
      Sn:=Sn0+D11*eps;
      for i:=1 to 6 do if we[i] <= Na then
        S^[we[i]]:=S^[we[i]]+A[i]*Sn;
      end;
    end;
  end;
end;

```

# Schemi di procedure

la procedura Assem : assemblaggio matrice elastica  $\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e$

## Schema procedura Assem

for n := 1 to Ne do

$$\begin{cases} \text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, l_e); \\ \mathbf{K} = \mathbf{K} + \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e \end{cases}$$

## codice truss.pas (Pascal compiler)

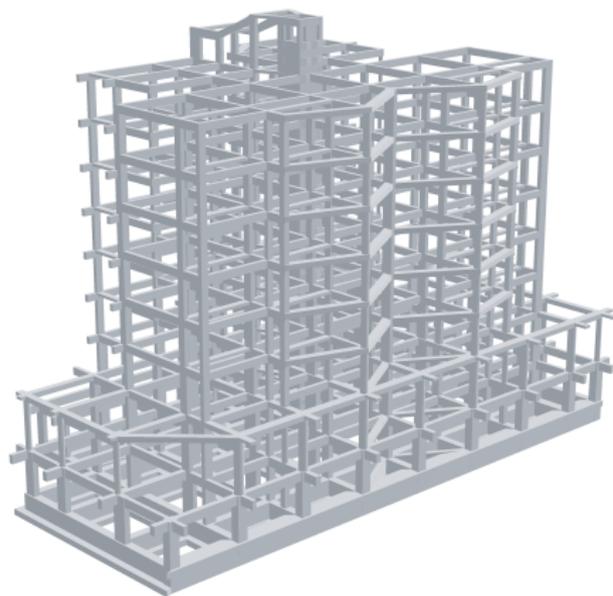
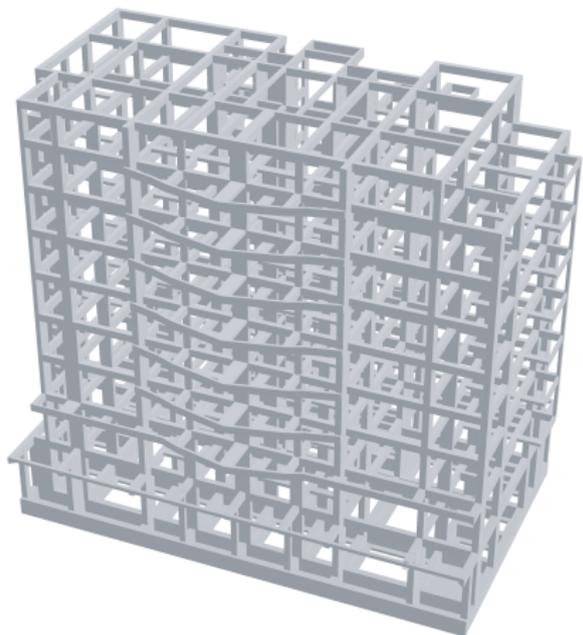
```

procedure MatriceElastica;
var i,j,n,k : integer;
    Ste      : float;
begin
  for i:=1 to band do
  begin
    GetMem(St[i],SizeOf(float)*Na);
    FillChar(St[i]^,SizeOf(float)*Na,0)
  end;
  for n:=1 to Ne do
  begin
    Element(n);
    with pC do
      for j:=1 to 6 do
        if (we[j]<=Na) then
          for i:=1 to 6 do
            if (we[i]<=we[j]) then
              St[we[j]-we[i]+1]^ [we[i]] :=St[we[j]-we[i]+1]^ [we[i]]+D11*A[i]*A[j];
          end;
        end;
      end;
  end;
end;

```

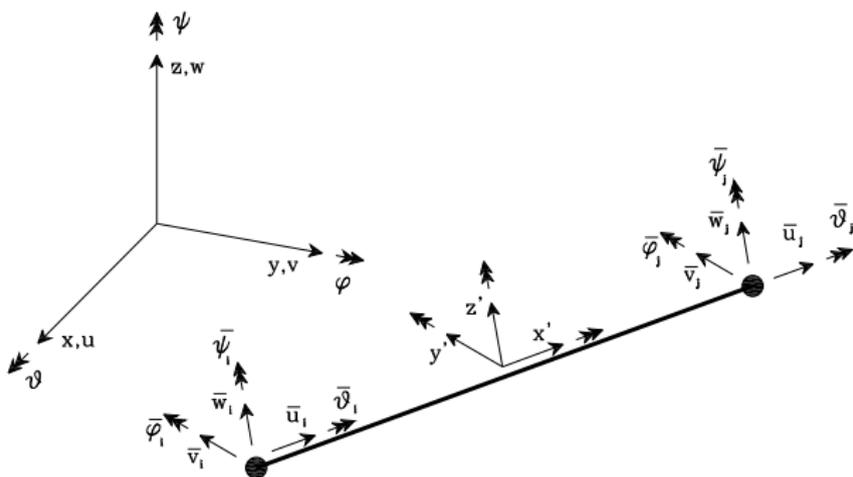
- 6 Estensione a problemi tridimensionali
  - La travatura reticolare spaziale
  - **Il telaio tridimensionale**
  - Un caso particolare: il graticcio piano
  
- 7 Trave elastica su suolo alla Winkler
  - Il modello di trave su suolo alla Winkler
  - Il graticcio su fondazione alla Winkler

# Esempi di telai tridimensionali

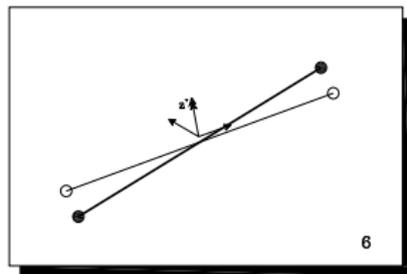
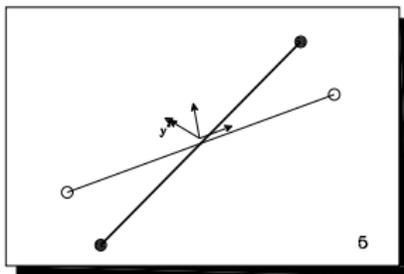
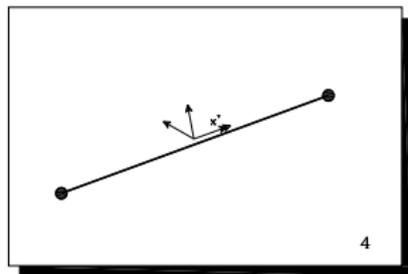
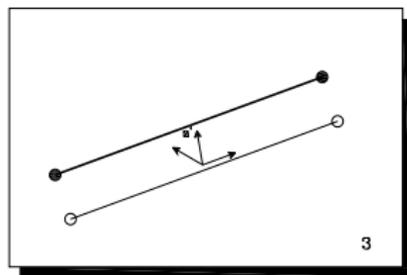
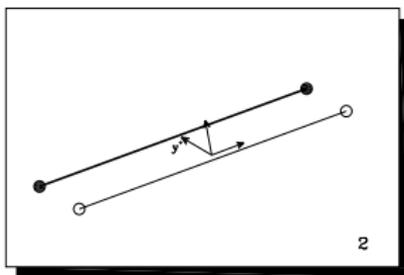
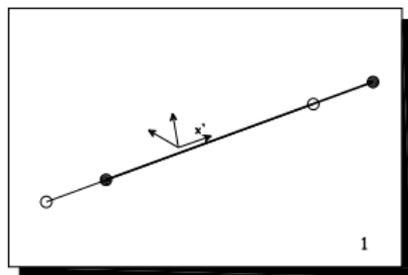


# Aspetti cinematici

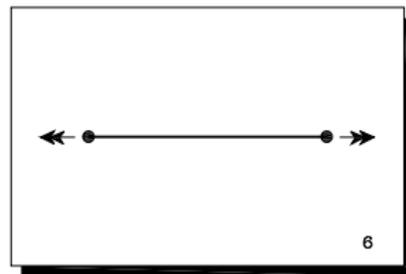
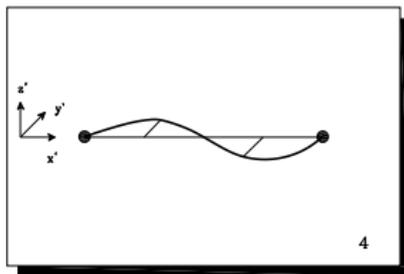
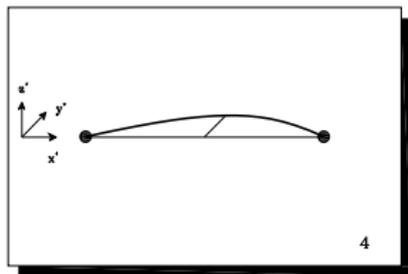
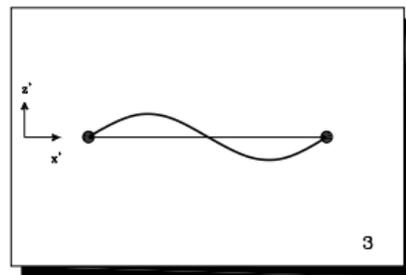
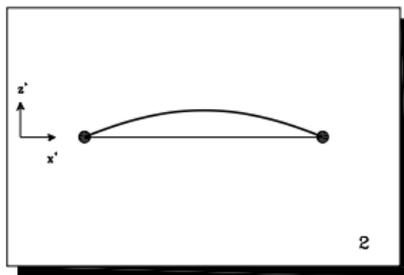
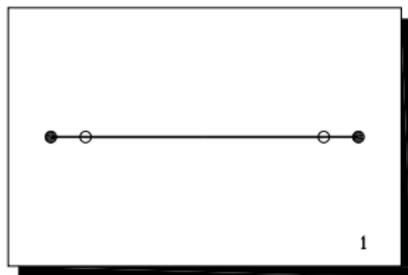
- Ogni nodo presenta 6 gradi di libertà (3 componenti di spostamento e 3 di rotazione)
- Ogni elemento-trave è descritto da 12 parametri cinematici nodali
- Ogni elemento-trave presenta 6 moti rigidi (3 traslazioni e 3 rotazioni)
- In una formulazione basati sui modi naturali, ogni elemento presenta 6 modi deformativi



## I moti rigidi della trave3D



# I modi naturali della trave3D



# I modi naturali della trave3D

## Relazioni cinematiche

modo 1 (allungamento assiale):  $\varepsilon_1 = \varepsilon = \frac{1}{L_e}(\bar{u}_j - \bar{u}_i)$

modo 2,3 (flessione simm. ed emisimm. nel piano  $x'z'$ ):

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\bar{\varphi}_j - \bar{\varphi}_i) \quad , \quad \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}(\bar{\varphi}_i + \bar{\varphi}_j) - \frac{1}{L_e}(\bar{w}_j - \bar{w}_i)$$

modo 4,5 (flessione simm. ed emisimm. nel piano  $x'y'$ ):

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_i - \bar{\psi}_j) \quad , \quad \varepsilon_5 = +\frac{1}{2}(\bar{\psi}_i + \bar{\psi}_j) - \frac{1}{L_e}(\bar{v}_j - \bar{v}_i)$$

modo 6 (torsione):  $\varepsilon_6 = \theta_t = \frac{\bar{\vartheta}_j - \bar{\vartheta}_i}{L_e}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d_e \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1/L_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/L_e & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/L_e & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/L_e & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/L_e & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/L_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L_e & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{A}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{w}_j \\ \bar{\vartheta}_j \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{\psi}_i \\ \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\vartheta}_i \\ \bar{\varphi}_j \\ \bar{\psi}_j \end{bmatrix}}_{\bar{u}_e}$$

# Energia di deformazione e rigidzze naturali

## assunzione

Il comportamento interno della trave è ricavato dalla soluzione generalizzata del problema di S. Venant scritta in un riferimento locale ortonormale  $(x', y', z')$  con asse  $x'$  diretto secondo la congiungente nodale e gli assi  $(y', z')$  secondo gli assi principali d'inerzia della sezione

## Energia di deformazione della trave (assi $y'z'$ principali d'inerzia)

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \int_{L_e} \{ EA \varepsilon^2 + EJ_{yy} \chi_y^2 + EJ_{zz} \chi_z^2 + GA^* \gamma_y^2 + GA^* \gamma_z^2 + GJ_t \theta^2 \} dx$$

## Energia di deformazione della trave rispetto ai modi naturali di deformazione

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \left\{ EAL_e \varepsilon_1^2 + \frac{4EJ_{yy}}{L_e} \varepsilon_2^2 + \frac{12EJ_{yy}}{L_e(1 + \beta_{yy})} \varepsilon_3^2 + \frac{4EJ_{zz}}{L_e} \varepsilon_4^2 + \frac{12EJ_{zz}}{L_e(1 + \beta_{zz})} \varepsilon_5^2 + GJ_t L_e \varepsilon_6^2 \right\}$$

# Energia di deformazione e rigidzze naturali

Energia di deformazione della trave (assi  $y'z'$  principali d'inerzia)

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \int_{L_e} \{ EA \varepsilon^2 + EJ_{yy} \chi_y^2 + EJ_{zz} \chi_z^2 + GA^* \gamma_y^2 + GA^* \gamma_z^2 + GJ_t \theta^2 \} dx$$

Energia di deformazione della trave rispetto ai modi naturali di deformazione

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \left\{ EAL_e \varepsilon_1^2 + \frac{4EJ_{yy}}{L_e} \varepsilon_2^2 + \frac{12EJ_{yy}}{L_e(1+\beta_{yy})} \varepsilon_3^2 + \frac{4EJ_{zz}}{L_e} \varepsilon_4^2 + \frac{12EJ_{zz}}{L_e(1+\beta_{zz})} \varepsilon_5^2 + GJ_t L_e \varepsilon_6^2 \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$$

con  $\mathbf{K}_e$  matrice di rigidzza e  $(\beta_y = \frac{12EJ_{yy}}{GAL_e^2}, \beta_z = \frac{12EJ_{zz}}{GAL_e^2})$  parametri di taglio

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} EAL_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EJ_{yy}}{L_e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_{yy}}{L_e(1+\beta_{yy})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_{zz}}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_{zz}}{L_e(1+\beta_{zz})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GJ_t L_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

# Riferimento locale e globale

## Riferimento locale ( $x', y', z'$ )

E' definito dalla base ortonormale ( $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ) con

$\alpha_x$  versore diretto lungo l'asse  $x'$  della trave

$\alpha_y, \alpha_z$  versori associati agli assi ( $y', z'$ ) principali d'inerzia della sezione

## Riferimento globale ( $x, y, z$ )

E' definito da una base ortonormale ( $i, j, k$ )

## legge di trasformazione delle coordinate

$$\bar{a} = R a$$

$\bar{a}$  vettore componenti spostamento (o rotazione) nel riferimento locale.

$a$  vettore componenti spostamento (o rotazione) nel riferimento globale.

$R$  la matrice (di rotazione) di passaggio dalla base del riferimento ( $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ) alla base ( $i, j, k$ ) del riferimento globale

# Riferimento locale e globale

## legge di trasformazione delle coordinate

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{R} \mathbf{a}$$

La matrice di rotazione  $\mathbf{R}$  è definita dai coseni direttori degli assi del riferimento locale rispetto al riferimento globale, cioè sulla base delle componenti dei versori  $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \alpha_{x1} & \alpha_{x2} & \alpha_{x3} \\ \alpha_{y1} & \alpha_{y2} & \alpha_{y3} \\ \alpha_{z1} & \alpha_{z2} & \alpha_{z3} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \alpha_x &\equiv [\alpha_{x1}, \alpha_{x2}, \alpha_{x3}]^T \\ \alpha_y &\equiv [\alpha_{y1}, \alpha_{y2}, \alpha_{y3}]^T \\ \alpha_z &\equiv [\alpha_{z1}, \alpha_{z2}, \alpha_{z3}]^T \end{aligned}$$

# Riferimento locale e globale

## Procedura di costruzione della matrice di rotazione

- 1 per ogni elemento sono assegnati 3 punti di coordinate  $\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{x}_j$ ,  $\mathbf{x}_k$  nel riferimento globale
- 2 i punti  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$  individuano l'asse dell'elemento, e quindi l'asse  $x'$  nel riferimento locale
- 3 il punto ausiliario  $\mathbf{x}_k$  individua, assieme ai punti  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ , il piano  $x'z'$
- 4 il versore  $\alpha_x$ :

$$\alpha_x \equiv [\alpha_{x1}, \alpha_{x2}, \alpha_{x3}]^T = \frac{1}{L_e}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad , \quad L_e^2 = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2 = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^T (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)$$

- 5 il versore  $\alpha_z$ :

$$\alpha_z \equiv [\alpha_{z1}, \alpha_{z2}, \alpha_{z3}]^T = \frac{\mathbf{p}'_z}{\|\mathbf{p}'_z\|} \quad , \quad \mathbf{p}'_z = (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) - ((\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)^T \alpha_x) \alpha_x$$

- 6 il versore  $\alpha_y$ :

$$\alpha_y \equiv [\alpha_{y1}, \alpha_{y2}, \alpha_{y3}]^T = \alpha_z \times \alpha_x \quad , \quad \begin{cases} \alpha_{y'x} &= \alpha_{z2} \alpha_{x3} - \alpha_{z3} \alpha_{x2} \\ \alpha_{y'y} &= \alpha_{z3} \alpha_{x1} - \alpha_{z1} \alpha_{x3} \\ \alpha_{y'z} &= \alpha_{z1} \alpha_{x2} - \alpha_{z2} \alpha_{x1} \end{cases}$$

# Trasformazione riferimento locale $\rightarrow$ riferimento globale

parametri cinematici nel riferimento locale

$$\bar{\mathbf{u}}_e^T = [\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i, \bar{\vartheta}_i, \bar{\varphi}_i, \bar{\psi}_i, \bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{w}_j, \bar{\vartheta}_j, \bar{\varphi}_j, \bar{\psi}_j]$$

parametri cinematici nel riferimento globale

$$\mathbf{u}_e = [u_i, v_i, w_i, \vartheta_i, \varphi_i, \psi_i, u_j, v_j, w_j, \vartheta_j, \varphi_j, \psi_j]$$

la legge di trasformazione  $\bar{\mathbf{u}}_e = \mathbf{T} \mathbf{u}_e$

$$\bar{\mathbf{u}}_e = \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\vartheta}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{\psi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{w}_j \\ \bar{\vartheta}_j \\ \bar{\varphi}_j \\ \bar{\psi}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_i \\ \bar{\vartheta}_i \\ \bar{\mathbf{u}}_j \\ \bar{\vartheta}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{R} \vartheta_i \\ \mathbf{R} \mathbf{u}_j \\ \mathbf{R} \vartheta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \vartheta_i \\ \mathbf{u}_j \\ \vartheta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \vartheta_i \\ \varphi_i \\ \psi_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \vartheta_j \\ \varphi_j \\ \psi_j \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{u}_e$$

# Trasformazione riferimento locale $\rightarrow$ riferimento globale

La matrice di congruenza locale  $\mathbf{A}_e$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d_e \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1/L_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/L_e & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/L_e & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/L_e & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/L_e & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/L_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L_e & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{A}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{u}_e \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{\psi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{w}_j \\ \bar{\varphi}_j \\ \bar{\psi}_j \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}_e}$$

$$d_e = \hat{\mathbf{A}}_e \bar{\mathbf{u}}_e = \hat{\mathbf{A}}_e \mathbf{T} \mathbf{u}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}_e$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} C_{x'x} & C_{x'y} & C_{x'z} \\ C_{y'x} & C_{y'y} & C_{y'z} \\ C_{z'x} & C_{z'y} & C_{z'z} \end{bmatrix}$$

# Trasformazione riferimento locale $\rightarrow$ riferimento globale

La matrice di congruenza locale  $A_e$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}}_{d_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\alpha_{x1}}{L_e} & -\frac{\alpha_{x2}}{L_e} & -\frac{\alpha_{x3}}{L_e} & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_{x1}}{L_e} & \frac{\alpha_{x2}}{L_e} & \frac{\alpha_{x3}}{L_e} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_{y1}}{2} & -\frac{\alpha_{y2}}{2} & -\frac{\alpha_{y3}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_{y1}}{2} & \frac{\alpha_{y2}}{2} & \frac{\alpha_{y3}}{2} \\ \frac{\alpha_{z1}}{L_e} & \frac{\alpha_{z2}}{L_e} & \frac{\alpha_{z3}}{L_e} & -\frac{\alpha_{y1}}{2} & -\frac{\alpha_{y2}}{2} & -\frac{\alpha_{y3}}{2} & -\frac{\alpha_{z1}}{L_e} & -\frac{\alpha_{z2}}{L_e} & -\frac{\alpha_{z3}}{L_e} & -\frac{\alpha_{y1}}{2} & -\frac{\alpha_{y2}}{2} & -\frac{\alpha_{y3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_{z1}}{2} & -\frac{\alpha_{z2}}{2} & -\frac{\alpha_{z3}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_{z1}}{2} & \frac{\alpha_{z2}}{2} & \frac{\alpha_{z3}}{2} \\ \frac{\alpha_{y1}}{L_e} & \frac{\alpha_{y2}}{L_e} & \frac{\alpha_{y3}}{L_e} & -\frac{\alpha_{z1}}{2} & -\frac{\alpha_{z2}}{2} & -\frac{\alpha_{z3}}{2} & -\frac{\alpha_{y1}}{L_e} & -\frac{\alpha_{y2}}{L_e} & -\frac{\alpha_{y3}}{L_e} & \frac{\alpha_{z1}}{2} & \frac{\alpha_{z2}}{2} & \frac{\alpha_{z3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_{x1}}{L_e} & -\frac{\alpha_{x2}}{L_e} & -\frac{\alpha_{x3}}{L_e} & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_{x1}}{L_e} & \frac{\alpha_{x2}}{L_e} & \frac{\alpha_{x3}}{L_e} \end{bmatrix}}_{A_e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_i \\ \varphi_i \\ \psi_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_j \\ \varphi_j \\ \psi_j \end{bmatrix}}_{u_e}$$

$$d_e = \hat{A}_e \bar{u}_e = \hat{A}_e T u_e = A_e u_e$$

$$T = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} C_{x'x} & C_{x'y} & C_{x'z} \\ C_{y'x} & C_{y'y} & C_{y'z} \\ C_{z'x} & C_{z'y} & C_{z'z} \end{bmatrix}$$

# Descrizione della struttura

## Dati e variabili

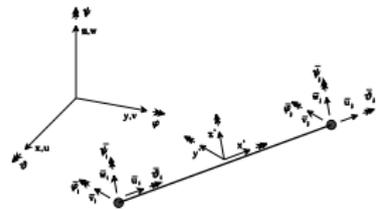
per ogni nodo ( $i = 1 \dots n$ )

$x_i$  - posizione rispetto ad una terna di assi ( $x_1, x_2, x_3$ )

$f_i$  - forze e coppie esterne agenti sul nodo

$w_i$  - condizioni di vincolo

$u_i$  - spostamento e rotazioni del nodo



per ogni asta ( $e = 1 \dots m$ )

$i_e, j_e$  - indici dei nodi estremi dell'asta

$(x_k, y_k, z_k)$  - coordinate di un nodo fittizio  
di orientamento del piano  $x'z'$

$A_e, J_{xx}, \text{etc.}$ , - parametri geometrici e costitutivi  
della sezione

$f_e$  - carichi ripartiti sull'asta

$S_e$  - sforzi della trave

Lo spostamento nodale  $u_i$  e gli sforzi  $S_e$  sono in generale ricavati dall'analisi; tutte le altre quantità sono assegnate in fase di input.

# La struttura-dati del telaio tridimensionale

## variabili strutturate

tipo	campo	descrizione
generali	Nn	num tot nodi
	Ne	num tot aste
	Nt	num tot sez-tipo
Nodo	n	num nodo
	x,y,z	coordinate nodali
	w[1..6]	vincoli/posizione
	f[1..6]	carichi/cedimenti
Asta	ne	num asta
	(ie,je)	nodi asta
	ke	tipo sezione
	fe[1..4]	carichi ripartiti
	Sn[1..6]	sollecitazioni
Sezione	A	area sez
	Jzz	mom inerz fless z
	Jyy	mom inerz fless y
	Jt	mom inerz torsion
	xhi	fatt taglio
	E	modulo elast norm
	G	modulo elast tang

## codice frame3d.pas (pascal compiler)

```

const
  MAXTYPES = 1000; { .....Max numero tipi sezione elementi }
  MAXNODES = 800;  { ..... Max numero di nodi }
  MAXELEM = 500;   { ..... Max numero di elementi }

type
  float = real;
  ETYPE = array[1..MAXTYPES] of
    record An : float; { ..... area }
           Jzz : float; { .... mom.inerz fless_z }
           Jyy : float; { .... mom.inerz fless_y }
           Jt : float; { .... mom.inerz torsion }
           xhi : float; { ..... fatt. taglio }
           E : float; { .. modulo elast. norm. }
           G : float; { .. modulo elast. tang. }
    end;
  NODE = array[1..MAXNODES] of record
    x,y,z : float; { ..... coordinate }
    w : array [1..6] of integer; { cond.vincoli/pos.var. }
    f : array [1..6] of float; { .... carichi/cedimenti }
  end;
  ELEM = array[1..MAXELEM] of record
    ie,je: integer; { ..... nodi estremali }
    ke: integer; { ..... tipo sezione }
    xk,yk,zk : float; { coord.punto ausiliario }
    Le: float; { ..... lunghezze }
    ax,ay,az: array [1..3] of float; { .....coseni direttori }
    fe : array [1..4] of float; { .....carichi ripartiti }
    Se : array[1..6] of float; { ..... sollecitazioni }
  end;

var
  Nt : integer; { ..... numero di tipi sezione }
  Nn : integer; { ..... numero di nodi }
  Ne : integer; { ..... numero di elementi }
  pT : ETYPE; { ..... caratteristiche delle sezioni }
  pN : NODE; { ..... caratteristiche dei nodi }
  pA : ELEM; { ..... caratteristiche degli elementi }

```

# Schemi di procedure

routine di basso livello  $\text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e)$

## $\text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e)$

per ogni asta, calcola:

- matrice (6x12) di congruenza locale  $\mathbf{A}_e \equiv \mathbf{A}[1..6][1..12]$
- matrice (6x6) diag di rigidezza locale  $\mathbf{K}_e \equiv \text{diag} [D11 \dots D66]$
- vettore indici posizioni nodali  $\mathbf{l}_e \equiv \text{we}[1..12]$ .

## codice frame3d.pas (Pascal compiler)

```

procedure Element ( n : integer);
var k : integer;
    cy,cz,betay,betaz : float;
begin
  with pA[n],pC,pT[ke] do
  begin
    for k:=1 to 6 do
    begin
      we[ k ]:=pN[ie].w[k];
      we[6+k]:=pN[je].w[k];
    end;
    A[1,1]:=-A[1,7]:=-ax[1]/Le; A[1,2]:=-A[1,8]:=-ax[2]/Le; A[1,3]:=-A[1,9]:=-ax[3]/Le;
    A[1,4]:= A[1,10]:=0;      A[1,5]:= A[1,11]:=0;      A[1,6]:= A[1,12]:=0;
    A[2,1]:= A[2,7]:=0;      A[2,2]:= A[2,8]:=0;      A[2,3]:= A[2,9]:=0;
    A[2,4]:=-A[2,10]:=-ay[1]/2; A[2,5]:=-A[2,11]:=-ay[2]/2; A[2,6]:=-A[2,12]:=-ay[3]/2;
    A[3,1]:=-A[3,7]:=az[1]/Le; A[3,2]:=-A[3,8]:=az[2]/Le; A[3,3]:=-A[3,9]:=az[3]/Le;
    A[3,4]:= A[3,10]:=-ay[1]/2; A[3,5]:= A[3,11]:=-ay[2]/2; A[3,6]:= A[3,12]:=-ay[3]/2;
    A[4,1]:= A[4,7]:=0;      A[4,2]:= A[4,8]:=0;      A[4,3]:= A[4,9]:=0;
    A[4,4]:=-A[4,10]:=az[1]/2; A[4,5]:=-A[4,11]:=az[2]/2; A[4,6]:=-A[4,12]:=az[3]/2;
    A[5,1]:=-A[5,7]:=ay[1]/Le; A[5,2]:=-A[5,8]:=ay[2]/Le; A[5,3]:=-A[5,9]:=ay[3]/Le;
    A[5,4]:= A[5,10]:=az[1]/2; A[5,5]:= A[5,11]:=az[2]/2; A[5,6]:= A[5,12]:=az[3]/2;
    A[6,1]:= A[6,7]:=0;      A[6,2]:= A[6,8]:=0;      A[6,3]:= A[6,9]:=0;
    A[6,4]:=-A[6,10]:=-ax[1]/Le; A[6,5]:=-A[6,11]:=-ax[2]/Le; A[6,6]:=-A[6,12]:=-ax[3]/Le;
    betay:=12*E*Jzz/(G*xhi*An*sqr(Le));
    betaz:=12*E*Jyy/(G*xhi*An*sqr(Le));
    cy:=12*E*Jzz/Le;
    cz:=12*E*Jyy/Le;
    D[1]:=E*An*Le; D[2]:=cz/3;      D[3]:=cz/(1+betaz);
    D[4]:=cy/3;    D[5]:=cy/(1+betay); D[6]:=G*Jt*Le;
  end;
end;
  
```

# Schemi di procedure

la procedura Respo : assemblaggio risposta elastica  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$

## Schema procedura Respo

for n := 1 to Ne do

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, l_e); \\ \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} \\ \mathbf{s}_e = \mathbf{s}_a + \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e \\ \mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{A}_e^T \mathbf{s}_e \end{array} \right.$$

## codice frame3d.pas (Pascal compiler)

```

procedure RispostaElastica (var U,S : VECTOR);
var n,i,j : integer;
    c      : float;
    eps   : array [1..6] of float;
begin
  FillChar(S^,SizeOf(float)*Neq,0);
  for n:=1 to Ne do
  begin
    Element(n);
    with pA[n], pC do
    begin
      for i:=1 to 6 do
      begin
        c:=0;
        for j:=1 to 12 do c:=c+A[i,j]*U^[we[j]];
        eps[i]:=c;
      end;
      for i:=1 to 6 do Se[i]:=D[i]*eps[i];
      for i:=1 to 12 do if we[i] <= Na then
        for j:=1 to 6 do
          S^[we[i]]:=S^[we[i]]+A[j,i]*Se[j];
        end;
      end;
    end;
  end;
end;

```

# Schemi di procedure

la procedura Assem : assemblaggio matrice elastica  $\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e$

## Schema procedura Assem

for n := 1 to Ne do

$$\begin{cases} \text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, l_e); \\ \mathbf{K} = \mathbf{K} + \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e \end{cases}$$

## codice frame3d.pas (Pascal compiler)

```

procedure MatriceElastica;
var i,j,n,k : integer;
begin
  for i:=1 to band do
  begin
    GetMem(St[i],SizeOf(float)*Na);
    FillChar(St[i]^,SizeOf(float)*Na,0)
  end;
  for n:=1 to Ne do
  begin
    Element(n);
    with pC do
      for j:=1 to 12 do
        if (we[j]<=Na) then
          for i:=1 to 12 do
            if (we[i]<=we[j]) then
              for k:=1 to 6 do
                St[we[j]-we[i]+1]~[we[i]]:=St[we[j]-we[i]+1]~[we[i]]
                +D[k]*A[k,i]*A[k,j];
              end;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
end;

```

- 6 Estensione a problemi tridimensionali
- La travatura reticolare spaziale
  - Il telaio tridimensionale
  - Un caso particolare: il graticcio piano

- 7 Trave elastica su suolo alla Winkler
- Il modello di trave su suolo alla Winkler
  - Il graticcio su fondazione alla Winkler

# Il graticcio piano

un caso particolare di telaio tridimensionale

## descrizione geometrica nel riferimento assoluto

- Tutte le travi sono disposte su un piano  $(x, y)$ ;
- Ogni nodo subisce spostamenti solo nella direzione  $z$  ortogonale al piano del graticcio, cioè  $u = v = 0$ ,  $w \neq 0$  assunta positiva se di abbassamento, e quindi  $\mathbf{u} = -w\mathbf{k}$ ;
- Ogni nodo subisce rotazioni solo attorno ad assi appartenenti al piano del graticcio,  $\vartheta \neq 0$ ,  $\varphi \neq 0$ ,  $\psi = 0$ , e quindi  $\boldsymbol{\vartheta} = \vartheta\mathbf{i} + \varphi\mathbf{j}$ ;
- Ogni nodo presenta tre gradi di libertà  $w, \vartheta, \varphi$ ;

## rappresentazione nel riferimento locale

In un riferimento locale  $(x', y', z')$  con asse  $x'$  sulla congiungente nodale e asse  $z'$  opposto a  $z$

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \int_{L_e} \{ EJ \chi^2 + GA^* \gamma^2 + GJ_t \theta_t^2 \} dx$$

varranno le seguenti relazioni ridotte di passaggio dalle componenti cinematiche tra riferimento locale e globale ( $\alpha$  è l'angolo che l'asse  $x'$  forma con l'asse  $x$ ):

$$w' = w, \quad \vartheta' = \vartheta \cos \alpha + \varphi \sin \alpha, \quad \varphi' = \vartheta \sin \alpha - \varphi \cos \alpha$$

# La matrice di rigidità locale

rappresentazione rispetto ai modi naturali di deformazione

## Energia di deformazione della trave

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \int_{L_e} \left\{ EJ \chi^2 + GA^* \gamma^2 + GJ_t \theta_t^2 \right\} dx$$

## la matrice di rigidità

- I modi naturali: flessione simmetrica  $\theta_s$ , flessione emisimmetrica  $\theta_a$  e angolo unitario di torsione  $\theta_t$

$$\theta_s = \frac{1}{2} (\varphi'_i - \varphi'_j) \quad , \quad \theta_a = \frac{1}{2} (\varphi'_i + \varphi'_j) + \frac{w_j - w_i}{L_e} \quad , \quad \theta_t = \frac{\vartheta'_j - \vartheta'_i}{L_e}$$

- Energia di deformazione della trave rispetto ai modi naturali di deformazione

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4EJ}{L_e} \theta_s^2 + \frac{12EJ}{L_e(1+\beta)} \theta_a^2 + GJ_t L_e \theta_t^2 \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$$

con  $\mathbf{K}_e$  matrice di rigidità e  $\beta$  parametro di taglio

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} GJ_t L_e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EJ}{L_e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EJ}{L_e(1+\beta)} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} \theta_t \\ \theta_s \\ \theta_a \end{bmatrix} \quad , \quad \beta = \frac{12EJ}{GAL_e^2}$$

# La matrice di rigidità locale

rappresentazione cinematica riferita alla congiungente nodale

## Energia di deformazione della trave

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \int_{L_e} \left\{ EJ \chi^2 + GA^* \gamma^2 + GJ_t \theta_t^2 \right\} dx$$

## la matrice di rigidità

- I parametri deformativi riferiti alla congiungente nodale  $(\phi_i, \phi_j, \theta_t)$ :

$$\phi_i = \varphi_i + \frac{w_j - w_i}{L_e}, \quad \phi_j = \varphi_j + \frac{w_j - w_i}{L_e}, \quad \theta_t = \frac{\vartheta_j - \vartheta_i}{L_e}$$

- Energia di deformazione della trave rispetto ai modi deformativi riferiti alla congiungente nodale

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \left\{ \frac{EJ(4+\beta)}{L_e(1+\beta)} \phi_i^2 + \frac{EJ(4+\beta)}{L_e(1+\beta)} \phi_j^2 + 2 \frac{EJ(2-\beta)}{L_e(1+\beta)} \phi_i \phi_j + GJ_t L_e \theta_t^2 \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} GJ_t L_e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EJ(4+\beta)}{L_e(1+\beta)} & \frac{EJ(2-\beta)}{L_e(1+\beta)} \\ 0 & \frac{EJ(2-\beta)}{L_e(1+\beta)} & \frac{EJ(4+\beta)}{L_e(1+\beta)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} \theta_t \\ \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix}, \quad \beta = \frac{12EJ}{GAL_e^2}$$

# La matrice di congruenza locale

rappresentazione dei modi naturali

- Relazioni di congruenza cinematica locale in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \theta_t = \frac{\vartheta'_j - \vartheta'_i}{L_e} \\ \theta_s = \frac{1}{2}(\varphi'_i - \varphi'_j) \\ \theta_a = \frac{1}{2}(\varphi'_i + \varphi'_j) + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{L_e} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vartheta'_i = \vartheta_i \cos \alpha + \varphi_i \sin \alpha \\ \varphi'_i = \vartheta_i \sin \alpha - \varphi_i \cos \alpha \\ \vartheta'_j = \vartheta_j \cos \alpha + \varphi_j \sin \alpha \\ \varphi'_j = \vartheta_j \sin \alpha - \varphi_j \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_t \\ \theta_s \\ \theta_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -c/L_e & -s/L_e & 0 & +c/L_e & +s/L_e \\ 0 & +s/2 & -c/2 & 0 & -s/2 & +c/2 \\ -1/L_e & +s/2 & -c/2 & 1/L_e & +s/2 & -c/2 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w_i \\ \vartheta_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \vartheta_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_e}$$

# La matrice di congruenza locale

rappresentazione cinematica riferita alla congiungente nodale

- Relazioni di congruenza cinematica locale in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \theta_t & = & \frac{\vartheta'_j - \vartheta'_i}{L_e} \\ \phi_i & = & \varphi'_i + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{L_e} \\ \phi_j & = & \varphi'_j + \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_i}{L_e} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vartheta'_i & = & \vartheta_i \cos \alpha + \varphi_i \sin \alpha \\ \varphi'_i & = & \vartheta_i \sin \alpha - \varphi_i \cos \alpha \\ \vartheta'_j & = & \vartheta_j \cos \alpha + \varphi_j \sin \alpha \\ \varphi'_j & = & \vartheta_j \sin \alpha - \varphi_j \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_t \\ \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -c/L_e & -s/L_e & 0 & +c/L_e & +s/L_e \\ -1/L_e & +s & -c & 1/L_e & 0 & 0 \\ -1/L_e & 0 & 0 & 1/L_e & +s & -c \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w_i \\ \vartheta_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \vartheta_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_e}$$

# La struttura-dati del graticcio piano

## variabili strutturate

tipo	campo	descrizione
generali	Nn	num tot nodi
	Ne	num tot aste
	Nt	num tot sez-tipo
Nodo	n	num nodo
	x,y	coordinate nodali
	w[1..3]	vincoli/posizione
	f[1..3]	carichi/cedimenti
Asta	ne	num asta
	(ie,je)	nodii asta
	ke	tipo sezione
	pe,mte	carichi ripartiti
	Sn[1..3]	sollecitazioni
Sezione	A	area sez
	J	mom inerz fless
	Jt	mom inerz torsion
	xhi	fatt taglio
	E	modulo elast norm
	G	modulo elast tang

## codice gratic.pas (pascal compiler)

```

const
  MAXTYPES = 80;      { .....Max numero tipi sezione elementi }
  MAXNODES = 300;    { ..... Max numero di nodi }
  MAXELEM = 300;     { ..... Max numero di elementi }

type
  float = real;
  ETYPE = array[1..MAXTYPES] of
    record An : float;      { ..... area }
           Jf : float;     { ... mom. inerzia fles. }
           Jt : float;     { ... mom. inerzia tors. }
           xhi : float;    { ..... fatt. taglio }
           E : float;      { .. modulo elast. norm. }
           G : float;      { .. modulo elast. tang. }
    end;
  NODE = array[1..MAXNODES] of
    record x,y : float;     { ..... coordinate }
           w : array [1..3] of integer; { cond.vincoli/pos.var. }
           f : array [1..3] of float;   { ... carichi/cedimenti }
    end;
  ELEM = array[1..MAXELEM] of
    record ie,je : integer; { ..... nodi estremali }
           ke : integer;   { ..... tipo sezione }
           Le : float;     { ..... lunghezze }
           ca,sa : float;  { ..... coseni direttori }
           ppe,mte : float; { ..... carichi ripartiti }
           Se: array[1..3] of float; { ..... sollecitazioni }
    end;

var
  Nt : integer; { ..... numero di tipi sezione }
  Nn : integer; { ..... numero di nodi }
  Ne : integer; { ..... numero di elementi }
  pT : ETYPE;   { ..... caratteristiche delle sezioni }
  pN : NODE;    { ..... caratteristiche dei nodi }
  pA : ELEM;    { ..... caratteristiche degli elementi }

```

# Schemi di procedure

routine di basso livello  $\text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e)$

## $\text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e)$

per ogni asta, calcola:

- matrice (3x6) di congruenza locale  $\mathbf{A}_e \equiv \mathbf{A}[1..6][1..12]$
- matrice (3x3) diag di rigidezza locale  $\mathbf{K}_e \equiv \mathbf{A}[1..6][1..12]$
- vettore indici posizioni nodali  $\mathbf{l}_e \equiv \mathbf{we}[1..6]$ .

## codice gratic.pas (Pascal compiler)

```

Procedure Element (n: integer);
var k: integer;
    c,beta: float;
Begin
  with pA[n],pC,pT[ke] do
  begin
    for k:=1 to 3 do
    begin
      we[k]:=pN[ie].w[k];
      we[3+k]:=pN[je].w[k];
    end;
    A[1,1]:=0;   A[1,2]:=-ca/Le;A[1,3]:=-sa/Le;A[1,4]:=0;   A[1,5]:=ca/Le;  A[1,6]:=sa/Le;
    A[2,1]:=-1/Le;A[2,2]:=sa;   A[2,3]:=-ca;   A[2,4]:=1/Le;A[2,5]:=0;   A[2,6]:=0;
    A[3,1]:=-1/Le;A[3,2]:=0;    A[3,3]:=0;     A[3,4]:=1/Le;A[3,5]:=sa;  A[3,6]:=-ca;
    beta:=12*E*Jf/(G*xhi*An*sqr(Le));
    c:=E*Jf/(Le*(1+beta));
    D[1,1]:=G*Jt*Le;  D[1,2]:=0;           D[1,3]:=0;
    D[2,1]:=0;       D[2,2]:=c*(4+beta);   D[2,3]:=+c*(2-beta);
    D[3,1]:=0;       D[3,2]:=D[2,3];       D[3,3]:=D[2,2];
  end;
End;

```

# Schemi di procedure

la procedura Respo : assemblaggio risposta elastica  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$

## Schema procedura Respo

for n := 1 to Ne do

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, l_e); \\ \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} \\ \mathbf{s}_e = \mathbf{s}_a + \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e \\ \mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{A}_e^T \mathbf{s}_e \end{array} \right.$$

## codice gratic.pas (Pascal compiler)

```

Procedure RispostaElastica (var U,S: VECTOR);
var n,i,j: integer;
    c: float;
    eps: array [1..3] of float;
Begin
  FillChar(S^,Sizeof(float)*Neq,0);
  for n:=1 to Ne do
  begin
    Element(n);
    with pA[n], pC do
    begin
      for i:=1 to 3 do
      begin
        c:=0;
        for j:=1 to 6 do
          c:=c+A[i,j]*U^[we[j]];
        eps[i]:=c;
      end;
      for i:=1 to 3 do
      begin
        c:=0;
        for j:=1 to 6 do
          c:=c+D[i,j]*eps[j];
        Se[i]:=c;
      end;
      for i:=1 to 6 do
        if (we[i]<=Na) then
          for j:=1 to 3 do S^[we[i]]:=(S^[we[i]]+A[j,i]*Se[j]);
      end;
    end;
  end;
End;
  
```

# Schemi di procedure

la procedura Assem : assemblaggio matrice elastica  $\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e$

## Schema procedura Assem

for n := 1 to Ne do

$$\begin{cases} \text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, l_e); \\ \mathbf{K} = \mathbf{K} + \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e \end{cases}$$

## codice gratic.pas (Pascal compiler)

```

Procedure MatriceElastica;
var i,j,n,ki,kj: integer;
Begin
  for i:=1 to band do
  begin
    GetMem(St[i],Sizeof(float)*Na);
    FillChar(St[i]^,Sizeof(float)*Na,0);
  end;
  for n:=1 to Ne do
  begin
    Element(n);
    with pC do
    for j:=1 to 6 do
    if (we[j]<=Na) then
    for i:=1 to 6 do
    if (we[i]<=we[j]) then
    for ki:=1 to 3 do for kj:=1 to 3 do
      St[we[j]-we[i]+1]^ [we[i]] :=St[we[j]-we[i]+1]^ [we[i]]
        +D[ki,kj]*A[ki,i]*A[kj,j];
    end;
  end;
End;

```

- 6 Estensione a problemi tridimensionali
- La travatura reticolare spaziale
  - Il telaio tridimensionale
  - Un caso particolare: il graticcio piano

- 7 Trave elastica su suolo alla Winkler
- Il modello di trave su suolo alla Winkler
  - Il graticcio su fondazione alla Winkler

# Il modello di suolo alla Winkler

è un modello semplice (e schematico) di rappresentare l'azione del suolo sulla struttura

- ipotizza che tale azione si riduce ad una pressione proporzionale al valore del cedimento superficiale del suolo

$$k_s w(x, y)$$

dove  $k_s$  è un parametro costitutivo del tipo di suolo;

- per la trave su suolo alla Winkler, equivale a considerare agenti, oltre al carico esterno ripartito per unità di lunghezza  $p_z$ , anche un'ulteriore distribuzione di carico per unità di lunghezza proporzionale al valore dell'abbassamento  $w(x)$

$$q = k_s B w(x)$$

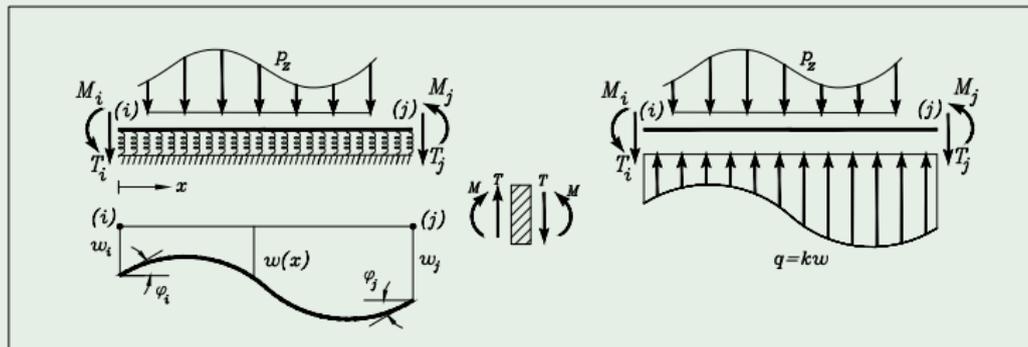
dove  $B$  rappresenta la dimensione trasversale di contatto della trave col suolo (la larghezza della trave, per una sezione rettangolare)

- sono trascurati generalmente, per la loro scarsa influenza, gli effetti di torsione dovuti agli abbassamenti non omogenei della sezione a causa della sua rotazione torsionale

# Il modello di suolo alla Winkler

- per la trave su suolo alla Winkler, equivale a considerare agenti, oltre al carico esterno ripartito per unità di lunghezza  $p_z$ , anche un'ulteriore distribuzione di carico per unità di lunghezza proporzionale al valore dell'abbassamento  $w(x)$

$$q = k_s B w(x)$$



# la trave elastica su suolo alla Winkler

l'equazione differenziale del problema e la sua soluzione generale

$$EJw_{,xxxx} = p_z - k_s B w, \quad \varphi = -w_{,x}, \quad \forall x \in (0, l)$$

$$EJw_{,xxxx} + k_s B w = p_z, \quad \varphi = -w_{,x}, \quad \forall x \in (0, l)$$

equazione differenziale della linea elastica con suolo alla Winkler

$$w_{,xxxx} + 4\alpha^4 w = \frac{p_z}{EJ}, \quad \varphi = -w_{,x}, \quad \forall x \in (0, l), \quad 4\alpha^4 = \frac{k_s B}{EJ}$$

la soluzione generale

la soluzione generale del problema è esprimibile come somma di due aliquote

$$w^g(x) = w(x) + w^o(x)$$

*soluzione di incastro perfetto  $w^o(x)$*

*soluzione nodale  $w(x)$*

# la trave elastica su suolo alla Winkler

l'equazione differenziale del problema e la sua soluzione generale

equazione differenziale della linea elastica con suolo alla Winkler

$$w_{,xxxx} + 4\alpha^4 w = \frac{p_z}{EJ} , \quad \varphi = -w_{,x} , \quad \forall x \in (0, l) , \quad 4\alpha^4 = \frac{k_s B}{EJ}$$

la soluzione generale

la soluzione generale del problema è esprimibile come somma di due aliquote

$$w^g(x) = w(x) + w^o(x)$$

*soluzione di incastro perfetto  $w^o$*

soluzione particolare dell'equazione differenziale del problema,

- in equilibrio quindi con i carichi esterni  $p_z$ ,
- a spostamenti nodali nulli (equivalenti ad una condizione di vincolo di incastro ai due nodi)

$$w^o_{,xxxx} + 4\alpha^4 w^o = \frac{p_z}{EJ} , \quad \varphi^o = -w^o_{,x} , \quad \forall x \in (0, l) , \quad \begin{cases} w^o(0) = w^o(l) = 0 \\ \varphi^o(0) = \varphi^o(l) = 0 \end{cases} ,$$

# la trave elastica su suolo alla Winkler

l'equazione differenziale del problema e la sua soluzione generale

equazione differenziale della linea elastica con suolo alla Winkler

$$w_{,xxxx} + 4\alpha^4 w = \frac{p_z}{EJ} , \quad \varphi = -w_{,x} , \quad \forall x \in (0, l) , \quad 4\alpha^4 = \frac{k_s B}{EJ}$$

la soluzione generale

la soluzione generale del problema è esprimibile come somma di due aliquote

$$w^g(x) = w(x) + w^o(x)$$

*soluzione nodale*  $w(x)$

soluzione generale dell'equazione omogeneo associata

- in equilibrio con carichi ripartiti nulli
- congruente con gli spostamenti dei nodi

$$w_{,xxxx} + 4\alpha^4 B w = 0 , \quad \varphi = -w_{,x} , \quad \forall x \in (0, l) , \quad \left\{ \begin{array}{l} w(0) = w_i \\ \varphi(0) = \varphi_i \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} w(l) = w_j \\ \varphi(l) = \varphi_j \end{array} \right. ,$$

# la trave elastica su suolo alla Winkler

l'equazione differenziale del problema e la sua soluzione generale

equazione differenziale della linea elastica con suolo alla Winkler

$$w_{,xxxx} + 4\alpha^4 w = \frac{p_z}{EJ} , \quad \varphi = -w_{,x} , \quad \forall x \in (0, l) , \quad 4\alpha^4 = \frac{k_s B}{EJ}$$

la soluzione generale

la soluzione generale del problema è esprimibile come somma di due aliquote

$$w^g(x) = w(x) + w^o(x)$$

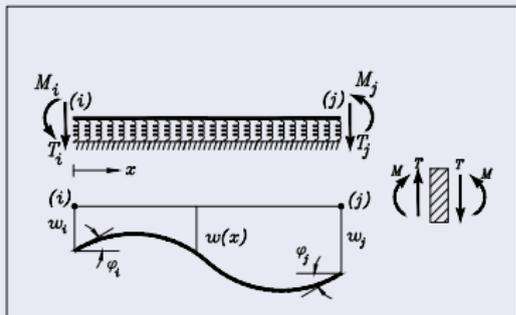
*soluzione nodale*  $w(x)$

$$w_{,xxxx} + 4\alpha^4 w = 0 , \quad \varphi = -w_{,x} , \quad \forall x \in (0, l) , \quad \left\{ \begin{array}{l} w(0) = w_i \\ \varphi(0) = \varphi_i \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} w(l) = w_j \\ \varphi(l) = \varphi_j \end{array} \right. ,$$

Concentriamo inizialmente l'attenzione sulla aliquota nodale  $w(x)$  della soluzione.

Ciò equivale a considerare nulli i carichi ripartiti sulle travi e fare riferimento solo a sistemi di carichi costituiti di forze o coppie concentrate ai nodi della struttura.

# la soluzione nodale



$$w_{,xxxx} + 4\alpha^4 w = 0, \quad \varphi = -w_{,x}, \quad \forall x \in (0, l)$$

$$\begin{cases} w_i = w(0) \\ \varphi_i = \varphi(0) = -w_{,x}(0) \end{cases}, \quad \begin{cases} w_j = w(l) \\ \varphi_j = \varphi(l) = -w_{,x}(l) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_i = -T(0) = EJ w_{,xxx}(0) \\ M_i = -M(0) = EJ w_{,xx}(0) \end{cases}, \quad \begin{cases} T_j = T(l) = -EJ w_{,xxx}(l) \\ M_j = M(l) = -EJ w_{,xx}(l) \end{cases}$$

## la forma generale della soluzione

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_s B}{4EJ}}, \quad s_x = \sin(\alpha x), \quad c_x = \cos(\alpha x)$$

$$w(x) = A_1 e^{-\alpha x} s_x + A_2 e^{-\alpha x} c_x + A_3 e^{\alpha x} s_x + A_4 e^{\alpha x} c_x$$

## le condizioni cinematiche al contorno

## le condizioni statiche al contorno

# la soluzione nodale

le condizioni cinematiche al contorno

## la forma generale della soluzione

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_s B}{4EJ}}, \quad s_x = \sin(\alpha x), \quad c_x = \cos(\alpha x), \quad s_l = \sin(\alpha l), \quad c_l = \cos(\alpha l), \quad \varphi(x) = -w_{,x}(x)$$

$$w(x) = A_1 e^{-\alpha x} s_x + A_2 e^{-\alpha x} c_x + A_3 e^{\alpha x} s_x + A_4 e^{\alpha x} c_x$$

$$w_{,x}(x) = -\alpha A_1 e^{-\alpha x} (s_x - c_x) - \alpha A_2 e^{-\alpha x} (s_x + c_x) + \alpha A_3 e^{\alpha x} (s_x + c_x) - \alpha A_4 e^{\alpha x} (s_x - c_x)$$

## le condizioni cinematiche al contorno

$$\begin{cases} w_i = w(0) \\ \varphi_i = \varphi(0) = -w_{,x}(0) \end{cases}, \quad \begin{cases} w_j = w(l) \\ \varphi_j = \varphi(l) = -w_{,x}(l) \end{cases}$$

permettono di esprimere i parametri di rappresentazione  $\mathbf{a} \equiv \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  in termini dei parametri di spostamento nodali  $\bar{\mathbf{u}} \equiv \{w_i, \varphi_i, w_j, \varphi_j\}$

$$\begin{cases} w_i &= A_2 - A_4 \\ \varphi_i &= -\alpha A_1 + \alpha A_2 - \alpha A_3 - \alpha A_4 \\ w_j &= e^{-\alpha l} s_l A_1 + e^{-\alpha l} c_l A_2 + e^{\alpha l} s_l A_3 + e^{\alpha l} c_l A_4 \\ \varphi_j &= \alpha e^{-\alpha l} (s_l - c_l) A_1 + \alpha e^{-\alpha l} (s_l + c_l) A_2 - \alpha e^{\alpha l} (s_l + c_l) A_3 + \alpha e^{\alpha l} (s_l - c_l) A_4 \end{cases}$$

# la soluzione nodale

le condizioni cinematiche al contorno

## la forma generale della soluzione

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_s B}{4EJ}}, \quad s_x = \sin(\alpha x), \quad c_x = \cos(\alpha x), \quad s_l = \sin(\alpha l), \quad c_l = \cos(\alpha l), \quad \varphi(x) = -w_{,x}(x)$$

$$w(x) = A_1 e^{-\alpha x} s_x + A_2 e^{-\alpha x} c_x + A_3 e^{\alpha x} s_x + A_4 e^{\alpha x} c_x$$

$$w_{,x}(x) = -\alpha A_1 e^{-\alpha x} (s_x - c_x) - \alpha A_2 e^{-\alpha x} (s_x + c_x) + \alpha A_3 e^{\alpha x} (s_x + c_x) - \alpha A_4 e^{\alpha x} (s_x - c_x)$$

## le condizioni cinematiche al contorno

permettono di esprimere i parametri di rappresentazione  $\mathbf{a} \equiv \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  in termini dei parametri di spostamento nodali  $\bar{\mathbf{u}} \equiv \{w_i, \varphi_i, w_j, \varphi_j\}$

In forma matriciale:  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{G} \mathbf{a}$ ,  $\Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{G}^{-1} \bar{\mathbf{u}}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\alpha & +\alpha & -\alpha & -\alpha \\ +e^{-\alpha l} s_l & +e^{-\alpha l} c_l & +e^{\alpha l} s_l & +e^{\alpha l} c_l \\ \alpha e^{-\alpha l} (s_l - c_l) & \alpha e^{-\alpha l} (s_l + c_l) & -\alpha e^{\alpha l} (s_l + c_l) & \alpha e^{\alpha l} (s_l - c_l) \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}}$$

# la soluzione nodale

le condizioni statiche al contorno

## la forma generale della soluzione

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_s B}{4EJ}}, \quad s_x = \sin(\alpha x), \quad c_x = \cos(\alpha x), \quad s_l = \sin(\alpha l), \quad c_l = \cos(\alpha l), \quad T = -EJ w_{,xxx}, \quad M = -EJ w_{,xx}$$

$$w_{,xx}(x) = -2\alpha^2 A_1 e^{-\alpha x} c_x + 2\alpha^2 A_2 e^{-\alpha x} s_x + 2\alpha^2 A_3 e^{\alpha x} c_x - 2\alpha^2 A_4 e^{\alpha x} s_x$$

$$w_{,xxx}(x) = 2\alpha^3 A_1 e^{-\alpha x} (s_x + c_x) - 2\alpha^3 A_2 e^{-\alpha x} (s_x - c_x) - 2\alpha^3 A_3 e^{\alpha x} (s_x - c_x) - 2\alpha^3 A_4 e^{\alpha x} (s_x + c_x)$$

## le condizioni statiche al contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} T_i = -T(0) = EJ w_{,xxx}(0) \\ M_i = -M(0) = EJ w_{,xx}(0) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} T_j = T(l) = -EJ w_{,xxx}(l) \\ M_j = M(l) = -EJ w_{,xx}(l) \end{array} \right.$$

permettono di esprimere i parametri di rappresentazione  $\mathbf{a} \equiv \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  in termini dei parametri di forze nodali  $\bar{\mathbf{s}} \equiv \{T_i, M_i, T_j, M_j\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_i = -EJ \alpha^2 (-2\alpha A_1 - 2\alpha A_2 - 2\alpha A_3 + 2\alpha A_4) \\ M_i = -EJ \alpha^2 (2A_1 - 2A_3) \\ T_j = -EJ \alpha^2 (2\alpha e^{-\alpha l} (s_l + c_l) A_1 - 2\alpha e^{-\alpha l} (s_l - c_l) A_2 - \alpha e^{\alpha l} (s_l - c_l) A_3 - \alpha e^{\alpha l} (s_l + c_l) A_4) \\ M_j = -EJ \alpha^2 (-2e^{-\alpha l} c_l A_1 + 2e^{-\alpha l} s_l A_2 + 2e^{\alpha l} c_l A_3 - e^{\alpha l} s_l A_4) \end{array} \right.$$

# la soluzione nodale

le condizioni statiche al contorno

## la forma generale della soluzione

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_s B}{4EJ}}, \quad s_x = \sin(\alpha x), \quad c_x = \cos(\alpha x), \quad s_l = \sin(\alpha l), \quad c_l = \cos(\alpha l), \quad T = -EJ w_{,xxx}, \quad M = -EJ w_{,xx}$$

$$w_{,xx}(x) = -2\alpha^2 A_1 e^{-\alpha x} c_x + 2\alpha^2 A_2 e^{-\alpha x} s_x + 2\alpha^2 A_3 e^{\alpha x} c_x - 2\alpha^2 A_4 e^{\alpha x} s_x$$

$$w_{,xxx}(x) = 2\alpha^3 A_1 e^{-\alpha x} (s_x + c_x) - 2\alpha^3 A_2 e^{-\alpha x} (s_x - c_x) - 2\alpha^3 A_3 e^{\alpha x} (s_x - c_x) - 2\alpha^3 A_4 e^{\alpha x} (s_x + c_x)$$

## le condizioni statiche al contorno

permettono di esprimere i parametri di rappresentazione  $\mathbf{a} \equiv \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  in termini dei parametri di forze nodali  $\bar{\mathbf{s}} \equiv \{T_i, M_i, T_j, M_j\}$

In forma matriciale:  $\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{H} \mathbf{a}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{s}}} = -EJ \alpha^2 \underbrace{\begin{bmatrix} -2\alpha & -2\alpha & -2\alpha & +2\alpha \\ +2 & 0 & -2 & 0 \\ 2\alpha e^{-\alpha l} (s_l + c_l) & -2\alpha e^{-\alpha l} (s_l - c_l) & -2\alpha e^{\alpha l} (s_l - c_l) & -2\alpha e^{\alpha l} (s_l + c_l) \\ -2e^{-\alpha l} c_l & 2e^{-\alpha l} s_l & 2e^{\alpha l} c_l & -e^{\alpha l} s_l \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}}$$

# la soluzione nodale

## la matrice di rigidità locale

### le condizioni cinematiche al contorno

In forma matriciale:  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{G} \mathbf{a}$  ,  $\Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{G}^{-1} \bar{\mathbf{u}}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\alpha & +\alpha & -\alpha & -\alpha \\ +e^{-\alpha l} s_j & +e^{-\alpha l} c_j & +e^{\alpha l} s_j & +e^{\alpha l} c_j \\ \alpha e^{-\alpha l} (s_j - c_j) & \alpha e^{-\alpha l} (s_j + c_j) & -\alpha e^{\alpha l} (s_j + c_j) & \alpha e^{\alpha l} (s_j - c_j) \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}}$$

### le condizioni statiche al contorno

In forma matriciale:  $\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{H} \mathbf{a}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{s}}} = -EJ\alpha^2 \underbrace{\begin{bmatrix} -2\alpha & -2\alpha & -2\alpha & +2\alpha \\ +2 & 0 & -2 & 0 \\ 2\alpha e^{-\alpha l} (s_j + c_j) & -2\alpha e^{-\alpha l} (s_j - c_j) & -2\alpha e^{\alpha l} (s_j - c_j) & -2\alpha e^{\alpha l} (s_j + c_j) \\ -2e^{-\alpha l} c_j & 2e^{-\alpha l} s_j & 2e^{\alpha l} c_j & -e^{\alpha l} s_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}}$$

### la matrice di rigidità locale

$$\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{H} \mathbf{a} = \mathbf{H} \mathbf{G}^{-1} \bar{\mathbf{u}} = \underbrace{\mathbf{H} \mathbf{G}^{-1}}_{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{u}}$$

# la soluzione nodale

## la matrice di rigidezza locale

le condizioni cinematiche al contorno

In forma matriciale:  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{G} \mathbf{a}$  ,  $\Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{G}^{-1} \bar{\mathbf{u}}$

le condizioni statiche al contorno

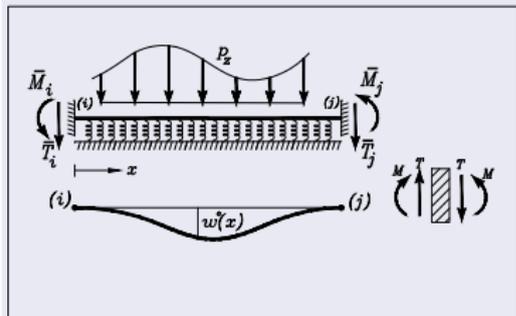
In forma matriciale:  $\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{H} \mathbf{a}$

la matrice di rigidezza locale

$$\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{H} \mathbf{a} = \mathbf{H} \mathbf{G}^{-1} \bar{\mathbf{u}} = \underbrace{\mathbf{H} \mathbf{G}^{-1}}_{\bar{\mathbf{K}}} \bar{\mathbf{u}}$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{H} \mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\Psi_1}{\alpha} & -\frac{\Psi_3}{2\alpha^2} & -\frac{\Psi_6}{\alpha} & -\frac{2\Psi_4}{\alpha^2} \\ -\frac{\Psi_3}{2\alpha^2} & \frac{\Psi_2}{2\alpha^3} & \frac{2\Psi_4}{\alpha^2} & \frac{\Psi_5}{\alpha^3} \\ -\frac{\Psi_6}{\alpha} & \frac{2\Psi_4}{\alpha^2} & \frac{\Psi_1}{\alpha} & \frac{\Psi_3}{2\alpha^2} \\ -\frac{2\Psi_4}{\alpha^2} & \frac{\Psi_5}{\alpha^3} & \frac{\Psi_3}{2\alpha^2} & \frac{\Psi_2}{2\alpha^3} \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \Psi_1 = k_S B \omega (\sinh(2\alpha l) + \sin(2\alpha l)) \\ \Psi_2 = k_S B \omega (\sinh(2\alpha l) - \sin(2\alpha l)) \\ \Psi_3 = k_S B \omega (\cosh(2\alpha l) - \cos(2\alpha l)) \\ \Psi_4 = k_S B \omega (\sinh(\alpha l) * \sin(\alpha l)) \\ \Psi_5 = k_S B \omega (\cosh(\alpha l) * \sin(\alpha l) - \sin(\alpha l) * \cos(\alpha l)) \\ \Psi_6 = k_S B \omega (\cosh(\alpha l) * \sin(\alpha l) + \sin(\alpha l) * \cos(\alpha l)) \\ \alpha = \sqrt{\frac{k_S B}{4EJ}} \\ \omega = \frac{1}{\cosh(2\alpha l) + \cos(2\alpha l)} \end{cases}$$

# la soluzione di incastro perfetto



soluzione particolare dell'equazione differenziale del problema

$$w^{\circ},_{xxxx} + 4\alpha^4 w^{\circ} = \frac{Pz}{EJ}, \quad \varphi^{\circ} = -w^{\circ},_x, \quad \forall x \in (0, l)$$

$$\begin{cases} 0 = w^{\circ}(0) \\ 0 = \varphi^{\circ}(0) = -w^{\circ},_x(0) \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 = w^{\circ}(l) \\ 0 = \varphi^{\circ}(l) = w^{\circ},_x(l) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{T}_j = -T^{\circ}(0) = EJ w^{\circ},_{xxx}(0) \\ \bar{M}_j = -M^{\circ}(0) = EJ w^{\circ},_{xx}(0) \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{T}_j = T^{\circ}(l) = -EJ w^{\circ},_{xxx}(l) \\ \bar{M}_j = M^{\circ}(l) = -EJ w^{\circ},_{xx}(l) \end{cases}$$

## la forma della soluzione

Nel caso di carico ripartito ad andamento polinomiale costante o lineare

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_s B}{4EJ}}, \quad s_x = \sin(\alpha x), \quad c_x = \cos(\alpha x)$$

$$\begin{aligned} w^{\circ}(x) &= B_1 e^{-\alpha x} \sin(\alpha x) + B_2 e^{-\alpha x} \cos(\alpha x) + B_3 e^{\alpha x} \sin(\alpha x) + B_4 e^{\alpha x} \cos(\alpha x) + \frac{Pz}{k_s B} \\ &= B_1 e^{-\alpha x} s_x + B_2 e^{-\alpha x} c_x + B_3 e^{\alpha x} s_x + B_4 e^{\alpha x} c_x + \frac{Pz}{k_s B} \end{aligned}$$

# la soluzione di incastro perfetto

le condizioni cinematiche al contorno

## la forma generale della soluzione

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_s B}{4EJ}}, \quad s_x = \sin(\alpha x), \quad c_x = \cos(\alpha x), \quad s_l = \sin(\alpha l), \quad c_l = \cos(\alpha l), \quad \varphi^o = -w^o_{,x}$$

$$w^o(x) = B_1 e^{-\alpha x} s_x + B_2 e^{-\alpha x} c_x + B_3 e^{\alpha x} s_x + B_4 e^{\alpha x} c_x + \frac{p_z}{k_s B}$$

$$w^o_{,x}(x) = -\alpha B_1 e^{-\alpha x} (s_x - c_x) - \alpha B_2 e^{-\alpha x} (s_x + c_x) + \alpha B_3 e^{\alpha x} (s_x + c_x) - \alpha B_4 e^{\alpha x} (s_x - c_x) + \frac{\partial p_z}{\partial x} / k_s B$$

## le condizioni cinematiche al contorno

$$\begin{cases} 0 = w^o(0) & 0 = w^o(l) \\ 0 = \varphi^o(0) = -w^o_{,x}(0) & 0 = \varphi^o(l) = -w^o_{,x}(l) \end{cases}$$

permettono di esprimere i parametri di rappresentazione  $\mathbf{b} \equiv \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$  in termini di opportuni dei parametri di rappresentazione del carico esterno  $p_z$

$$\begin{cases} 0 = B_2 - B_4 + \frac{p_z(0)}{k_s B} \\ 0 = -\alpha B_1 + \alpha B_2 - \alpha B_3 - \alpha B_4 - \frac{\partial p_z(0)}{\partial x} / k_s B \\ 0 = e^{-\alpha l} s_l B_1 + e^{-\alpha l} c_l B_2 + e^{\alpha l} s_l B_3 + e^{\alpha l} c_l B_4 + \frac{p_z(l)}{k_s B} \\ 0 = \alpha e^{-\alpha l} (s_l - c_l) B_1 + \alpha e^{-\alpha l} (s_l + c_l) B_2 - \alpha e^{\alpha l} (s_l + c_l) B_3 + \alpha e^{\alpha l} (s_l - c_l) B_4 - \frac{\partial p_z(l)}{\partial x} / k_s B \end{cases}$$

# la soluzione di incastro perfetto

le condizioni cinematiche al contorno

## la forma generale della soluzione

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_s B}{4EJ}}, \quad s_x = \sin(\alpha x), \quad c_x = \cos(\alpha x), \quad s_l = \sin(\alpha l), \quad c_l = \cos(\alpha l), \quad \varphi^o = -w^o{}_{,x}$$

$$w^o(x) = B_1 e^{-\alpha x} s_x + B_2 e^{-\alpha x} c_x + B_3 e^{\alpha x} s_x + B_4 e^{\alpha x} c_x + \frac{pz}{k_s B}$$

$$w^o{}_{,x}(x) = -\alpha B_1 e^{-\alpha x} (s_x - c_x) - \alpha B_2 e^{-\alpha x} (s_x + c_x) + \alpha B_3 e^{\alpha x} (s_x + c_x) - \alpha B_4 e^{\alpha x} (s_x - c_x) + \frac{\partial pz}{\partial x} / k_s B$$

## le condizioni cinematiche al contorno

$$\begin{cases} 0 = w^o(0) & 0 = w^o(l) \\ 0 = \varphi^o(0) = -w^o{}_{,x}(0) & 0 = \varphi^o(l) = -w^o{}_{,x}(l) \end{cases}$$

permettono di esprimere i parametri di rappresentazione  $\mathbf{b} \equiv \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$  in termini di opportuni dei parametri di rappresentazione del carico esterno  $p_z$

$$\begin{cases} -\frac{pz(0)}{k_s B} = B_2 - B_4 \\ +\frac{\partial pz(0)}{\partial x} / k_s B = -\alpha B_1 + \alpha B_2 - \alpha B_3 - \alpha B_4 \\ -\frac{pz(l)}{k_s B} = e^{-\alpha l} s_l B_1 + e^{-\alpha l} c_l B_2 + e^{\alpha l} s_l B_3 + e^{\alpha l} c_l B_4 \\ +\frac{\partial pz(l)}{\partial x} / k_s B = \alpha e^{-\alpha l} (s_l - c_l) B_1 + \alpha e^{-\alpha l} (s_l + c_l) B_2 - \alpha e^{\alpha l} (s_l + c_l) B_3 + \alpha e^{\alpha l} (s_l - c_l) B_4 \end{cases}$$

# la soluzione di incastro perfetto

le condizioni cinematiche al contorno

## la forma generale della soluzione

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_s B}{4EJ}}, \quad s_x = \sin(\alpha x), \quad c_x = \cos(\alpha x), \quad s_l = \sin(\alpha l), \quad c_l = \cos(\alpha l), \quad \varphi^o = -w^o,{}_x$$

$$w^o(x) = B_1 e^{-\alpha x} s_x + B_2 e^{-\alpha x} c_x + B_3 e^{\alpha x} s_x + B_4 e^{\alpha x} c_x + \frac{pz}{k_s B}$$

$$w^o,{}_x(x) = -\alpha B_1 e^{-\alpha x} (s_x - c_x) - \alpha B_2 e^{-\alpha x} (s_x + c_x) + \alpha B_3 e^{\alpha x} (s_x + c_x) - \alpha B_4 e^{\alpha x} (s_x - c_x) + \frac{\partial pz}{\partial x} k_s B$$

## le condizioni cinematiche al contorno

permettono di esprimere i parametri di rappresentazione  $\mathbf{b} \equiv \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$  in termini di opportuni dei parametri di rappresentazione del carico esterno  $p_z$

In forma matriciale:  $\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{G} \mathbf{b}$  ,  $\Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{G}^{-1} \bar{\mathbf{t}}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{p_z(0)}{k_s B} \\ +\frac{\partial p_z(0)}{\partial x} k_s B \\ -\frac{p_z(l)}{k_s B} \\ +\frac{\partial p_z(l)}{\partial x} k_s B \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{t}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\alpha & +\alpha & -\alpha & -\alpha \\ +e^{-\alpha l} s_l & +e^{-\alpha l} c_l & +e^{\alpha l} s_l & +e^{\alpha l} c_l \\ \alpha e^{-\alpha l} (s_l - c_l) & \alpha e^{-\alpha l} (s_l + c_l) & -\alpha e^{\alpha l} (s_l + c_l) & \alpha e^{\alpha l} (s_l - c_l) \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

# la soluzione di incastro perfetto

le condizioni statiche al contorno

## la forma generale della soluzione

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_s B}{4EJ}}, \quad s_x = \sin(\alpha x), \quad c_x = \cos(\alpha x), \quad s_l = \sin(\alpha l), \quad c_l = \cos(\alpha l), \quad T = -EJ w_{,xxx}, \quad M = -EJ w_{,xx}$$

$$w^o_{,xx}(x) = -2\alpha^2 B_1 e^{-\alpha x} c_x + 2\alpha^2 B_2 e^{-\alpha x} s_x + 2\alpha^2 B_3 e^{\alpha x} c_x - 2\alpha^2 B_4 e^{\alpha x} s_x$$

$$w^o_{,xxx}(x) = 2\alpha^3 B_1 e^{-\alpha x} (s_x + c_x) - 2\alpha^3 B_2 e^{-\alpha x} (s_x - c_x) - 2\alpha^3 B_3 e^{\alpha x} (s_x - c_x) - 2\alpha^3 B_4 e^{\alpha x} (s_x + c_x)$$

## le condizioni statiche al contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{T}_i = -T(0) = EJ w^o_{,xxx}(0) \\ \bar{M}_i = -M(0) = EJ w^o_{,xx}(0) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{T}_j = T(l) = -EJ w^o_{,xxx}(l) \\ \bar{M}_j = M(l) = -EJ w^o_{,xx}(l) \end{array} \right.$$

permettono di esprimere i parametri  $\mathbf{b} \equiv \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$  in termini delle forze nodali  $\bar{\mathbf{r}} \equiv \{\bar{T}_i, \bar{M}_i, \bar{T}_j, \bar{M}_j\}$  nella soluzione di incastro perfetto (le reazioni di incastro perfetto)

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{T}_i = -EJ \alpha^2 (-2\alpha B_1 - 2\alpha B_2 - 2\alpha B_3 + 2\alpha B_4) \\ \bar{M}_i = -EJ \alpha^2 (2B_1 - 2B_3) \\ \bar{T}_j = -EJ \alpha^2 (2\alpha e^{-\alpha l} (s_l + c_l) B_1 - 2\alpha e^{-\alpha l} (s_l - c_l) B_2 - \alpha e^{\alpha l} (s_l - c_l) B_3 - \alpha e^{\alpha l} (s_l + c_l) B_4) \\ \bar{M}_j = -EJ \alpha^2 (-2e^{-\alpha l} c_l B_1 + 2e^{-\alpha l} s_l B_2 + 2e^{\alpha l} c_l B_3 - e^{\alpha l} s_l B_4) \end{array} \right.$$

# la soluzione di incastro perfetto

le condizioni statiche al contorno

## la forma generale della soluzione

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_s B}{4EJ}}, \quad s_x = \sin(\alpha x), \quad c_x = \cos(\alpha x), \quad s_l = \sin(\alpha l), \quad c_l = \cos(\alpha l), \quad T = -EJ w_{,xxx}, \quad M = -EJ w_{,xx}$$

$$w^o_{,xx}(x) = -2\alpha^2 B_1 e^{-\alpha x} c_x + 2\alpha^2 B_2 e^{-\alpha x} s_x + 2\alpha^2 B_3 e^{\alpha x} c_x - 2\alpha^2 B_4 e^{\alpha x} s_x$$

$$w^o_{,xxx}(x) = 2\alpha^3 B_1 e^{-\alpha x} (s_x + c_x) - 2\alpha^3 B_2 e^{-\alpha x} (s_x - c_x) - 2\alpha^3 B_3 e^{\alpha x} (s_x - c_x) - 2\alpha^3 B_4 e^{\alpha x} (s_x + c_x)$$

## le condizioni statiche al contorno

permettono di esprimere i parametri  $\mathbf{b} \equiv \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$  in termini delle forze nodali  $\bar{\mathbf{r}} \equiv \{\bar{T}_i, \bar{M}_i, \bar{T}_j, \bar{M}_j\}$  nella soluzione di incastro perfetto (le reazioni di incastro perfetto)

In forma matriciale:  $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{H} \mathbf{b}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{T}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{T}_j \\ \bar{M}_j \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{r}}} = -EJ \alpha^2 \underbrace{\begin{bmatrix} -2\alpha & -2\alpha & -2\alpha & +2\alpha \\ +2 & 0 & -2 & 0 \\ 2\alpha e^{-\alpha l} (s_l + c_l) & -2\alpha e^{-\alpha l} (s_l - c_l) & -2\alpha e^{\alpha l} (s_l - c_l) & -2\alpha e^{\alpha l} (s_l + c_l) \\ -2e^{-\alpha l} c_l & 2e^{-\alpha l} s_l & 2e^{\alpha l} c_l & -e^{\alpha l} s_l \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

# la soluzione di incastro perfetto

le reazioni di incastro perfetto ed il carico nodale equivalente

le condizioni cinematiche al contorno

In forma matriciale:  $\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{G} \mathbf{b}$  ,  $\Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{G}^{-1} \bar{\mathbf{t}}$

le condizioni statiche al contorno

In forma matriciale:  $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{H} \mathbf{b}$

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{H} \mathbf{b} = \mathbf{H} \mathbf{G}^{-1} \bar{\mathbf{t}} = \underbrace{\mathbf{H} \mathbf{G}^{-1}}_{\bar{\mathbf{K}}} \bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{t}}$$

$\bar{\mathbf{K}}$  è la matrice di rigidezza precedentemente determinata per la soluzione nodale

il carico nodale equivalente

... è determinato dall'assemblaggio delle reazioni nodali di incastro perfetto cambiate di segno

# ricostruzione della soluzione generale

## la soluzione nodale

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_s B}{4EJ}}, \quad s_x = \sin(\alpha x), \quad c_x = \cos(\alpha x) \quad s_l = \sin(\alpha l), \quad c_l = \cos(\alpha l)$$

$$w(x) = A_1 e^{-\alpha x} s_x + A_2 e^{-\alpha x} c_x + A_3 e^{\alpha x} s_x + A_4 e^{\alpha x} c_x$$

$$M(x) = -EJ w_{,xx}(x) = +2\alpha^2 A_1 e^{-\alpha x} c_x - 2\alpha^2 A_2 e^{-\alpha x} s_x - 2\alpha^2 A_3 e^{\alpha x} c_x + 2\alpha^2 A_4 e^{\alpha x} s_x$$

$$T(x) = -EJ w_{,xxx}(x) = -2\alpha^3 A_1 e^{-\alpha x} (s_x + c_x) + 2\alpha^3 A_2 e^{-\alpha x} (s_x - c_x) + 2\alpha^3 A_3 e^{\alpha x} (s_x - c_x) + 2\alpha^3 A_4 e^{\alpha x} (s_x + c_x)$$

## la soluzione di incastro perfetto

$$w^o(x) = B_1 e^{-\alpha x} s_x + B_2 e^{-\alpha x} c_x + B_3 e^{\alpha x} s_x + B_4 e^{\alpha x} c_x + \frac{pz}{k_s B}$$

$$M^o(x) = -EJ w^o_{,xx}(x) = +2\alpha^2 B_1 e^{-\alpha x} c_x - 2\alpha^2 B_2 e^{-\alpha x} s_x - 2\alpha^2 B_3 e^{\alpha x} c_x + 2\alpha^2 B_4 e^{\alpha x} s_x$$

$$T^o(x) = -EJ w^o_{,xxx}(x) = -2\alpha^3 B_1 e^{-\alpha x} (s_x + c_x) + 2\alpha^3 B_2 e^{-\alpha x} (s_x - c_x) + 2\alpha^3 B_3 e^{\alpha x} (s_x - c_x) + 2\alpha^3 B_4 e^{\alpha x} (s_x + c_x)$$

## la soluzione generale

$$w^g(x) = w(x) + w^o(x), \quad T^g(x) = T(x) + T^o(x), \quad M^g(x) = M(x) + M^o(x)$$

## ricostruzione della soluzione generale

## la soluzione generale

$$w^g(x) = w(x) + w^o(x) \quad , \quad T^g(x) = T(x) + T^o(x) \quad , \quad M^g(x) = M(x) + M^o(x)$$

$$w^g(x) = (A_1 + B_1) e^{-\alpha x} s_x + (A_2 + B_2) e^{-\alpha x} c_x + (A_3 + B_3) e^{\alpha x} s_x + (A_4 + B_4) e^{\alpha x} c_x + \frac{p_z}{k_s B}$$

$$M^g(x) = +2\alpha^2 (A_1 + B_1) e^{-\alpha x} c_x - 2\alpha^2 (A_2 + B_2) e^{-\alpha x} s_x - 2\alpha^2 (A_3 + B_3) e^{\alpha x} c_x + 2\alpha^2 (A_4 + B_4) e^{\alpha x} s_x$$

$$T^g(x) = -2\alpha^3 (A_1 + B_1) e^{-\alpha x} (s_x + c_x) + 2\alpha^3 (A_2 + B_2) e^{-\alpha x} (s_x - c_x) + 2\alpha^3 (A_3 + B_3) e^{\alpha x} (s_x - c_x) + 2\alpha^3 (A_4 + B_4) e^{\alpha x} (s_x + c_x)$$

con

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_1 + B_1 \\ A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 \\ A_4 + B_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a+b}} = \mathbf{G}^{-1} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{\bar{u}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{p_z(0)}{k_s B} \\ +\frac{\frac{\partial p_z}{\partial x}(0)}{k_s B} \\ -\frac{p_z(l)}{k_s B} \\ +\frac{\frac{\partial p_z}{\partial x}(l)}{k_s B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\bar{t}}} \right)$$

- 6 Estensione a problemi tridimensionali
- La travatura reticolare spaziale
  - Il telaio tridimensionale
  - Un caso particolare: il graticcio piano

- 7 Trave elastica su suolo alla Winkler
- Il modello di trave su suolo alla Winkler
  - Il graticcio su fondazione alla Winkler

# Il graticcio su fondazione alla Winkler

## descrizione geometrica nel riferimento assoluto

- Tutte le travi sono disposte su un piano  $(x, y)$ ;
- Ogni nodo presenta tre gradi di libertà  $(w, \vartheta, \varphi)$ ;

## rappresentazione nel riferimento locale

In un riferimento locale  $(x', y', z')$

- l'energia di deformazione della trave sarà somma solo dei contributi flessionali e da torsione e del contributo indotto dalla deformazione del suolo:

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \int_{L_e} \left\{ EJ \chi^2 + GJ_t \theta_t^2 + k_s B w^2 \right\} dx$$

- varranno le seguenti relazioni ridotte di passaggio dalle componenti cinematiche tra riferimento locale e globale ( $\alpha$  è l'angolo che l'asse  $x'$  forma con l'asse  $x$ ):

$$w' = w \quad , \quad \vartheta' = \vartheta \cos \alpha + \varphi \sin \alpha \quad , \quad \varphi' = \vartheta \sin \alpha - \varphi \cos \alpha$$

# La matrice di rigidezza locale

## vettori di rappresentazione locale

- il vettore di rappresentazione cinematica:

$$\mathbf{d}_e \equiv [\theta_t \quad w'_i \quad \varphi'_i \quad w'_j \quad \varphi'_j]^t$$

- il vettore dei parametri duale di rappresentazione statica

$$\mathbf{s}_e \equiv [M'_t \quad T'_i \quad M'_i \quad T'_j \quad M'_j]^t$$

## la matrice di rigidezza

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M'_t \\ T'_i \\ M'_i \\ T'_j \\ M'_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} G J_t L_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Psi_1}{\alpha} & -\frac{\Psi_3}{2\alpha^2} & -\frac{\Psi_6}{\alpha} & -\frac{2\Psi_4}{\alpha^2} \\ 0 & -\frac{\Psi_3}{2\alpha^2} & \frac{\Psi_2}{2\alpha^3} & \frac{2\Psi_4}{\alpha^2} & \frac{\Psi_5}{\alpha^3} \\ 0 & -\frac{\Psi_6}{\alpha} & \frac{2\Psi_4}{\alpha^2} & \frac{\Psi_1}{\alpha} & \frac{\Psi_3}{2\alpha^2} \\ 0 & -\frac{2\Psi_4}{\alpha^2} & \frac{\Psi_5}{\alpha^3} & \frac{\Psi_3}{2\alpha^2} & \frac{\Psi_2}{2\alpha^3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_t \\ w'_i \\ \varphi'_i \\ w'_j \\ \varphi'_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}$$

# La matrice di congruenza locale

- Relazioni di congruenza cinematica locale in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} w'_i & = & w_i \\ \vartheta'_i & = & \vartheta_i \cos \alpha + \varphi_i \sin \alpha \\ \varphi'_i & = & \vartheta_i \sin \alpha - \varphi_i \cos \alpha \\ w'_j & = & w_j \\ \vartheta'_j & = & \vartheta_j \cos \alpha + \varphi_j \sin \alpha \\ \varphi'_j & = & \vartheta_j \sin \alpha - \varphi_j \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_t \\ w'_i \\ \varphi'_i \\ w'_j \\ \varphi'_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} = \frac{1}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -c/L_e & -s/L_e & 0 & +c/L_e & +s/L_e \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +s & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +s & -c \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} w_i \\ \vartheta_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \vartheta_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_e}$$

# Schemi di procedure

routine di basso livello  $\text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e)$

## $\text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, \mathbf{l}_e)$

per ogni asta, calcola:

- matrice (5x6) di congruenza locale  $\mathbf{A}_e \equiv \mathbf{A}[1..5][1..6]$
- matrice (5x5) diag di rigidezza locale  $\mathbf{K}_e \equiv \mathbf{A}[1..5][1..5]$
- vettore indici posizioni nodali  $\mathbf{l}_e \equiv \mathbf{we}[1..6]$ .

## codice graticWinkler.pas (Pascal compiler)

```

Procedure Element (n: integer);
var k: integer;
    alpha,s1,c1,s2,c2,sh1,ch1,sh2,ch2,gg,B1,B2,B3,B4,B5,B6: float;
Begin
  with pA[n],pC,pT[ke] do
  begin
    for k:=1 to 3 do
    begin
      we[k]:=pN[ie].w[k];
      we[3+k]:=pN[je].w[k];
    end;
    A[1,1]:=0; A[1,2]:=-ca; A[1,3]:=-sa; A[1,4]:=0; A[1,5]:=ca; A[1,6]:=sa;
    A[2,1]:=1; A[2,2]:=0; A[2,3]:=0; A[2,4]:=0; A[2,5]:=0; A[2,6]:=0;
    A[3,1]:=0; A[3,2]:=sa; A[3,3]:=-ca; A[3,4]:=0; A[3,5]:=0; A[3,6]:=0;
    A[4,1]:=0; A[4,2]:=0; A[4,3]:=0; A[4,4]:=1; A[4,5]:=0; A[4,6]:=0;
    A[5,1]:=0; A[5,2]:=0; A[5,3]:=0; A[5,4]:=0; A[5,5]:=sa; A[5,6]:=-ca;
    alpha:=power((kf/(4*E*Jf)), (0.25));
    s1:=sin(alpha*Le); c1:=cos(alpha*Le); s2:=sin(2*alpha*Le); c2:=cos(2*alpha*Le);
    sh1:=sinh(alpha*Le); ch1:=cosh(alpha*Le); sh2:=sinh(2*alpha*Le); ch2:=cosh(2*alpha*Le);
    gg:=c2+ch2-2;
    B1:=kf/gg*(sh2+s2); B2:=kf/gg*(sh2-s2); B3:=kf/gg*(ch2-c2);
    B4:=kf/gg*(sh1*s1); B5:=kf/gg*(ch1*s1-sh1*c1); B6:=2*kf/gg*(ch1*s1+sh1*c1);
    D[1,1]:=G*Jt/Le; D[1,2]:=0; D[1,3]:=0; D[1,4]:=0; D[1,5]:=0;
    D[2,1]:=0; D[2,2]:=+B1/alpha; D[2,3]:=-B3/(2*sqr(alpha));
    D[2,4]:=-B6/alpha; D[2,5]:=-2*B4/sqr(alpha);
    D[3,1]:=0; D[3,2]:=D[2,3]; D[3,3]:=+B2/(2*power(alpha,3));
    D[3,4]:=+2*B4/sqr(alpha); D[3,5]:=+B5/power(alpha,3);
    D[4,1]:=0; D[4,2]:=D[2,4]; D[4,3]:=D[3,4]; D[4,4]:=+B1/alpha; D[4,5]:=+B3/(2*sqr(alpha));
    D[5,1]:=0; D[5,2]:=D[2,5]; D[5,3]:=D[3,5]; D[5,4]:=D[4,5]; D[5,5]:=+B2/(2*power(alpha,3));
  end;
End;
  
```

# Schemi di procedure

la procedura Respo : assemblaggio risposta elastica  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$

## Schema procedura Respo

for n := 1 to Ne do

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, l_e); \\ \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} \\ \mathbf{s}_e = \mathbf{s}_a + \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e \\ \mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{A}_e^T \mathbf{s}_e \end{array} \right.$$

## codice graticWinkler.pas (Pascal compiler)

```

Procedure RispostaElastica (var U,S: VECTOR);
var n,i,j: integer;
    c: float;
    eps: array [1..5] of float;
Begin
  FillChar(S^,Sizeof(float)*Neq,0);
  for n:=1 to Ne do
    begin
      Element(n);
      with pA[n], pC do
        begin
          for i:=1 to 5 do
            begin
              c:=0;
              for j:=1 to 6 do
                c:=c+A[i,j]*U^[we[j]];
              eps[i]:=c;
            end;
          for i:=1 to 5 do
            begin
              c:=0;
              for j:=1 to 5 do
                c:=c+D[i,j]*eps[j];
              Se[i]:=c;
            end;
          for i:=1 to 6 do
            if (we[i]<=Na) then
              for j:=1 to 5 do S^[we[i]]:=(S^[we[i]]+A[j,i]*Se[j]);
          end;
        end;
      end;
    end;
End;

```

# Schemi di procedure

la procedura Assem : assemblaggio matrice elastica  $\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e$

## Schema procedura Assem

for n := 1 to Ne do

$$\begin{cases} \text{Elem}(n, \mathbf{A}_e, \mathbf{K}_e, l_e); \\ \mathbf{K} = \mathbf{K} + \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e \end{cases}$$

## codice graticWinkler.pas (Pascal compiler)

```

Procedure MatriceElastica;
var i,j,n,ki,kj: integer;
Begin
  for i:=1 to band do
  begin
    GetMem(St[i],Sizeof(float)*Na);
    FillChar(St[i]^,Sizeof(float)*Na,0);
  end;
  for n:=1 to Ne do
  begin
    Element(n);
    with pC do
    for j:=1 to 6 do
    if (we[j]<=Na) then
    for i:=1 to 6 do
    if (we[i]<=we[j]) then
    for ki:=1 to 5 do for kj:=1 to 5 do
      St[we[j]-we[i]+1]^we[i] :=St[we[j]-we[i]+1]^we[i]
        +D[ki,kj]*A[ki,i]*A[kj,j];
    end;
  end;
End;

```