

# Corso di Meccanica delle Strutture II

Docente: Antonio D. Lanzo (antonio.lanzo@unibas.it)

Scuola di Ingegneria  
Università della Basilicata, Potenza

A.A. 2022/23

Vers. aggiorn. 17 aprile 2023

# Outline

- 1 Introduzione alla Meccanica delle Strutture
- 2 Alcuni concetti di calcolo delle variazioni
  - Variazione di una funzione
  - Funzionale
  - Variazione di un funzionale
  - Stazionarietà di un funzionale
  - Lemma fondamentale del calcolo integrale
- 3 Richiami di meccanica
  - Il problema elasto-statico ( $1^{\circ}$  ordine)
  - Il principio dei lavori virtuali
  - Il principio di minimo della energia potenziale totale
  - Il principio di minimo della energia complementare totale
- 4 Il caso delle strutture intelaiate
  - Il modello di trave
  - Relazioni di equilibrio per la trave
  - Relazioni di congruenza per la trave
  - Relazioni costitutive per la trave
  - Espressione del lavoro e dell'energia
  - Strutture isostatiche
  - Risoluzione cinematiche strutture
- 5 Il metodo delle forze
  - Rappresentazione di strutture iperstatiche
  - Le equazioni di congruenza
  - I passi del metodo delle forze
  - Formulazione condizioni di congruenza
  - Le distorsioni
  - Esempi di applicazioni
- 6 Il metodo delle rigidzze
  - Introduzione
  - Analisi locale / equazioni linea elastica
  - Analisi locale / coefficienti di rigidzza
  - Analisi locale / proprietà matrice rigidzza
  - Analisi globale / trasf. locale  $\rightarrow$  globale
  - Analisi globale / congruenza cinematica
  - Analisi globale / equilibrio
  - Analisi globale / il metodo delle rigidzze
  - Analisi globale / proprietà matrice rigidzza
  - Una applicazione
  - Il vincolo di inestensibilità assiale
  - Soluzione di incastro perfetto
  - Esempi di applicazioni

# Costruzioni e strutture

Interessi e compiti dell'Ingegnere

## gli interessi

L'Ingegnere, nello svolgimento della sua attività professionale, è interessato alla

- **progettazione**
- **costruzione**
- **controllo**

di manufatti (le **costruzioni**) di civile abitazione, ponti e viadotti, edifici industriali, macchine e manufatti industriali (navi, aerei, ecc)



# Costruzioni e strutture

## Interessi e compiti dell'Ingegnere

### gli interessi

L'Ingegnere, nello svolgimento della sua attività professionale, è interessato alla

- **progettazione**
- **costruzione**
- **controllo**

di manufatti (le **costruzioni**) di civile abitazione, ponti e viadotti, edifici industriali, macchine e manufatti industriali (navi, aerei, ecc)

### i compiti dell'Ingegnere sono ...

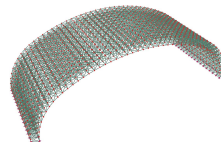
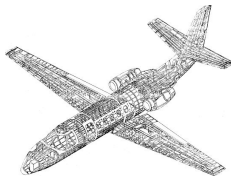
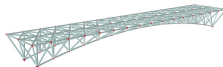
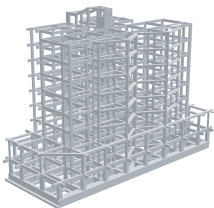
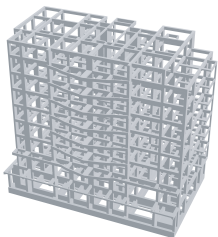
- garantire che tali manufatti possano svolgere senza inconvenienti la funzione loro richiesta (**la funzionalità**)
- che nel corso della costruzione e della vita di esercizio, tali manufatti non comportino rischi inaccettabili sia sul piano dei danni economici che (ancor più) di perdita di vite umane. (**la sicurezza**)

# Costruzioni e strutture

## Struttura e modelli strutturali

### la struttura di un manufatto

- i manufatti, nel corso dell'esercizio, sono soggetti a **forze** (carichi ed azioni esterni) e debbono essere in grado di assorbirli senza inconvenienti;
- a tale scopo nei manufatti, accanto a parti più direttamente legate alla funzione da svolgere, vengono previste in sede di progettazione parti espressamente destinate ad assorbire i carichi
- tale parte è detta **struttura** o **struttura resistente** del manufatto



# Costruzioni e strutture

## Struttura e modelli strutturali

### la struttura di un manufatto

è la parte del manufatto espressamente preposto ad assorbire i carichi agenti

### i modelli strutturali

- è necessario **prevedere** il comportamento delle strutture al fine di verificarne la rispondenza tecnica
  - in fase di **progettazione** , per accertare la validità del progetto,
  - in fase di **collaudo** , per accertare la rispondenza dell'opera eseguita;
- a tal fine l'Ingegnere deve far uso di modelli matematici di rappresentazione del comportamento strutturale, sulla base dei quali procedere alla verifica.

### la Scienza delle Costruzioni ...

... è la disciplina che si occupa dei modelli fisico-matematici e sperimentali che descrivono il comportamento statico e dinamico della struttura resistente di un manufatto e delle sue componenti (elementi strutturali) sotto l'effetto di varie azioni (forze esterne, variazioni termiche, eventi sismici ecc.).

# La scienza delle costruzioni

## la Scienza delle Costruzioni ...

... è la disciplina che si occupa dei modelli fisico-matematici e sperimentali che descrivono il comportamento statico e dinamico della struttura resistente di un manufatto e delle sue componenti (elementi strutturali) sotto l'effetto di varie azioni (forze esterne, variazioni termiche, eventi sismici ecc.).

## la Scienza delle Costruzioni è una scienza applicata ...

... che affonda le sue origini nella meccanica classica.

- è una scienza in quanto procede assumendo dei modelli teorici di comportamento, sulla base di ipotesi il più possibile semplici e logicamente coerenti, e ne esplicita e discute le conseguenze.
- è una scienza applicata in quanto si applica alla modellazione delle strutture portanti delle costruzioni reali, e l'insieme dei suoi costrutti teorici viene giudicato non in base alla sua eleganza formale, ma in base alla efficienza come ausilio e termine di giudizio delle scelte progettuali.

# La scienza delle costruzioni

## la Scienza delle Costruzioni ...

... è la disciplina che si occupa dei modelli fisico-matematici e sperimentali che descrivono il comportamento statico e dinamico della struttura resistente di un manufatto e delle sue componenti (elementi strutturali) sotto l'effetto di varie azioni (forze esterne, variazioni termiche, eventi sismici ecc.).

## la Scienza delle Costruzioni è una scienza applicata ...

## la Scienza delle Costruzioni è un insieme di discipline differenti ...

- di carattere fisico matematico (meccanica analitica, teoria dell'elasticità, meccanica del continuo),
- sperimentale (scienza dei materiali)
- computazionale e numerico (meccanica computazionale, calcolo automatico delle strutture).



# La scienza delle costruzioni

scale e modelli di rappresentazione

Il calcolo e la verifica di una struttura resistente è un lavoro complesso che si sviluppa su diverse scale di modellazione e tenendo conto di diversi modelli di rappresentazione:

## dalla modellazione fine

di dettaglio, ricca nella sua rappresentazione ma limitata alla risoluzione di pochi e particolari problemi, inadatta alla rappresentazione dell'intera struttura (il modello di Cauchy, ad es.);

## alla modellazione sintetica

semplificata, povera localmente ma capace di fornire una rappresentazione d'insieme dell'intera struttura (il modello di trave tecnica, di piastra, ecc.).

## dalla statica delle strutture

## alla dinamica delle strutture

## dalla teoria lineare

dell'elasticità

## alla teoria nonlineare

della plasticità, della stabilità, della frattura, ecc.

# la meccanica delle strutture

modelli strutturali

## la meccanica delle strutture . . .

è la parte della Scienza delle Costruzioni che sviluppa e studia modelli **semplificati** atti a descrivere in modo sintetico lo stato di sollecitazione, deformazione e spostamento delle strutture resistenti dei manufatti.

### travi e telai

I modelli che (per motivi storici e didattici) rivestono maggiore importanza nell'ambito della Scienza delle costruzioni (e della meccanica delle strutture) sono le travi e l'analisi dei telai (assemblaggio di travi).

L'analisi di travi e telai elastici piani sarà l'obbiettivo del presente corso di Meccanica delle Strutture.

### altri modelli strutturali

le funi e le aste di travature reticolari; le membrane; le lastre; le piastre; i gusci.

# la meccanica delle strutture

## modelli e formulazioni

### descrizione di un modello

Dal punto di vista meccanico, ogni modello strutturale (anche semplice) è caratterizzato in modo completo una volta definite le relazioni

- di equilibrio (tra forze esterne e sollecitazioni interne),
- di congruenza cinematica (tra spostamenti e deformazioni)
- di legame costitutivo (che caratterizza il comportamento meccanico del materiale costituente la struttura).

### formulazione di un modello strutturale

L'analisi dei modelli strutturali può essere condotta sulla base di differenti formulazioni delle equazioni di base (equilibrio, congruenza e costitutive) del problema stesso.

- Formulazione differenziale o diretta, mediante scrittura diretta delle equazioni di campo (le equazioni differenziali di equilibrio, congruenza e costitutive) con le relative condizioni al contorno;
- Formulazione integrale, sulla base del principio dei lavori virtuali, mediante la scrittura integrale delle condizioni di equilibrio o di congruenza del problema;
- Formulazione variazionale, ove le condizioni di equilibrio e/o congruenza cinematica sono riscritte in termini di condizioni di stazionarietà di opportuni funzionali.

# la meccanica delle strutture

modelli lineari e modelli nonlineari

## Metodi lineari

il problema strutturale si configura come lineare . . .

- per carichi applicati in modo quasi-statico (assenza di effetti dinamici),
- nell'ipotesi di piccoli spostamenti (assenza di effetti di nonlinearietà geometrica)
- per materiali elasto-lineari (assenza di effetti di nonlinearietà fisica),

## Metodi lineari nel caso delle travi elastiche

Per le travi (telai e travi reticolari) e nel caso del problema lineare le diverse formulazioni sono riconducibili a due ben precise metodologie di analisi che permettono di ottenere l'**esatta soluzione matematica** del problema:

il **metodo delle forze** (o delle flessibilità), dove le incognite del problema sono componenti statiche (le reazioni iperstatiche);

il **metodo degli spostamenti** (o delle rigidità), dove le incognite del problema sono gli spostamenti dei nodi della struttura.

# Corso di Meccanica delle Strutture II

## Obbiettivi e Programma del corso

### Obbiettivi

- Fornire la conoscenza delle metodologie classiche di analisi delle travature elastiche isostatiche ed iperstatiche (metodo delle forze e metodo delle rigidzze), nel quadro semplificato di un problema piano.
- Introdurre lo studente alle tematiche dell'analisi automatica delle strutture presentando e discutendo i rudimenti teorici, le strategie numeriche e le scelte implementative.

### Corsi propedeutici

- Fisica matematica
- Scienza delle Costruzioni.

### Supporti didattici

- A. D. Lanzo, Analisi delle Travature Elastiche: Metodi ed Applicazioni, AracneEditrice, Roma, 2007. (isbn 978-88-548-1162-1)
- appunti dalle lezioni ed esercitazioni
- slides e codici in formato elettronico

## 1 Introduzione alla Meccanica delle Strutture

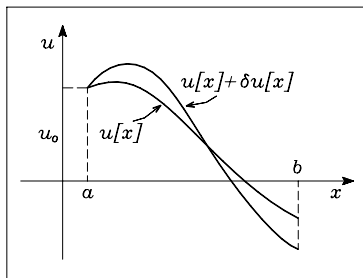
## 2 Alcuni concetti di calcolo delle variazioni

- Variazione di una funzione
- Funzionale
- Variazione di un funzionale
- Stazionarietà di un funzionale
- Lemma fondamentale del calcolo integrale

# Variazione di una funzione

- Sia  $u[x]$  una funzione sufficientemente regolare della variabile  $x$ , definita su un intervallo  $I \equiv [a, b]$  e con valori assegnati sul contorno (p.e.,  $u = u_a$  per  $x = a$ ).
- Consideriamo adesso l'insieme di tutte le funzioni  $u^*[x] = u[x] + \delta u[x]$  definite nello stesso intervallo  $I$ , che

- posseggano le stesse condizioni di regolarità della funzione  $u[x]$ ;
- soddisfino le stesse condizioni al contorno (per l'esempio considerato,  $u^* = u_a$  per  $x = a$ );
- differiscano da questa di valori infinitesimi.



Tale insieme costituisce un intorno infinitesimo *ammissibile* della funzione  $u[x]$ .

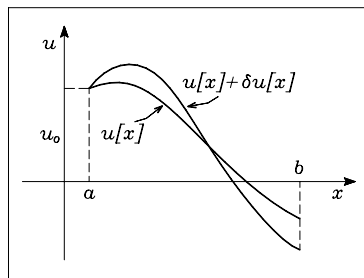
Posto  $u^*[x] = u[x] + \delta u[x]$ , diciamo  $\delta u[x]$  la *variazione* della funzione  $u[x]$ .

# Variazione di una funzione

## Proprietà

Sulla base della definizione  $\delta u[x] = u^*[x] - u[x]$ , la variazione di una funzione:

- rappresenta un incremento infinitesimo della funzione  $u[x]$ .
- è una funzione del tutto generica nell'intervallo  $I$ , con le stesse condizioni di regolarità della funzione  $u[x]$ ;
- presenta condizioni di omogeneità sul contorno vincolato (per l'esempio considerato,  $\delta u = 0$  per  $x = a$ ).





# Variazione di una funzione

## Variazione e differenziale di una funzione

- Il concetto di variazione di una funzione richiama, per somiglianza formale, il concetto di differenziale di una funzione.
- Osserviamo tuttavia che i due concetti hanno un significato diverso:
  - la variazione  $\delta u[x]$  misura, **per ogni valore  $x$** , gli incrementi infinitesimi della funzione assegnata  $u[x]$  rispetto ad una diversa funzione  $u^*[x] = u[x] + \delta u[x]$ ;
  - il differenziale  $du[x]$  misura, **per un assegnato valore di  $x$** , gli incrementi infinitesimi della stessa funzione  $u[x]$  causati da incrementi infinitesimi  $dx$  della variabile indipendente  $x$ , cioè:

$$du[x] = u[x + dx] - u[x] \approx \frac{d}{dx} u[x] dx$$

- È immediato infine dimostrare la invertibilità dell'operatore di variazione con l'operatore di derivazione (e quindi con l'operatore differenziale).

Vale infatti la:

$$\frac{d}{dx}(\delta u[x]) = \frac{d}{dx}(u^*[x] - u[x]) = \left(\frac{d}{dx} u^*[x]\right) - \left(\frac{d}{dx} u[x]\right) = \delta\left(\frac{d}{dx} u[x]\right)$$

la funzione derivata di una variazione è pari alla variazione della funzione derivata.

# Variazione di un campo vettoriale

## Spostamenti virtuali e variazioni

- In meccanica, la **configurazione deformata** di un corpo  $\mathcal{B}$  è descritta dal relativo **campo di spostamento**  $\mathbf{u}[\mathbf{X}]$  dei punti  $\mathbf{X}$  del corpo. Per il continuo di Cauchy,  $\mathbf{u}[\mathbf{X}]$  è una funzione a valori vettoriali di variabile vettoriale  $\mathbf{X}$  e  $\mathcal{B}$  ne rappresenta il relativo dominio.
- E' detta (campo di) **spostamento virtuale** una variazione infinitesima della funzione campo di spostamento  $\delta\mathbf{u}[\mathbf{X}]$ , compatibile con i vincoli assegnati su  $\mathcal{B}$ : essa descrive una configurazione deformata virtuale leggermente modificata nell'intorno della configurazione descritta da  $\mathbf{u}[\mathbf{X}]$ .
- Il differenziale di una funzione vettoriale è descritto dal concetto di gradiente del campo (un tensore del secondo ordine).

$$d\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u} d\mathbf{X}$$

Cioè il gradiente del campo vettoriale è l'equivalente delle derivata nel caso scalare.

- Come nel caso scalare, vale la proprietà di invertibilità tra l'operatore di variazione e l'operatore differenziale: cioè la variazione di un differenziale (di un gradiente) uguaglia il differenziale (il gradiente) della variazione.

$$\delta(\nabla\mathbf{u}) = \nabla(\delta\mathbf{u})$$

## 1 Introduzione alla Meccanica delle Strutture

## 2 Alcuni concetti di calcolo delle variazioni

- Variazione di una funzione
- **Funzionale**
- Variazione di un funzionale
- Stazionarietà di un funzionale
- Lemma fondamentale del calcolo integrale

# Funzionale

## Definizione di funzionale

Dicesi **funzionale** una funzione  $I[u]$  a valori reali avente come argomento un'altra funzione  $u[x]$ .

Per esempio,

è un funzionale l'integrale definito

$$I[u] = \int_a^b (u[x])^2 dx$$

dove  $u[x]$  è una funzione sufficientemente regolare definita nell'intervallo  $[a, b]$ : esso associa ad ogni funzione  $u[x]$  un numero reale.

Per esempio,

In generale, rientra nella definizione di funzionale un integrale del tipo

$$I[u] = \int_a^b F[x, u, u', u'', \dots] dx$$

dove il termine integrando dipende dalla funzione  $u[x]$  e dalle sue derivate successive  $u'[x], u''[x], \dots$ .

# Funzionale

Più in generale ...

## Definizione di funzionale

Dicesi **funzionale** una funzione  $I[u, v, \dots]$  a valori reali il cui argomento è un insieme di funzioni  $\{u[x, y, \dots], v[x, y, \dots], \dots\}$  definite in un opportuno dominio.

Per esempio,

In generale, rientra nella definizione di funzionale un integrale del tipo

$$I[u, v, \dots] = \int_a^b F[x, u, u', u'', \dots, v, v', v'', \dots] dx$$

dove il termine integrando dipende dalle due funzioni ( $u[x], v[x]$ ) e dalle loro derivate successive.

In meccanica, un esempio di funzionale è l'energia di deformazione di un corpo.

## 1 Introduzione alla Meccanica delle Strutture

## 2 Alcuni concetti di calcolo delle variazioni

- Variazione di una funzione
- Funzionale
- **Variazione di un funzionale**
- Stazionarietà di un funzionale
- Lemma fondamentale del calcolo integrale

# Variazione di un funzionale

- La variazione della funzione argomento di un funzionale altera i valori del funzionale
- L'entità dell'alterazione  $\Delta I = I[u + \delta u] - I[u]$  dipende ovviamente dal valore della variazione  $\delta u$

La **variazione di un funzionale** approssima, nei termini infinitesimi lineari in  $\delta u$ , l'alterazione  $\Delta I[u]$ , cioè

$$\Delta I[u, \delta u] = I[u + \delta u] - I[u] = \delta I[u] + O(\|\delta u\|^2)$$

In termini più formali:

**Definizione 1** (in termini della derivata di Fréchet)

$$\delta I[u] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I[u + \epsilon \delta u] - I[u]}{\epsilon}$$

**Definizione 2** (in termini della derivata direzionale di Gateaux)

$$\delta I[u] = \left| \frac{\partial}{\partial \epsilon} I[u + \epsilon \delta u] \right|_{\epsilon=0}$$

- Le definizioni sono equivalenti in condizioni di sufficiente regolarità del funzionale
- La seconda definizione è più conveniente da un punto di vista operativo

# Variazione di un funzionale

Un approccio operativo

Definizione più conveniente da un punto di vista operativo

$$\delta I[u] = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} I[u + \epsilon \delta u] \right|_{\epsilon=0}$$

## Esempio

- Consideriamo un funzionale del tipo  $I[u] = \int_a^b F[x, u, u'] dx$
- Sia  $\delta u[x]$  la variazione della funzione e  $\delta u'[x] = \frac{\partial}{\partial x} \delta u[x]$  la variazione della sua derivata



# Variazione di un funzionale

## Un approccio operativo

### Definizione più conveniente da un punto di vista operativo

$$\delta I[u] = \left| \frac{\partial}{\partial \epsilon} I[u + \epsilon \delta u] \right|_{\epsilon=0}$$

### Esempio

- $I[u] = \int_a^b F[x, u, u'] dx$  .  $\delta u'[x] = \frac{\partial}{\partial x} \delta u[x]$
- Il calcolo della variazione del funzionale si riduce semplicemente sulla base degli sviluppi:

$$\begin{aligned} I[u + \epsilon \delta u] &\equiv \int_a^b F[x, u + \epsilon \delta u, u' + \epsilon \delta u'] dx \\ \frac{\partial}{\partial \epsilon} I[u + \epsilon \delta u] &\equiv \int_a^b \frac{\partial}{\partial \epsilon} F[x, u + \epsilon \delta u, u' + \epsilon \delta u'] dx \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial u} F[x, u + \epsilon \delta u, u' + \epsilon \delta u'] \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon} (u + \epsilon \delta u) + \frac{\partial}{\partial u'} F[x, u + \epsilon \delta u, u' + \epsilon \delta u'] \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon} (u' + \epsilon \delta u') \right) dx \\ \left| \frac{\partial}{\partial \epsilon} I[u + \epsilon \delta u] \right|_{\epsilon=0} &= \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial u} F[x, u, u'] \cdot \delta u + \frac{\partial}{\partial u'} F[x, u, u'] \cdot \delta u' \right) dx \end{aligned}$$

$$\delta I[u] = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \right\} dx$$

- Si osservi che le operazioni connesse alla variazione di un funzionale sono analoghe formalmente a quelle di derivazione dello stesso.

# Variazione di un funzionale

## Un esempio

Definizione più conveniente da un punto di vista operativo

$$\delta I[u] = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} I[u + \epsilon \delta u] \right|_{\epsilon=0}$$

## Esempio

- $I[u] = \int_a^b F[x, u, u'] dx$  ,  $\delta I[u] = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \right\} dx$
- Esempio:

$$I[u] = \int_a^b \underbrace{(u^2 + u_{,x}^3)}_{F[u, u']} dx$$

$$\Rightarrow \delta I[u] = \int_a^b \left( \underbrace{\frac{\partial}{\partial u} (u^2 + u_{,x}^3)}_{\frac{\partial F}{\partial u}} \delta u + \underbrace{\frac{\partial}{\partial u_{,x}} (u^2 + u_{,x}^3)}_{\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}} \delta u_{,x} \right) dx$$

$$= \int_a^b \left( \underbrace{2u}_{\frac{\partial F}{\partial u}} \delta u + \underbrace{3u_{,x}^2}_{\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}} \delta u_{,x} \right) dx$$

# Variazione di un funzionale

## Un esempio

Definizione più conveniente da un punto di vista operativo

$$\delta I[u] = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} I[u + \epsilon \delta u] \right|_{\epsilon=0}$$

## Esempio

- $I[u, v, \dots] = \int_a^b F[x, u, u', u'', \dots, v, v', v'', \dots] dx$

$$\delta I[u, v] = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial F}{\partial u''} \delta u'' + \dots + \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial F}{\partial v''} \delta v'' + \dots \right\} dx$$

- Esempio:

$$I[u] = \int_a^b \underbrace{(u^2 v_{,x} + u_{,x}^3 v_{,x}^4 + v_{,xx}^3)}_{F[u, u', v', v'']} dx$$

$$\Rightarrow \delta I[u] = \int_a^b \left( \underbrace{2u v_{,x}}_{\frac{\partial F}{\partial u}} \delta u + \underbrace{3u_{,x}^2 v_{,x}^4}_{\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}} \delta u_{,x} + \underbrace{(u^2 + 4u_{,x}^3 v_{,x}^3)}_{\frac{\partial F}{\partial v_{,x}}} \delta v_{,x} + \underbrace{3v_{,xx}^2}_{\frac{\partial F}{\partial v_{,xx}}} \delta v_{,xx} \right) dx$$

# Variazioni successive di un funzionale

## Una rappresentazione sintetica

- La variazione  $\delta I$  di un funzionale  $I[u]$  è a sua volta un funzionale legato alla funzione  $u[x]$  e alla variazione  $\delta u[x]$

$$\delta I = \delta I[u, \delta u]$$

- Per definizione, la dipendenza da  $\delta u$  è lineare
- Possiamo usare un formalismo sintetico di rappresentazione della variazione del funzionale per sottolineare tali peculiarità e parleremo in modo più preciso di **variazione prima** del funzionale.

$$\delta I[u, \delta u] \equiv I'[u] \delta u$$

- Essendo  $I'[u] \delta u$  un funzionale, possiamo pensare alla variazione di esso rispetto ad una nuova variazione  $\dot{u}[x]$  della funzione  $u[x]$  e parleremo di **variazione seconda** del funzionale
- Il formalismo utilizzato rende semplice la rappresentazione della variazione seconda mediante

$$I''[u] \dot{u} \delta u$$

- Con le stesse considerazioni possiamo arrivare a definire la variazione terza, quarta e successive del funzionale  $I[u]$ , rappresentandole mediante

$$I'''[u] \hat{u} \dot{u} \delta u, \quad I''''[u] \tilde{u} \hat{u} \dot{u} \delta u, \dots$$

# Variazioni successive di un funzionale

## Un esempio

- **variazione prima** del funzionale  $I'[u]\delta u$
- **variazione seconda** del funzionale  $I''[u] \hat{u} \delta u$
- **variazione terza** del funzionale  $I'''[u] \hat{u} \hat{u} \delta u$

### Esempio

● .

$$I[u] = \int_a^b \underbrace{(u^2 + u_{,x}^3)}_{F[u, u']} dx$$

$$I'[u]\delta u = \int_a^b \left( \underbrace{2u \delta u}_{\frac{\partial F}{\partial u} \delta u} + \underbrace{3u_{,x}^2 \delta u_{,x}}_{\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} \delta u_{,x}} \right) dx$$

# Variazioni successive di un funzionale

## Un esempio

- **variazione prima** del funzionale  $I'[u]\delta u$
- **variazione seconda** del funzionale  $I''[u]\dot{u}\delta u$
- **variazione terza** del funzionale  $I'''[u]\hat{u}\dot{u}\delta u$

### Esempio

- .

$$I[u] = \int_a^b (u^2 + u_{,x}^3) dx$$

$$I'[u]\delta u = \int_a^b \underbrace{(2u\delta u + 3u_{,x}^2\delta u_{,x})}_{G[u,u']} dx$$

$$I''[u]\dot{u}\delta u = \int_a^b \left( \underbrace{2\dot{u}\delta u}_{\frac{\partial G}{\partial u}\dot{u}} + \underbrace{6u_{,x}\dot{u}_{,x}\delta u_{,x}}_{\frac{\partial G}{\partial u_{,x}}\dot{u}_{,x}} \right) dx$$

# Variazioni successive di un funzionale

## Un esempio

- **variazione prima** del funzionale  $I'[u]\delta u$
- **variazione seconda** del funzionale  $I''[u]\hat{u}\delta u$
- **variazione terza** del funzionale  $I'''[u]\hat{u}\hat{u}\delta u$

### Esempio

●

$$I[u] = \int_a^b (u^2 + u_{,x}^3) dx$$

$$I'[u]\delta u = \int_a^b (2u\delta u + 3u_{,x}^2\delta u_{,x}) dx$$

$$I''[u]\hat{u}\delta u = \int_a^b \underbrace{(2\hat{u}\delta u + 6u_{,x}\hat{u}_{,x}\delta u_{,x})}_{H[u']} dx$$

$$I'''[u]\hat{u}\hat{u}\delta u = \int_a^b \underbrace{(6\hat{u}_{,x}\hat{u}_{,x}\delta u_{,x})}_{\frac{\partial H}{\partial u_{,x}}\hat{u}_{,x}} dx$$

## 1 Introduzione alla Meccanica delle Strutture

## 2 Alcuni concetti di calcolo delle variazioni

- Variazione di una funzione
- Funzionale
- Variazione di un funzionale
- **Stazionarietà di un funzionale**
- Lemma fondamentale del calcolo integrale



# Condizioni di estremo di un funzionale

In Meccanica giocano un ruolo cruciali le **condizioni di stazionarietà** di un funzionale  $I[u]$

## Condizione di stazionarietà di un funzionale

Un funzionale  $I[u]$  è stazionario per un certo valore della funzione  $u_o[x]$  della funzione  $u[x]$  se e solo se sono nulle in  $u_o[x]$  le derivate direzionali del funzionale per ogni direzione  $\delta u$

$$I'[u_o]\delta u = 0, \quad \forall \delta u$$

In altri termini, il funzionale  $I[u]$  è stazionario in  $u_o[x]$  se e solo se è nulla la variazione prima del funzionale per ogni variazione  $\delta u$

## Condizione di minimo e di massimo

Al fine di decidere se la condizione di stazionarietà corrisponda ad un punto di massimo, di minimo o di sella per il funzionale, bisogna esaminare la variazione successiva del funzionale stesso:

**p. di minimo** se  $I''[u]\dot{u}\delta u > 0, \quad \forall \dot{u}, \quad \forall \delta u$

**p. di massimo** se  $I''[u]\dot{u}\delta u < 0, \quad \forall \dot{u}, \quad \forall \delta u$

**p. di sella** se  $I''[u]\dot{u}\delta u = 0, \quad \forall \dot{u}, \quad \forall \delta u$

## 1 Introduzione alla Meccanica delle Strutture

## 2 Alcuni concetti di calcolo delle variazioni

- Variazione di una funzione
- Funzionale
- Variazione di un funzionale
- Stazionarietà di un funzionale
- Lemma fondamentale del calcolo integrale

# Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni

Nella formulazione integrale delle equazioni della meccanica, ed in particolare nel Principio dei Lavori Virtuali, riveste un ruolo essenziale il ...

## Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni

Sia  $\psi[x]$  una funzione sufficientemente regolare definita in un intervallo  $I \equiv [a, b]$ .

Se vale

$$\int_a^b \psi[x] \eta[x] dx = 0, \quad \forall \eta[x] \in I$$

per ogni funzione sufficientemente regolare  $\eta[x]$  nell'intervallo  $I$ ,

allora vale:

$$\psi[x] = 0$$

## Parte II

# Richiami di meccanica: il problema elastico

### 3 Richiami di meccanica

- Il problema elasto-statico (1° ordine)
- Il principio dei lavori virtuali
- Il principio di minimo della energia potenziale totale
- Il principio di minimo della energia complementare totale

### 4 Il caso delle strutture intelaiate

- Il modello di trave
- Relazioni di equilibrio per la trave
- Relazioni di congruenza per la trave
- Relazioni costitutive per la trave
- Espressione del lavoro e dell'energia
- Strutture isostatiche
- Risoluzione cinematiche strutture

# I termini del problema statico

## Alcune definizioni

Ci riferiamo nel seguito ad un generico sistema meccanico continuo in condizioni statiche per il quale indichiamo con

- $\mathcal{B}$ , il dominio geometrico della sua configurazione iniziale indeformata;
- $\partial_u \mathcal{B}$  e  $\partial_f \mathcal{B}$  le parti vincolare e libere della sua frontiera;
- $\bar{\mathbf{u}}$  i cedimenti assegnati su  $\partial_u \mathcal{B}$ ;
- $\mathbf{u}$  gli spostamenti che descrivono i cambiamenti di configurazione del sistema;
- $\epsilon$  le deformazioni interne del sistema;
- $(\mathbf{q}, \mathbf{f})$  le forze esterne distribuite sul dominio e applicate sulla parte  $\partial_f \mathcal{B}$  della frontiera;
- $\boldsymbol{\sigma}$  le tensioni interne del sistema.

## Le relazioni

La definizione meccanica del sistema è completata dalla scrittura delle relazioni di:

**congruenza geometrica** tra i descrittori cinematici  $\{\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}, \epsilon\}$  (spostamenti e deformazioni interne)

**equilibrio statico** tra i descrittori statici  $\{\mathbf{q}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\sigma}\}$  (forze e tensioni interne);

**legame costitutivo** che caratterizza il comportamento del materiale costituente il sistema, convenientemente espresso in termini dello stato di tensione  $\boldsymbol{\sigma}$  e di deformazione  $\epsilon$  nei punti interni del corpo;

# Il problema statico

Dati, incognite, relazioni

## i dati del problema

Per assegnati carichi e cedimenti  $\{\mathbf{q}, \mathbf{f}, \bar{\mathbf{u}}\}, \dots$

## le incognite del problema

... valutare la risposta della struttura in termini di spostamenti, deformazioni e tensioni  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}\} \dots$

## le relazioni del problema

... che realizzi le relazioni di:

**congruenza geometrica** tra i descrittori cinematici  $\{\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\epsilon}\}$  (spostamenti e deformazioni interne)

**equilibrio statico** tra i descrittori statici  $\{\mathbf{q}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\sigma}\}$  (forze e tensioni interne);

**legame costitutivo**  $\boldsymbol{\sigma} = f[\boldsymbol{\epsilon}]$ ;

# Il problema statico

Le nonlinearità del problema statico

i dati del problema:  $\{\mathbf{q}, \mathbf{f}, \bar{\mathbf{u}}\}$ ,

le incognite del problema:  $\{\mathbf{u}, \epsilon, \sigma\}$

## le relazioni del problema

congruenza geometrica tra i descrittori cinematici  $\{\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}, \epsilon\}$  del sistema

equilibrio statico tra i descrittori statici  $\{\mathbf{q}, \mathbf{f}, \sigma\}$ ;

legame costitutivo  $\sigma = f[\epsilon]$ ;

## nonlinearità geometriche

- le relazioni cinematiche tra deformazioni  $\epsilon$  e spostamenti  $\mathbf{u}$  sono sempre nonlineari
- le relazioni di equilibrio vanno scritte nella configurazione finale deformata, a priori incognita

## nonlinearità fisiche

- in presenza di un comportamento nonlineare del materiale, le relazioni costitutive  $\sigma = f[\epsilon]$  riflettono tale nonlinearità



# Ipotesi di piccoli spostamenti

Teoria del 1° ordine

## assunzione di piccoli spostamenti

Spostamenti sufficientemente piccoli

- tali da rendere lineari le relazioni cinematiche tra deformazioni  $\epsilon$  e spostamenti  $\mathbf{u}$
- e tali da poter approssimare, ai fini della scrittura delle relazioni di equilibrio, la configurazione deformata con la configurazione indeformata iniziale

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti, le relazioni di congruenza cinematica e di equilibrio sono riconducibili alle seguenti forme differenziali **lineari**:

**congruenza geometrica** :

$$\epsilon = \mathbf{D} \mathbf{u} \quad , \quad \text{su } \mathcal{B} \quad \parallel \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad , \quad \text{su } \partial_u \mathcal{B}$$

( $\mathbf{D}$  rappresenta un opportuno operatore differenziale lineare)

per il continuo di Cauchy:

$$\epsilon \approx \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})$$

**equilibrio statico** :

$$\mathbf{D}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad , \quad \text{su } \mathcal{B} \quad \parallel \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad , \quad \text{su } \partial_f \mathcal{B}$$

( $\mathbf{D}^t$  rappresenta un opportuno operatore differenziale lineare ed  $\mathbf{n}$  la normale alla frontiera)

per il continuo di Cauchy:

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

# Formulazione differenziale del problema statico

## le equazioni di campo

Il problema statico è espresso da equazioni differenziali di campo

$$\text{su } \mathcal{B} \begin{cases} \mathbf{D}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q} = 0 & \text{equilibrio} \\ \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u} & \text{congruenza} \\ \boldsymbol{\sigma} = f[\boldsymbol{\epsilon}] & \text{rel. costitutive} \end{cases}$$

## le condizioni al contorno

... e dal rispetto delle condizioni al contorno:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad , \quad \text{su } \partial_f \mathcal{B} \quad (\text{equilibrio}) \quad \parallel \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad , \quad \text{su } \partial_u \mathcal{B} \quad (\text{congruenza})$$

## il problema elasto-lineare

- Si parla di **problema elasto-lineare** nel caso di materiale elasto-lineare con  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}$ , dove  $\mathbf{E}$  è l'operatore dei coefficienti elastici
- Sotto opportune ipotesi di regolarità, si dimostra che il problema elasto-lineare ammette soluzione e che tale soluzione è unica (**esistenza e unicità**).

# Formulazione differenziale del problema statico

## le equazioni di campo

Il problema statico è espresso da equazioni differenziali di campo

$$\text{su } \mathcal{B} \begin{cases} \mathbf{D}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q} = 0 & \text{equilibrio} \\ \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u} & \text{congruenza} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon} & \text{rel. costitutive} \end{cases}$$

## le condizioni al contorno

... e dal rispetto delle condizioni al contorno:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad , \quad \text{su } \partial_f \mathcal{B} \quad (\text{equilibrio}) \quad \parallel \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad , \quad \text{su } \partial_u \mathcal{B} \quad (\text{congruenza})$$

## il problema elasto-lineare

- Si parla di **problema elasto-lineare** nel caso di materiale elasto-lineare con  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}$ , dove  $\mathbf{E}$  è l'operatore dei coefficienti elastici
- Sotto opportune ipotesi di regolarità, si dimostra che il problema elasto-lineare ammette soluzione e che tale soluzione è unica (**esistenza e unicità**).

# Formulazione differenziale del problema statico

## le equazioni di campo

Il problema statico è espresso da equazioni differenziali di campo

$$\text{su } \mathcal{B} \begin{cases} \mathbf{D}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q} = 0 & \text{equilibrio} \\ \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u} & \text{congruenza} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon} & \text{rel. costitutive} \end{cases}$$

## le condizioni al contorno

... e dal rispetto delle condizioni al contorno:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad , \quad \text{su } \partial_f \mathcal{B} \quad (\text{equilibrio}) \quad \parallel \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad , \quad \text{su } \partial_u \mathcal{B} \quad (\text{congruenza})$$

## il problema elasto-lineare

- Si parla di **problema elasto-lineare** nel caso di materiale elasto-lineare con  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}$ , dove  $\mathbf{E}$  è l'operatore dei coefficienti elastici
- Sotto opportune ipotesi di regolarità, si dimostra che il problema elasto-lineare ammette soluzione e che tale soluzione è unica (**esistenza e unicità**).

# Formulazione integrale del problema statico

## Il Principio dei lavori virtuali

- Altre formulazioni del problema statico sono possibili, sulla base di una diversa scrittura delle equazioni del problema.
- Il **Principio dei Lavori Virtuali** si inquadra in una formulazione integrale del problema statico.

### Il principio dei lavori virtuali ...

si basa sull'*equazione dei lavori virtuali*, cioè sull'uguaglianza tra l.v. interno ed esterno,

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2 \, dv = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, dv + \int_{\partial_f \mathcal{B}} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, ds + \int_{\partial_u \mathcal{B}} (\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 \, ds$$

### in corrispondenza:

- di un generico sistema di tensioni  $\boldsymbol{\sigma}_1$  in equilibrio con un generico sistema di carichi  $(\mathbf{q}_1, \mathbf{f}_1)$
- e di un generico sistema di spostamenti  $\mathbf{u}_2$  congruente con deformazioni interne  $\boldsymbol{\epsilon}_2$  e con un sistema di cedimenti  $\bar{\mathbf{u}}_2$ :

dove

$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2 \, dv$  è il l.v.i. compiuto dalle tensioni  $\boldsymbol{\sigma}_1$  per le deformazioni  $\boldsymbol{\epsilon}_2$ ;

$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, dv + \int_{\partial_f \mathcal{B}} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, ds$  è il l.v.e. compiuto dalle forze  $(\mathbf{q}_1, \mathbf{f}_1)$  per gli spostamenti  $\mathbf{u}_2$ ;

$\int_{\partial_u \mathcal{B}} (\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 \, ds$  è il l.v.e. compiuto dalle reazioni vincolari  $(\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n})$  per i cedimenti  $\bar{\mathbf{u}}_2$ .

# Formulazione integrale del problema statico

## Il Principio dei lavori virtuali

- Altre formulazioni del problema statico sono possibili, sulla base di una diversa scrittura delle equazioni del problema.
- Il **Principio dei Lavori Virtuali** si inquadra in una formulazione integrale del problema statico.

### Il principio dei lavori virtuali ...

si basa sull'*equazione dei lavori virtuali*, cioè sull'uguaglianza tra l.v. interno ed esterno,

$$\int_B \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2 \, dv = \int_B \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, dv + \int_{\partial_f B} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, ds + \int_{\partial_u B} (\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 \, ds$$

### in corrispondenza:

- di un generico sistema di tensioni  $\boldsymbol{\sigma}_1$  in equilibrio con un generico sistema di carichi  $(\mathbf{q}_1, \mathbf{f}_1)$
- e di un generico sistema di spostamenti  $\mathbf{u}_2$  congruente con deformazioni interne  $\boldsymbol{\epsilon}_2$  e con un sistema di cedimenti  $\bar{\mathbf{u}}_2$ :

Il principio dei lavori virtuali permette di esprimere in forma integrale sia le condizioni di equilibrio che di congruenza di un sistema meccanico.

# Il Principio dei lavori virtuali

Formulazione integrale delle equazioni di equilibrio del problema statico

Il principio dei lavori virtuali permette di esprimere in forma integrale le condizioni di equilibrio.

Nella scrittura delle condizioni di equilibrio si fa uso di una variazione del campo di spostamenti  $\delta \mathbf{u}$  (il sistema virtuale), per fissati valori di cedimento  $\bar{\mathbf{u}}$  sul contorno vincolato  $\partial_u \mathcal{B}$ :

- la congruenza cinematica delle deformazioni interne

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad , \quad \text{su } \mathcal{B}$$

comporta che sussista la seguente relazione di congruenza tra la variazione del campo di deformazione e la variazione del campo di spostamento che le produce,

$$\delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D} \delta \mathbf{u} \quad , \quad \text{su } \mathcal{B}$$

- il rispetto delle condizioni cinematiche al contorno,

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad , \quad \text{su } \partial_u \mathcal{B}$$

richiede che la variazione del campo di spostamento sia nullo su  $\partial_u \mathcal{B}$

$$\delta \mathbf{u} = 0 \quad , \quad \text{su } \partial_u \mathcal{B}$$

# Il Principio dei lavori virtuali

Formulazione integrale delle equazioni di equilibrio del problema statico

Il principio dei lavori virtuali permette di esprimere in forma integrale le condizioni di equilibrio.

Nella scrittura delle condizioni di equilibrio si fa uso di una variazione del campo di spostamenti  $\delta \mathbf{u}$  (il sistema virtuale), per fissati valori di cedimento  $\bar{\mathbf{u}}$  sul contorno vincolato  $\partial_u \mathcal{B}$

- le condizioni di congruenza per  $\delta \mathbf{u}$ :

$$\delta \epsilon = \mathbf{D} \delta \mathbf{u} \quad , \quad \text{su } \mathcal{B} \quad \parallel \quad \delta \mathbf{u} = 0 \quad , \quad \text{su } \partial_u \mathcal{B}$$

Equilibrio (principio degli spostamenti virtuali)

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \underbrace{\boldsymbol{\epsilon}_2}_{\delta \epsilon = \mathbf{D} \delta \mathbf{u}} dv = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \underbrace{\mathbf{u}_2}_{\delta \mathbf{u}} dv + \int_{\partial_f \mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \underbrace{\mathbf{u}_2}_{\delta \mathbf{u}} ds + \int_{\partial_u \mathcal{B}} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \underbrace{\bar{\mathbf{u}}_2}_{\delta \mathbf{u} = 0} ds$$

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \epsilon dv = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{u} dv + \int_{\partial_f \mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} ds \quad , \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

*Scritta* per ogni variazione possibile del campo di spostamenti  $\delta \mathbf{u}$  (il sistema virtuale) compatibile cinematicamente

*l'equazione dei lavori virtuali* nella forma degli spostamenti virtuali

*... impone l'equilibrio* tra il campo delle tensioni interne  $\boldsymbol{\sigma}$  e il sistema delle forze esterne  $\{\mathbf{q}, \mathbf{f}\}$ .



# Il Principio dei lavori virtuali

Formulazione integrale delle equazioni di congruenza del problema statico

Il principio dei lavori virtuali permette di esprimere in forma integrale le condizioni di congruenza.

Nella scrittura delle condizioni di congruenza si fa uso di una variazione del campo di tensioni  $\delta\sigma$  (il sistema virtuale), per fissati valori dei carichi  $\{\mathbf{q}, \mathbf{f}\}$ :

- il rispetto delle condizioni di equilibrio con i dati carichi  $\{\mathbf{q}, \mathbf{f}\}$

$$\mathbf{D}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q} = 0 \quad \parallel \quad \mathbf{D}^t (\boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{q} = 0 \quad , \quad \text{su } \mathcal{B}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad \parallel \quad (\boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad , \quad \text{su } \partial_f \mathcal{B}$$

comporta che la variazione delle tensioni siano in equilibrio con valori nulli dei carichi (**autotensioni**)

$$\mathbf{D}^t \delta\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad , \quad \text{su } \mathcal{B} \quad \parallel \quad \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad , \quad \text{su } \partial_f \mathcal{B}$$

# Il Principio dei lavori virtuali

Formulazione integrale delle equazioni di congruenza del problema statico

Il principio dei lavori virtuali permette di esprimere in forma integrale le condizioni di congruenza.

Nella scrittura delle condizioni di congruenza si fa uso di una variazione del campo di tensioni  $\delta\sigma$  (il sistema virtuale), per fissati valori dei carichi  $\{\mathbf{q}, \mathbf{f}\}$ :

- le condizioni di equilibrio per  $\delta\sigma$ :

$$\mathbf{D}^t \delta\sigma = 0 \quad , \quad \text{su } \mathcal{B} \quad \parallel \quad \delta\sigma \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad , \quad \text{su } \partial_f \mathcal{B}$$

Congruenza (principio delle forze virtuali)

$$\int_{\mathcal{B}} \underbrace{\sigma_1}_{\delta\sigma} \cdot \epsilon \, dv = \int_{\mathcal{B}} \underbrace{\mathbf{q}_1}_{\delta\mathbf{q}=0} \cdot \mathbf{u} \, dv + \int_{\partial_f \mathcal{B}} \underbrace{\mathbf{f}_1}_{\delta\mathbf{f}=0} \cdot \mathbf{u} \, ds + \int_{\partial_u \mathcal{B}} \underbrace{(\sigma_1 \mathbf{n})}_{\delta\sigma} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, ds$$

$$\int_{\mathcal{B}} \delta\sigma \cdot \epsilon \, dv = \int_{\partial_u \mathcal{B}} (\delta\sigma \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \, ds \quad , \quad \forall \delta\sigma$$

*Scritta* per ogni variazione possibile del campo tensionale  $\delta\sigma$  (il sistema virtuale), nel rispetto delle condizioni di equilibrio

*l'equazione dei lavori virtuali* nella forma complementare o delle forze virtuali

*... impone la congruenza* tra spostamenti, cedimenti e deformazioni  $\{\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}, \epsilon\}$ .

# Il Principio dei lavori virtuali

Formulazione integrale delle equazioni di equilibrio e congruenza del problema statico

Il principio dei lavori virtuali permette di esprimere in forma integrale sia le condizioni di equilibrio che di congruenza di un sistema meccanico.

Equilibrio (principio degli spostamenti virtuali)

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon} \, dv = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv + \int_{\partial_f \mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds, \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

Congruenza (principio delle forze virtuali)

$$\int_{\mathcal{B}} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \, dv = \int_{\partial_u \mathcal{B}} (\delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \, ds, \quad \forall \delta \boldsymbol{\sigma}$$

- Si osservi che il principio dei lavori virtuali non richiede, a questo livello, nessun legame costitutivo tra il sistema delle forze e degli spostamenti.
- Esso è pertanto valido per qualsiasi materiale, e quindi anche per materiale elasto-plastico.
- Nella forma degli spostamenti virtuali (equilibrio), il principio dei lavori virtuali continua ad essere valido anche in assenza dell'ipotesi di piccoli spostamenti (le strutture snelle).

# Formulazione variazionale del problema elasto-statico

- Parliamo di formulazione variazionale di un problema quando è possibile definire un funzionale nelle incognite del problema stesso tale che la relativa condizione di stazionarietà sia rappresentativa delle relazioni del problema.
- L'approccio variazionale è fondamentale . . .
  - sia per un'analisi qualitativa della soluzione (esistenza, unicità, stabilità),
  - sia a fini quantitativi, per la ricerca della soluzione, in particolare nella **ricerca di soluzioni approssimate** sulla base dello sviluppo di tecniche di discretizzazione come quella ben nota del **metodo agli elementi finiti**.
- Per il problema elasto-statico è possibile generare una vasta gamma di possibili formulazioni variazionali . . .
  - nell'ambito della teoria del 1° ordine
  - per materiali elasto-lineari per i quali è definita una energia di deformazione
  - per carichi conservativi, cioè per i quali esiste una energia potenziale.
- Richiederemo nel seguito le due formulazioni variazionali del
  - *Principio di minimo della energia potenziale totale*
  - *Principio di minimo della energia complementare totale*.

# Formulazione variazionale del problema elasto-statico

## Principio di minimo della energia potenziale totale

### enunciato

*Tra tutti i campi di spostamenti  $\mathbf{u}$  compatibili con i vincoli cinematici, la soluzione del problema elastico è quella che minimizza il funzionale dell'energia potenziale totale del sistema*

$$\Pi[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\epsilon}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}[\mathbf{u}] dv - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} dv - \int_{\partial_f \mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} ds = \min_u$$

dove:

- $\Phi[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\epsilon}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}[\mathbf{u}] dv$  indica l'energia di deformazione del sistema (cioè l'energia accumulata internamente dal sistema durante il processo deformativo);
- $-pu = - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} dv - \int_{\partial_f \mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} ds$  è l'energia potenziale dei carichi esterni, lineare nel campo di spostamenti

# Formulazione variazionale del problema elasto-statico

## Principio di minimo della energia potenziale totale

### enunciato

Tra tutti i campi di spostamenti  $\mathbf{u}$  compatibili con i vincoli cinematici, la soluzione del problema elastico è quella che minimizza il funzionale dell'energia potenziale totale del sistema

$$\Pi[\mathbf{u}] = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\epsilon}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}[\mathbf{u}] dv - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} dv - \int_{\partial_f \mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} ds}_{\Phi[\mathbf{u}] - p\mathbf{u}} = \min_{\mathbf{u}}$$

- E' una scrittura del problema nelle sole variabili cinematiche di spostamento.
- Si assumono a priori realizzate le condizioni di compatibilità cinematica e il legame costitutivo elastico elasto-lineare  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon}$
- La condizione di stazionarietà del funzionale  $\Pi[\mathbf{u}]$

$$\Pi' \delta \mathbf{u} = \Phi' \delta \mathbf{u} - p \delta \mathbf{u} \equiv \int_{\mathcal{B}} \underbrace{(\mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon}[\mathbf{u}])}_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon} dv - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{u} dv - \int_{\partial_f \mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} ds = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

- La condizione di stazionarietà risulta anche di minimo, essendo per definizione positiva l'energia di deformazione del sistema

# Formulazione variazionale del problema elasto-statico

Principio di minimo della energia complementare totale

## enunciato

*Tra tutti i campi di tensione equilibrati con i carichi, la soluzione del problema elastico è quella che minimizza il funzionale dell'energia complementare totale del sistema*

$$\Pi_c[\boldsymbol{\sigma}] = \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, dv - \int_{\partial_u B} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \, ds = \min_{\boldsymbol{\sigma}}$$

dove:

- $\Phi[\boldsymbol{\sigma}] = \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, dv$  indica l'energia di deformazione del sistema in forma complementare, cioè in termini dello tensioni interne;
- $\int_{\partial_u B} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \, ds$  è il lavoro compiuto sulla parte di frontiera vincolata  $\partial_u B$  dalle reazioni dei vincoli  $(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})$  per i cedimenti assegnati  $\bar{\mathbf{u}}$ .

# Formulazione variazionale del problema elasto-statico

Principio di minimo della energia complementare totale

## enunciato

*Tra tutti i campi di tensione equilibrati con i carichi, la soluzione del problema elastico è quella che minimizza il funzionale dell'energia complementare totale del sistema*

$$\Pi_c[\boldsymbol{\sigma}] = \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} dv - \int_{\partial_u B} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} ds = \min_{\boldsymbol{\sigma}}$$

- E' una scrittura del problema nelle sole variabili statiche interne  $\boldsymbol{\sigma}$ .
- Si assumono a priori realizzate le condizioni di equilibrio con i carichi esterni e il legame costitutivo elastico elasto-lineare  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon}$
- La condizione di stazionarietà del funzionale  $\Pi_c[\boldsymbol{\sigma}]$

$$\Pi'_c \delta \boldsymbol{\sigma} \equiv \int_B \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \underbrace{(\mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma})}_{\boldsymbol{\epsilon}} dv - \int_{\partial_u B} (\delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} ds = 0, \quad \forall \delta \boldsymbol{\sigma}$$

equivale ad imporre le condizioni di congruenza cinematiche (le uniche ancora non realizzate) in forma integrale (il principio dei lavori virtuali)

- La condizione di stazionarietà risulta anche di minimo, essendo per definizione positiva l'energia di deformazione del sistema



# Formulazione variazionale del problema elasto-statico

## Principio di minimo della energia potenziale totale

## Principio di minimo della energia complementare totale

La validità delle due formulazione è ristretta

- all'ambito della teoria del 1° ordine
- per materiali elasto-lineari per i quali è definita una energia di deformazione
- per carichi conservativi, cioè per i quali esiste una energia potenziale.

Si dimostra che la validità della formulazione variazionale basata sul **principio di stazionarietà (ma non di minimo) della energia potenziale totale** è estendibile

- fuori dell'ambito della teoria del 1° ordine (nonlinearità geometriche);
- anche a materiali elasto nonlineari (iperelastici) per i quali è definita ancora una energia di deformazione  $\Phi[u]$ .

## Principio di stazionarietà della energia potenziale totale

$$\Pi[u] = \Phi[u] - pu = \text{staz}_u$$

### 3 Richiami di meccanica

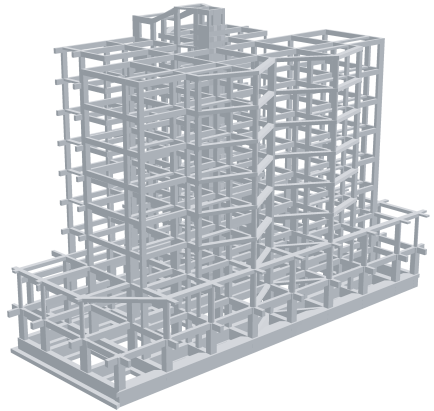
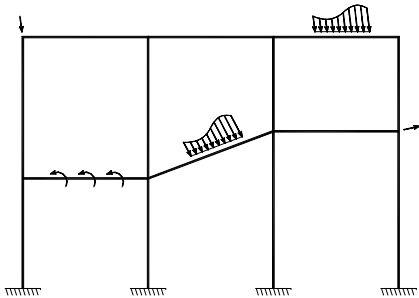
- Il problema elasto-statico (1° ordine)
- Il principio dei lavori virtuali
- Il principio di minimo della energia potenziale totale
- Il principio di minimo della energia complementare totale

### 4 Il caso delle strutture intelaiate

- Il modello di trave
- Relazioni di equilibrio per la trave
- Relazioni di congruenza per la trave
- Relazioni costitutive per la trave
- Espressione del lavoro e dell'energia
- Strutture isostatiche
- Risoluzione cinematiche strutture

# Le strutture intelaiate

Le travature (telai e travature reticolari) elastiche sono strutture costituite da un assemblaggio di travi elastiche.

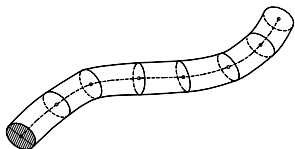


Tale sistema rappresenta uno dei più importanti schemi strutturali utilizzati nelle costruzioni.

# La trave

Dicesi *trave* un corpo in cui una delle dimensioni è prevalente sulle rimanenti due.

Da un punto di vista geometrico, la trave può essere definita come il solido generato da una figura piana in moto nello spazio mantenendosi ortogonale alle traiettorie descritte dai suoi punti.



**linea d'asse** la traiettoria del punto baricentrico della figura piana

**sezione** una qualsiasi delle posizioni assunte dalla figura piana nel moto da essa descritto

**ascissa curvilinea** individua univocamente ogni sezione e permette una semplificazione della rappresentazione geometrica della trave

**il dominio** per una trave di lunghezza  $l$ :  
 $\mathcal{B} \equiv \{x : x \in (0, l)\}$

**il contorno**  $\partial\mathcal{B} \equiv \{x = 0; x = l\}$

Si parla di trave rettilinea e di trave piana a seconda della forma particolare della curva della linea d'asse.

# I carichi sulle travi e sulle travature

Si considerano come azioni esterne soltanto azioni riconducibili a forze e coppie, sia concentrate su particolari sezioni, sia distribuite per unità di lunghezza della trave.

## le azioni concentrate

corrispondono a forze e coppie puntiformi ( $\mathbf{F}, \mathbf{C}$ ) su particolari sezioni;

## le azioni distribuite

sono descritte da funzioni ( $\mathbf{p}[s], \boldsymbol{\mu}[s]$ ) (densità di forza e densità di coppia) definite lungo la linea d'asse in modo tale che il loro risultante e il momento risultante (riferito ad un generico polo  $O$ ) delle forze e delle coppie distribuite per un tratto di trave di lunghezza finita  $\Delta s$  siano forniti dagli integrali di linea

$$\mathbf{r} = \int_{\Delta s} \mathbf{p}[s] ds \quad , \quad \mathbf{m}_o = \int_{\Delta s} \vec{OP}_s \times \mathbf{p}[s] ds + \int_{\Delta s} \boldsymbol{\mu}[s] ds$$

avendo indicato con  $P_s$  le posizioni dei punti della linea d'asse.

# I carichi sulle travi e sulle travature

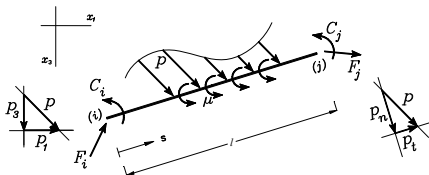
In un problema nel piano  $x_1x_3 \dots$

## le azioni concentrate ( $\mathbf{F}, \mathbf{C}$ )

- sono rappresentate dalle tre valori scalari  $(F_1, F_3, C)$ , dove  $(F_1, F_3)$  sono le componenti del vettore  $\mathbf{F}$ , mentre  $C$  è la componente del vettore della coppia  $\mathbf{C}$  normale al piano.

## le azioni distribuite ( $\mathbf{p}[s], \mu[s]$ )

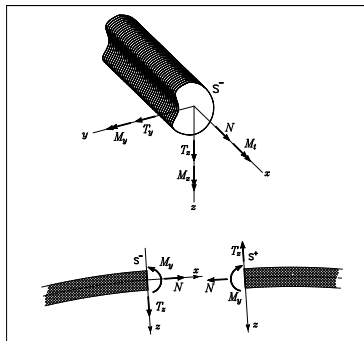
- sono rappresentate dalle tre funzioni scalari  $(p_1[s], p_3[s], \mu[s])$ , dove  $(p_1[s], p_3[s])$  sono le componenti del vettore  $\mathbf{p}[s]$ , mentre  $\mu[s]$  è la componente del vettore  $\mu[s]$  normale al piano.
- nel caso di trave piana rettilinea è comodo fare uso di una equivalente rappresentazione mediante le funzioni scalari  $(p_t[s], p_n[s], \mu[s])$ , dove  $(p_t[s], p_n[s])$  sono le componenti del vettore  $\mathbf{p}[s]$  rispettivamente lungo la direzione assiale e lungo la direzione normale alla linea d'asse.



# Le azioni interne sulle travi e sulle travature

## Le caratteristiche di sollecitazione

Per le travi, le *azioni interne* sono ben rappresentate dalle *caratteristiche di sollecitazione* ( $\mathbf{t}(s)$ ,  $\mathbf{T}(s)$ ) per ogni sezione della trave, cioè dalla forza risultante  $\mathbf{t}(s)$  e dal momento risultante  $\mathbf{T}(s)$  rispetto al baricentro delle *tensioni puntuali* distribuite sui punti della generica sezione.



parliamo di ...

**Sforzo assiale** (o **normale**)  $N$  la componente del risultante  $\mathbf{t}$  secondo l'asse  $x$ ;

**Sforzi di taglio** (o **taglio**) ( $T_y$ ,  $T_z$ ) le componenti del risultante  $\mathbf{t}$  secondo gli assi ( $y$ ,  $z$ );

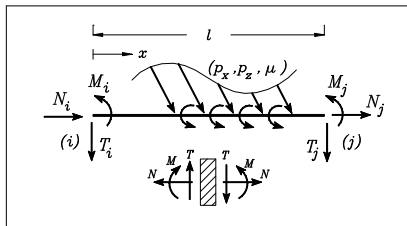
**Momento torcente**  $M_t$  la componente del momento risultante  $\mathbf{T}$  secondo l'asse  $x$ ;

**Momenti flettenti** ( $M_y$ ,  $M_z$ ) le componenti del momento risultante  $\mathbf{T}$  secondo gli assi ( $y$ ,  $z$ ).

Nel caso di trave nel piano  $xz$  con forze esterne giacenti su tale piano, le caratteristiche di sollecitazione si riducono alle componenti di sforzo normale  $N$ , sforzo di taglio  $T \equiv T_z$  e momento flettente  $M \equiv M_y$ .

# Le relazioni di equilibrio per la trave

di campo e al contorno



Dopo aver definito i descrittori delle azioni statiche esterne ed interne, la descrizione statica della trave è completa determinando le relazioni di equilibrio tra questi descrittori.

Per una trave piana rettilinea con carichi ripartiti sul dominio monodimensionale  $(0, l)$  e carichi concentrati applicati alle due sezioni estremali, le condizioni di equilibrio sono esplicitate dalle (si fa uso del formalismo sintetico  $\frac{d}{dx}(\cdot) \equiv (\bullet)_{,x}$ ):

condiz. sul dominio  $\mathcal{B}$ ,  $\forall x \in (0, l)$

$$\begin{cases} N_{,x} + p_x = 0 \\ T_{,x} + p_z = 0 \\ M_{,x} - T + \mu = 0 \end{cases}$$

condiz. al contorno  $\partial\mathcal{B}$  ( $x = 0, x = l$ )

$$\begin{cases} N[0] = -N_i \\ T[0] = -T_i \\ M[0] = -M_i \end{cases}, \quad \begin{cases} N[l] = N_j \\ T[l] = T_j \\ M[l] = M_j \end{cases}$$



# L'equazione dei lavori virtuali per la trave

espressione integrale delle equazioni di equilibrio

Stante la dualità statico-cinematica esistente nell'ambito della meccanica lagrangiana (il principio dei lavori virtuali), un modo coerente per definire i descrittori cinematici del modello di trave, in particolare i descrittori della deformazione locale del generico concio, è di riconoscerli come le quantità duali delle caratteristiche di sollecitazione, cioè su cui queste compiono lavoro, per cui abbia senso parlare di lavoro virtuale *interno*.

Riscriviamo in forma integrale le precedenti relazioni di equilibrio utilizzando la tecnica dei moltiplicatori lagrangiani.

faremo uso delle generiche funzioni (i moltiplicatori lagrangiani)

$$(\delta u[x], \delta w[x], \delta \varphi[x]), \quad \{x \in (0, l)\}$$

$$(\delta u_i, \delta w_i, \delta \varphi_i), \quad \{x = 0\}$$

$$(\delta u_j, \delta w_j, \delta \varphi_j), \quad \{x = l\}$$

definite rispettivamente nel dominio  $\mathcal{B}$  e sul contorno  $\partial\mathcal{B}$  della trave,

# L'equazione dei lavori virtuali per la trave

espressione integrale delle equazioni di equilibrio

- i moltiplicatori lagrangiani:

$$(\delta u[x], \delta w[x], \delta \varphi[x]), \quad \{x \in (0, l)\}$$

$$(\delta u_i, \delta w_i, \delta \varphi_i), \quad \{x = 0\}$$

$$(\delta u_j, \delta w_j, \delta \varphi_j), \quad \{x = l\}$$

definite rispettivamente nel dominio  $\mathcal{B}$  e sul contorno  $\partial\mathcal{B}$  della trave,

- le relazioni di equilibrio

condiz. sul dominio  $\forall x \in (0, l)$

condiz. al contorno ( $x = 0, x = l$ )

$$\begin{cases} N_{,x} + p_x = 0 \\ T_{,x} + p_z = 0 \\ M_{,x} - T + \mu = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N[0] = -N_i \\ T[0] = -T_i \\ M[0] = -M_i \end{cases}, \quad \begin{cases} N[l] = N_j \\ T[l] = T_j \\ M[l] = M_j \end{cases}$$

- sono equivalentemente espresse nella seguente opportuna forma integrale:

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \{ (N_{,x} + p_x) \delta u + (T_{,x} + p_z) \delta w + (M_{,x} - T + \mu) \delta \varphi \} dx \\ & - \{ (N[0] + N_i) \delta u_i + (T[0] + T_i) \delta w_i + (M[0] + M_i) \delta \varphi_i \} \\ & + \{ (N[l] - N_j) \delta u_j + (T[l] - T_j) \delta w_j + (M[l] - M_j) \delta \varphi_j \} = 0, \\ & \quad \forall (\delta u, \delta w, \delta \varphi), \quad \forall (\delta u_i, \delta w_i, \delta \varphi_i), \quad \forall (\delta u_j, \delta w_j, \delta \varphi_j) \end{aligned}$$

# L'equazione dei lavori virtuali per la trave

espressione integrale delle equazioni di equilibrio

- caratterizziamo in modo più preciso la forma dei moltiplicatori:

$$(\delta u[x], \delta w[x], \delta \varphi[x]), \quad \{x \in (0, l)\} \quad : \quad \begin{cases} \delta u[0] = \delta u_i \\ \delta w[0] = \delta w_i \\ \delta \varphi[0] = \delta \varphi_i \end{cases} ; \quad \begin{cases} \delta u[l] = \delta u_j \\ \delta w[l] = \delta w_j \\ \delta \varphi[l] = \delta \varphi_j \end{cases}$$

- le relazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \{ (N_{,x} + p_x) \delta u + (T_{,x} + p_z) \delta w + (M_{,x} - T + \mu) \delta \varphi \} dx \\ & \quad - \{ (N[0] + N_i) \delta u_i + (T[0] + T_i) \delta w_i + (M[0] + M_i) \delta \varphi_i \} \\ & \quad + \{ (N[l] - N_j) \delta u_j + (T[l] - T_j) \delta w_j + (M[l] - M_j) \delta \varphi_j \} = 0, \\ & \quad \forall (\delta u, \delta w, \delta \varphi) \end{aligned}$$

- sono riscrivibili nella forma

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \{ N_{,x} \delta u + T_{,x} \delta w - T \delta \varphi + M_{,x} \delta \varphi \} dx + |N \delta u + T \delta w + M \delta \varphi|_0^l \\ & = \int_0^l \{ p_x \delta u + p_z \delta w + \mu \delta \varphi \} dx \\ & \quad + (N_i \delta u_i + T_i \delta w_i + M_i \delta \varphi_i) + (N_j \delta u_j + T_j \delta w_j + M_j \delta \varphi_j), \quad \forall (\delta u, \delta w, \delta \varphi) \end{aligned}$$

# L'equazione dei lavori virtuali per la trave

espressione integrale delle equazioni di equilibrio

- i moltiplicatori lagrangiani:

$$(\delta u[x], \delta w[x], \delta \varphi[x]), \quad \{x \in (0, l)\} \quad : \quad \begin{cases} \delta u[0] = \delta u_i \\ \delta w[0] = \delta w_i \\ \delta \varphi[0] = \delta \varphi_i \end{cases} ; \quad \begin{cases} \delta u[l] = \delta u_j \\ \delta w[l] = \delta w_j \\ \delta \varphi[l] = \delta \varphi_j \end{cases}$$

- le equazioni di equilibrio

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \{N_{,x} \delta u + T_{,x} \delta w - T \delta \varphi + M_{,x} \delta \varphi\} dx + |N \delta u + T \delta w + M \delta \varphi|_0^l \\ & = \int_0^l \{p_x \delta u + p_z \delta w + \mu \delta \varphi\} dx \\ & \quad + (N_i \delta u_i + T_i \delta w_i + M_i \delta \varphi_i) + (N_j \delta u_j + T_j \delta w_j + M_j \delta \varphi_j), \quad \forall (\delta u, \delta w, \delta \varphi) \end{aligned}$$

- che, integrando per parti, si trasformano nella

$$\begin{aligned} & \int_0^l \{N \delta u_{,x} + T(\delta w_{,x} + \delta \varphi) + M \delta \varphi_{,x}\} dx = \\ & = \int_0^l \{p_x \delta u + p_z \delta w + \mu \delta \varphi\} dx \\ & \quad + (N_i \delta u_i + T_i \delta w_i + M_i \delta \varphi_i) + (N_j \delta u_j + T_j \delta w_j + M_j \delta \varphi_j), \quad \forall (\delta u, \delta w, \delta \varphi) \end{aligned}$$

# L'equazione dei lavori virtuali per la trave

espressione integrale delle equazioni di equilibrio

i moltiplicatori lagrangiani:

$$(\delta u[x], \delta w[x], \delta \varphi[x]), \quad \{x \in (0, l)\} \quad : \quad \begin{cases} \delta u[0] = \delta u_i \\ \delta w[0] = \delta w_i \\ \delta \varphi[0] = \delta \varphi_i \end{cases} ; \quad \begin{cases} \delta u[l] = \delta u_j \\ \delta w[l] = \delta w_j \\ \delta \varphi[l] = \delta \varphi_j \end{cases}$$

forma integrale delle equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \{N \delta u_{,x} + T(\delta w_{,x} + \delta \varphi) + M \delta \varphi_{,x}\} dx = \\ & = \int_0^l \{p_x \delta u + p_z \delta w + \mu \delta \varphi\} dx \\ & \quad + (N_i \delta u_i + T_i \delta w_i + M_i \delta \varphi_i) + (N_j \delta u_j + T_j \delta w_j + M_j \delta \varphi_j), \quad \forall (\delta u, \delta w, \delta \varphi) \end{aligned}$$

# L'equazione dei lavori virtuali per la trave

espressione integrale delle equazioni di equilibrio

i moltiplicatori lagrangiani:

$$(\delta u[x], \delta w[x], \delta \varphi[x]), \quad \{x \in (0, l)\} \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta u[0] = \delta u_i \\ \delta w[0] = \delta w_i \\ \delta \varphi[0] = \delta \varphi_i \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta u[l] = \delta u_j \\ \delta w[l] = \delta w_j \\ \delta \varphi[l] = \delta \varphi_j \end{array} \right.$$

Significato meccanico

possono essere interpretati come variazioni possibili, o virtuali, di funzioni  $(u[x], w[x], \varphi[x])$  sufficientemente regolari, dove  $(u[x], w[x])$  rappresentano lo spostamento dei punti della linea d'asse della trave, mentre  $\varphi[x]$  misura la rotazione rigida delle sezioni.

# L'equazione dei lavori virtuali per la trave

espressione integrale delle equazioni di equilibrio

forma integrale delle equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} \int_0^l \{ N \delta u_{,x} + T(\delta w_{,x} + \delta \varphi) + M \delta \varphi_{,x} \} dx &= \\ &= \int_0^l \{ p_x \delta u + p_z \delta w + \mu \delta \varphi \} dx \\ &\quad + (N_i \delta u_i + T_i \delta w_i + M_i \delta \varphi_i) + (N_j \delta u_j + T_j \delta w_j + M_j \delta \varphi_j), \quad \forall (\delta u, \delta w, \delta \varphi) \end{aligned}$$

## Significato meccanico

La relazione acquista il significato di eguaglianza tra lavoro virtuale interno ed esterno:

- il secondo termine dell'equazione è il lavoro virtuale dei carichi esterni per la variazione dei campi di spostamento;
- il primo termine  $\int_0^l \{ N \delta u_{,x} + T(\delta w_{,x} + \delta \varphi) + M \delta \varphi_{,x} \} dx$  acquista il significato di lavoro virtuale interno tra le caratteristiche di sollecitazioni  $(N, T, M)$  e variazioni

$$\delta \varepsilon = \delta u_{,x}, \quad \delta \gamma = \delta w_{,x} + \delta \varphi, \quad \delta \chi = \delta \varphi_{,x}$$

di quantità cinematiche, dette caratteristiche di deformazione  $(\varepsilon, \gamma, \chi)$ , duali di  $(N, T, M)$

$$\varepsilon = u_{,x}, \quad \gamma = w_{,x} + \varphi, \quad \chi = \varphi_{,x}$$

# Descrizione cinematica della trave

## i cambiamenti di configurazione

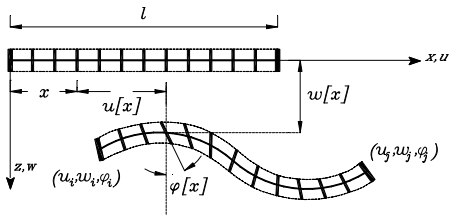
- Le funzioni  $(u[x], w[x], \varphi[x])$ , interpretate come spostamenti della linea d'asse e rotazione rigida delle sezioni, descrivono un modello cinematico particolarmente semplice di trave piana.
- Per una trave di lunghezza  $l$  con una configurazione iniziale rettilinea disposta lungo l'asse delle coordinate  $x$ , un suo generico cambiamento di configurazione nell'ipotesi di piccoli spostamenti e deformazioni (teoria del 1° ordine), è descritto dalla seguente famiglia di campi di spostamenti

$$\bar{u}[x, y, z] = u[x] + z \varphi[x]$$

$$\bar{v}[x, y, z] = 0$$

$$\bar{w}[x, y, z] = w[x]$$

- La cinematica della trave nel piano  $(x, z)$  vincola le sezioni a rimanere piane e rigide nel proprio piano.





# Descrizione cinematica della trave

## la deformazione interna

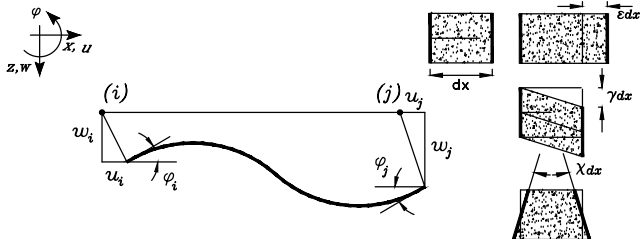
Anche alle quantità  $(\varepsilon, \gamma, \chi)$  (le caratteristiche di deformazione), introdotte formalmente come una opportuna combinazione di spostamenti che ricompono la dualità statico–cinematica del modello, è associato un ben preciso significato geometrico.

# Descrizione cinematica della trave

## la deformazione interna

Nell'ipotesi di spostamenti (e rotazioni) piccoli, è possibile infatti dimostrare

- La quantità  $\varepsilon = u_{,x}$ , detto *allungamento assiale* della trave, misura la variazione percentuale di lunghezza  $\frac{ds-dx}{dx}$  del conchio di trave di lunghezza iniziale  $dx$  a seguito della deformazione
- La quantità  $\gamma = w_{,x} + \varphi$ , detta *scorrimento trasversale* della trave, misura lo scorrimento angolare  $\theta$ , cioè la variazione di angolo tra due direzioni (la tangente alla linea d'asse e la traccia del piano della sezione) inizialmente ortogonali
- La quantità  $\chi = \varphi_{,x}$ , detta *curvatura* della trave, misura infine la variazione di assetto (angolo) tra le due facce del conchio di trave



# Descrizione cinematica della trave

## le relazioni di congruenza cinematica

In sintesi, i parametri della deformazione pura locale  $(\varepsilon, \gamma, \chi)$ , detti anche *caratteristiche della deformazione*, assieme al campo di spostamenti  $(u, w, \varphi)$ , riassumono una cinematica del modello di trave in cui la sezione rimane piana e rigida nel proprio piano.

## le relazioni di congruenza cinematica per la trave

Tali descrittori cinematici devono realizzare le condizioni di congruenza che, nelle ipotesi di piccoli spostamenti e rotazioni (teoria del I° ordine), sono espresse dalle *condiz. sul dominio*  $\forall x \in (0, l)$       *condiz. al contorno*  $(x = 0, x = l)$

$$\begin{cases} \varepsilon = u_{,x} \\ \gamma = w_{,x} + \varphi \\ \chi = \varphi_{,x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u[0] = u_i \\ w[0] = w_i \\ \varphi[0] = \varphi_i \end{cases}, \quad \begin{cases} u[l] = u_j \\ w[l] = w_j \\ \varphi[l] = \varphi_j \end{cases}$$

## in sintesi

## le relazioni di equilibrio per una trave rettilinea

tra le caratteristiche di sollecitazione interna ( $N(s), T(s), M(s)$ ) ed i carichi esterni ripartiti sul dominio ( $p_x, p_z, \mu$ ) ed applicati sul contorno ( $N_i, T_i, M_i, N_j, T_j, M_j$ ):

*condiz. sul dominio*  $\forall x \in (0, l)$

$$\begin{cases} N_{,x} + p_x = 0 \\ T_{,x} + p_z = 0 \\ M_{,x} - T + \mu = 0 \end{cases}$$

*condiz. al contorno* ( $x = 0, x = l$ )

$$\begin{cases} N[0] = -N_i \\ T[0] = -T_i \\ M[0] = -M_i \end{cases}, \quad \begin{cases} N[l] = N_j \\ T[l] = T_j \\ M[l] = M_j \end{cases}$$

## le relazioni di congruenza cinematica per la trave

tra le caratteristiche della deformazione interna ( $\varepsilon(s), \gamma(s), \chi(s)$ ) e il campo di spostamenti ( $u(s), w(s), \varphi(s)$ ):

*condiz. sul dominio*  $\forall x \in (0, l)$

$$\begin{cases} \varepsilon = u_{,x} \\ \gamma = w_{,x} + \varphi \\ \chi = \varphi_{,x} \end{cases}$$

*condiz. al contorno* ( $x = 0, x = l$ )

$$\begin{cases} u[0] = u_i \\ w[0] = w_i \\ \varphi[0] = \varphi_i \end{cases}, \quad \begin{cases} u[l] = u_j \\ w[l] = w_j \\ \varphi[l] = \varphi_j \end{cases}$$

# Relazioni costitutive

## dualità statico-cinematica

Gli aspetti statici e cinematici del modello di trave, pur se si rispecchiano in una dualità formale sancita dal principio dei lavori virtuali, rappresentano *mondi* diversi e separati del problema, il primo governato dalle leggi dell'equilibrio, il secondo dalle leggi della congruenza.

## il legame costitutivo

Il legame costitutivo completa la meccanica del modello definendo un collegamento tra questi due mondi, convenientemente espresso per la trave tra i descrittori della deformazione ( $\varepsilon, \gamma, \chi$ ) e della sollecitazione interna ( $N, T, M$ ), al fine di caratterizzare dal punto di vista matematico il comportamento locale del materiale di cui la trave è composta.

# Relazioni costitutive

il modello di trave alla Timoshenko

La trave di Timoshenko è definita dal semplice legame elastico-lineare

$$N = EA\varepsilon \quad T = GA^*\gamma \quad M = EJ\chi$$

- i coefficienti costitutivi ( $EA$ ,  $GA^*$ ,  $EJ$ ) sono derivati teoricamente dalla soluzione del solido elastico tridimensionale di S. Venant
- sono definiti dal prodotto di quantità legate alla geometria della sezione (aree  $A$ , momenti d'inerzia  $J$  e area ridotta a taglio  $A^*$ ) con quantità (moduli elastici normale  $E$  e tangenziale  $G$ ) legate più strettamente al materiale che costituisce il *solida* trave.

Tale legame è inquadrabile nella tipologia dei legami iperelastici, con energia di deformazione espressa dalla

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_1 \{ EA\varepsilon^2 + GA^*\gamma^2 + EJ\chi^2 \} dx \equiv \frac{1}{2} \int_1 \left\{ \frac{N^2}{EA} + \frac{T^2}{GA^*} + \frac{M^2}{EJ} \right\} dx$$

# Relazioni costitutive

il modello di trave alla Eulero-Bernoulli

Un modello costitutivo di trave ancora più semplice, a cui generalmente si fa riferimento nelle applicazioni di Scienza delle Costruzioni, è il seguente (trave alla Bernoulli)

$$N = EA\varepsilon \quad \gamma = 0 \quad M = EJ\chi$$

- Esso è ottenibile a partire dal precedente modello introducendo un vincolo cinematico sullo scorrimento trasversale

$$\gamma = w_{,x} + \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -w_{,x} ,$$

- equivalente a vincolare l'assetto delle sezioni a rimanere non solo piane ma anche ortogonali alla linea d'asse dopo la deformazione (ipotesi di Bernoulli).
- La cinematica della trave di Bernoulli è descritta mediante i campi di spostamenti ( $u[x]$ ,  $w[x]$ ) della deformata della *linea elastica*.

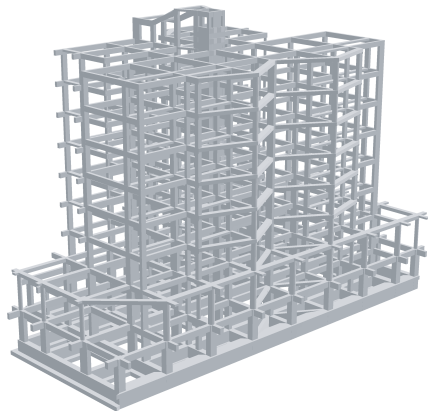
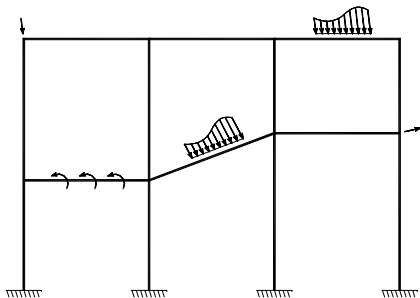
$$\varphi = -w_{,x} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = u_{,x} , \quad \chi = \varphi_{,x} = -w_{,xx}$$

Anche tale modello costitutivo risulta di tipo iperelastico con espressione della energia di deformazione semplificata nella

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_I \{ EA\varepsilon^2 + EJ\chi^2 \} dx \equiv \frac{1}{2} \int_I \left\{ \frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EJ} \right\} dx$$

# Le strutture intelaiate

Le travi (telai e travi reticolari) elastiche sono strutture costituite da un assemblaggio di travi elastiche.





# Le strutture intelaiate

modello di trave alla Timoshenko

Le travature (telai e travature reticolari) elastiche sono strutture costituite da un assemblaggio di travi elastiche.

Seguendo un modello tecnico di trave alla Timoshenko, per una travatura piana ...

- le tensioni interne  $\sigma$ : le caratteristiche di sollecitazione ( $N, T, M$ ) su ogni sezione delle diverse travi;
- le deformazioni  $\epsilon$ : le caratteristiche di deformazione ( $\epsilon, \gamma, \chi$ ) su ogni sezione delle diverse travi;
- Il lavoro interno del sistema è dato dalla somma del lavoro interno alle varie travi:

$$\int_{\mathcal{B}} \sigma \cdot \epsilon \, dv \equiv \sum_{\text{travi}} \int_I \{N \epsilon + T \gamma + M \chi\} \, dx$$

- Per un sistema di carichi costituiti da forze/coppie distribuite sulle varie travi e forze/coppie applicati a particolari punti, il lavoro di questi è indicato con:

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \, dv + \int_{\partial_f \mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, ds \equiv \sum_{\text{travi}} \int_I \{p_x u + p_z w + \mu \varphi\} \, dx + \sum_{\text{nodi}} \mathbf{p}^t \mathbf{u}$$

# Le strutture intelaiate

modello trave di Timoshenko

- Il lavoro interno:

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} dv \equiv \sum_{\text{travi}} \int_I \{N \varepsilon + T \gamma + M \chi\} dx$$

- Il lavoro dei carichi esterni:

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} dv + \int_{\partial_f \mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} ds \equiv \sum_{\text{travi}} \int_I \{p_x u + p_z w + \mu \varphi\} dx + \sum_{\text{nodi}} \mathbf{p}^t \mathbf{u}$$

- Il lavoro delle reazioni sui cedimenti vincolari:

$$\int_{\partial_u \mathcal{B}} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} ds \equiv \sum_{\text{ced}} \mathbf{R}^t \mathbf{d}$$

- Il legame costitutivo:

$$N = EA \varepsilon; \quad , \quad T = GA^* \gamma, \quad M = EJ \chi$$

- l'energia di deformazione

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\epsilon} \cdot (\mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}) dv \equiv \frac{1}{2} \sum_{\text{travi}} \int_I \{EA \varepsilon^2 + GA^* \gamma^2 + EJ \chi^2\} dx$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma}) dv \equiv \frac{1}{2} \sum_{\text{travi}} \int_I \left\{ \frac{N^2}{EA} + \frac{T^2}{GA^*} + \frac{M^2}{EJ} \right\} dx$$

# Le strutture intelaiate

modello trave di Eulero-Bernoulli

Le quantità relative all'uso di un modello di trave di Eulero-Bernoulli sono banalmente ricavabili dalle notazioni relative alla trave di Timoshenko eliminando il contributo energetico e deformativo connesso allo scorrimento tagliante:

- Il lavoro interno del sistema

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \, dv \equiv \sum_{\text{travi}} \int_I \{N \varepsilon + M \chi\} \, dx$$

- Il lavoro dei carichi (rimane inalterato)

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \, dv + \int_{\partial_f \mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, ds \equiv \sum_{\text{travi}} \int_I \{p_x u + p_z w + \mu \varphi\} \, dx + \sum_{\text{nodi}} \mathbf{p}^t \mathbf{u}$$

- Il lavoro delle reazioni vincolari in presenza di cedimenti (rimane inalterato)

$$\int_{\partial_u \mathcal{B}} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \, ds \equiv \sum_{\text{ced}} \mathbf{R}^t \mathbf{d}$$

- l'energia di deformazione

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\epsilon} \cdot (\mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}) \, dv \equiv \frac{1}{2} \sum_{\text{travi}} \int_I \{EA \varepsilon^2 + EJ \chi^2\} \, dx$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma}) \, dv \equiv \frac{1}{2} \sum_{\text{travi}} \int_I \left\{ \frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EJ} \right\} \, dx$$

# Il problema elasto-statico relativo a strutture isostatiche

alcune osservazioni

## in generale ...

- per un generico sistema meccanico, le equazioni del problema elasto-statico risultano accoppiate in termini delle incognite  $\{\sigma, \epsilon, \mathbf{u}\}$
- ciò significa che la soluzione  $\sigma$  è condizionata dal rispetto delle equazioni di equilibrio (e quindi dipende dal valore dei carichi) e di congruenza del problema (e quindi dipende dal valore dei cedimenti assegnati)

$$\sigma = \sigma[\mathbf{q}, \mathbf{f}, \bar{\mathbf{u}}]$$

## nel caso particolare delle strutture isostatiche ...

- le equazioni di equilibrio e di congruenza risultano disaccoppiate nelle variabili  $\sigma$ ,
- cioè, la distribuzione delle caratteristiche di sollecitazione è conseguibile mediante le sole equazioni di equilibrio statico, in funzione univoca dei **solli** carichi esterni applicati

$$\sigma = \sigma[\mathbf{q}, \mathbf{f}].$$

- Le equazioni di congruenza (e quindi i cedimenti) intervengono solo a valle della risoluzione statica, nella ricostruzione cinematica della struttura.

# Il problema elasto-statico relativo a strutture isostatiche

alcune osservazioni

in generale ...

lo stato di sollecitazione  $\sigma$  dipende sia dal valore dei carichi esterni che dal valore dei cedimenti assegnati

$$\sigma = \sigma[\mathbf{q}, \mathbf{f}, \bar{\mathbf{u}}]$$

nel caso particolare delle strutture isostatiche ...

lo stato di sollecitazione  $\sigma$  dipende solo dal valore dei carichi esterni

$$\sigma = \sigma[\mathbf{q}, \mathbf{f}]$$

la presenza di cedimenti in strutture isostatiche ...

- non altera i valori delle caratteristiche di sollecitazione
- sono cioè associati a valori nulli dello stato di sollecitazione  $\sigma$  e quindi, per il legame costitutivo, a valori nulli dello stato di deformazione  $\epsilon$
- altera i soli valori del campo di spostamento attraverso un'aliquota che corrisponde ad un atto di moto rigido, il solo associato a una deformazione nulla delle parti del sistema
- per definizione, una struttura isostatica è cinematica determinata.

# Risoluzione cinematiche delle strutture

- Noto lo stato di sollecitazione interna  $\sigma$ , il legame costitutivo permette di determinare banalmente lo stato di deformazione interna  $\epsilon$

$$\epsilon = \mathbf{E}^{-1} \sigma$$

- Note le deformazioni  $\epsilon$ , il campo di spostamenti  $\mathbf{u}$  è ricavabile (in maniera non banale) per integrazione delle equazioni differenziali di congruenza cinematica con le relative condizioni al contorno sui cedimenti assegnati

$$\epsilon = \mathbf{D} \mathbf{u} \quad , \quad \text{su } \mathcal{B} \quad \parallel \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad , \quad \text{su } \partial_u \mathcal{B}$$

Tale valutazione diretta del campo di spostamenti risulta articolata e complessa nel caso di geometrie strutturali diverse dalla banale trave rettilinea

Qualora però si è interessati solo alla determinazione delle componenti di spostamento di punti particolari della struttura, uno strumento semplice e immediato è fornito dal principio dei lavori virtuali

# Risoluzione cinematiche delle strutture

calcolo spostamenti mediante il P.L.V.

- Il principio dei lavori virtuali, nella forma complementare o delle forze virtuali, rappresenta la formulazione integrale delle precedenti condizioni di congruenza tra  $(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})$

$$\int_{\mathcal{B}} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} dv = \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} dv + \int_{\partial_f \mathcal{B}} \delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} ds}_{1 \cdot u_c} + \int_{\partial_u \mathcal{B}} (\delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds, \quad \forall \delta \boldsymbol{\sigma}$$

con tensioni virtuali  $\delta \boldsymbol{\sigma}$  è in equilibrio con un sistema virtuale di forze esterne  $(\delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{f})$ .

- Tale sistema delle forze è d'altra parte del tutto generico e, in particolare, indipendente dalla soluzione cinematica effettiva  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon})$ .
- È allora possibile riferirsi a carichi fittizi costituiti da forze (o coppie) unitarie concentrate in punti della struttura tale che il lavoro compiuto per gli spostamenti effettivi della struttura  $\mathbf{u}$  sia dato dalla

$$\int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} dv + \int_{\partial_f \mathcal{B}} \delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} ds = 1 \cdot u_c$$

dove  $u_c$  indica la componente cinematica duale della forza fittizia applicata.

- In tal caso la particolarizzazione dell'equazione dei lavori virtuali fornisce l'espressione completa per il calcolo della componente cinematica  $u_c$

$$u_c = \int_{\mathcal{B}} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} dv - \int_{\partial_u \mathcal{B}} (\delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} ds$$

# Risoluzione cinematiche delle strutture

calcolo spostamenti mediante il P.L.V.

Espressione completa per il calcolo della componente cinematica  $u_c$  in funzione della distribuzione di deformazione effettive della struttura  $\epsilon$ , congruenti cioè con il campo di spostamenti effettivi  $\mathbf{u}$  e con i cedimenti assegnati  $\bar{\mathbf{u}}$  e nel caso di travature elastiche con travi alla Timoshenko,

$$\begin{aligned} u_c &= \int_{\mathcal{B}} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \, dv - \int_{\partial_u \mathcal{B}} (\delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \, ds \\ &= \sum_{\text{travi}} \int_I \{ \delta N \epsilon + \delta T \gamma + \delta M \chi \} \, dx - \sum_{\text{ced}} \delta \mathbf{R}^t \mathbf{d} \end{aligned}$$

Espressione completa per il calcolo della componente cinematica  $u_c$  in funzione della distribuzione di sollecitazioni interne effettive della struttura  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}$ , in equilibrio con i carichi effettivi agenti sulla struttura e nel caso di travature elastiche con travi alla Timoshenko,

$$\begin{aligned} u_c &= \int_{\mathcal{B}} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma}) \, dv - \int_{\partial_u \mathcal{B}} (\delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \, ds \\ &= \sum_{\text{travi}} \int_I \left\{ \delta N \frac{N}{EA} + \delta T \frac{T}{GA^*} + \delta M \frac{M}{EJ} \right\} \, dx - \sum_{\text{ced}} \delta \mathbf{R}^t \mathbf{d} \end{aligned}$$



# Risoluzione cinematiche delle strutture

calcolo spostamenti mediante il P.L.V.

Espressione completa per il calcolo della componente cinematica  $u_c$  in funzione della distribuzione di deformazione effettive della struttura  $\epsilon$ , congruenti cioè con il campo di spostamenti effettivi  $\mathbf{u}$  e con i cedimenti assegnati  $\bar{\mathbf{u}}$  e nel caso di travature elastiche con travi alla Eulero-Bernoulli

$$\begin{aligned} u_c &= \int_{\mathcal{B}} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \, dv - \int_{\partial_u \mathcal{B}} (\delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \, ds \\ &= \sum_{\text{travi}} \int_l \{ \delta N \epsilon + \delta M \chi \} \, dx - \sum_{\text{ced}} \delta \mathbf{R}^t \mathbf{d} \end{aligned}$$

Espressione completa per il calcolo della componente cinematica  $u_c$  in funzione della distribuzione di sollecitazioni interne effettive della struttura  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}$ , in equilibrio con i carichi effettivi agenti sulla struttura e nel caso di travature elastiche con travi alla Eulero-Bernoulli

$$\begin{aligned} u_c &= \int_{\mathcal{B}} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma}) \, dv - \int_{\partial_u \mathcal{B}} (\delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \, ds \\ &= \sum_{\text{travi}} \int_l \left\{ \delta N \frac{N}{EA} + \delta M \frac{M}{EJ} \right\} \, dx - \sum_{\text{ced}} \delta \mathbf{R}^t \mathbf{d} \end{aligned}$$

# Risoluzione cinematiche delle strutture

calcolo spostamenti mediante il P.L.V. - il procedimento

a partire . . .

dalla distribuzione di deformazioni  $\epsilon$  o, equivalentemente, di tensioni  $\sigma$  della struttura

il procedimento per il calcolo di una particolare componente cinematica:

- definizione di uno schema statico fittizio ottenuto applicando alla struttura un carico fittizio unitario duale della componente cinematica cercata,
- calcolo della distribuzione di sollecitazioni interne fittizie  $\delta\sigma$  in equilibrio con il carico fittizio,
- **calcolo della componente cinematica mediante la relativa espressione integrale dell'equazione dei lavori virtuali**

osservazioni

- il procedimento si applica sia a strutture isostatiche che a strutture iperstatiche,
- richiede a priori la risoluzione di queste in termini delle relative distribuzioni effettive di sollecitazioni (o deformazioni)
- la risoluzione del nostro problema cinematico si riduce quindi alla banale valutazione di una somma di integrali del prodotto di funzioni note

# Parte III

## Il metodo delle forze

## 5 Il metodo delle forze

- Rappresentazione di strutture iperstatiche
- Le equazioni di congruenza
- I passi del metodo delle forze
- Formulazione condizioni di congruenza
- Le distorsioni
- Esempi di applicazioni

# Rappresentazione statica di strutture iperstatiche

Le equazioni di equilibrio di corpo rigido, sufficienti a giungere ad una risoluzione statica completa di strutture isostatiche, sono naturalmente insufficienti alla risoluzione di sistemi iperstatici.

Per una struttura  $n$  volte iperstatica, il problema statico ammette  $\infty^n$  soluzioni: esistono  $\infty^n$  sistemi di reazioni vincolari, e quindi  $\infty^n$  sistemi di sollecitazioni interne  $\sigma$ , in equilibrio con i dati carichi.

Daremo adesso una rappresentazione di tale infinità di soluzioni statiche.

# I parametri iperstatici

- Una struttura  $n$  volte iperstatica ha  $n$  parametri di vincolo sovrabbondanti rispetto alle equazioni di equilibrio del problema, detti parametri **iperstatici** della struttura.
- Gli  $n$  parametri iperstatici  $(X_1, \dots, X_n)$  sono indeterminati rispetto alle sole equazioni di equilibrio

$$\{X_1, \dots, X_n\} \in (-\infty, +\infty)$$

- I rimanenti parametri di reazione vincolare sono staticamente determinati in funzione dei carichi esterni e dei valori assunti da tali parametri iperstatici  $(X_1, \dots, X_n)$

- La scelta dei parametri iperstatici non è univoca, ma diverse scelte sono possibili.
- La sola condizione vincolante nella scelta è che i rimanenti parametri di reazione vincolare siano staticamente determinati in funzione dei carichi e dei parametri iperstatici

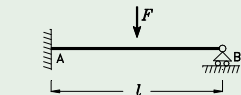
# I parametri iperstatici

- Una struttura  $n$  volte iperstatica ha  $n$  parametri di vincolo sovrabbondanti rispetto alle equazioni di equilibrio del problema, detti parametri **iperstatici** della struttura.
- Gli  $n$  parametri iperstatici  $(X_1, \dots, X_n)$  sono indeterminati rispetto alle sole equazioni di equilibrio

$$\{X_1, \dots, X_n\} \in (-\infty, +\infty)$$

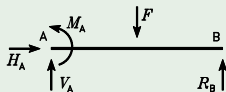
- I rimanenti parametri di reazione vincolare sono staticamente determinati in funzione dei carichi esterni e dei valori assunti da tali parametri iperstatici  $(X_1, \dots, X_n)$

## esempio 1



$$X = R_B$$

$$\begin{aligned} H_A &= 0 \\ V_A &= F - X \\ M_A &= \frac{Fl}{2} - Xl \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ M_A \\ R_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ \frac{Fl}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -l \\ 1 \end{bmatrix}$$



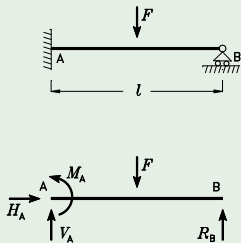
# I parametri iperstatici

- Una struttura  $n$  volte iperstatica ha  $n$  parametri di vincolo sovrabbondanti rispetto alle equazioni di equilibrio del problema, detti parametri **iperstatici** della struttura.
- Gli  $n$  parametri iperstatici  $(X_1, \dots, X_n)$  sono indeterminati rispetto alle sole equazioni di equilibrio

$$\{X_1, \dots, X_n\} \in (-\infty, +\infty)$$

- I rimanenti parametri di reazione vincolare sono staticamente determinati in funzione dei carichi esterni e dei valori assunti da tali parametri iperstatici  $(X_1, \dots, X_n)$

## esempio 2



$$X = M_A$$

$$\begin{aligned} H_A &= 0 \\ V_A &= \frac{F}{2} + \frac{X}{l} \\ R_B &= \frac{F}{2} - \frac{X}{l} \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ M_A \\ R_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F}{2} \\ 0 \\ \frac{F}{2} \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{1}{l} \\ 1 \\ -\frac{1}{l} \end{bmatrix}$$



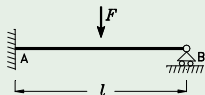
# I parametri iperstatici

- Una struttura  $n$  volte iperstatica ha  $n$  parametri di vincolo sovrabbondanti rispetto alle equazioni di equilibrio del problema, detti parametri **iperstatici** della struttura.
- Gli  $n$  parametri iperstatici  $(X_1, \dots, X_n)$  sono indeterminati rispetto alle sole equazioni di equilibrio

$$\{X_1, \dots, X_n\} \in (-\infty, +\infty)$$

- I rimanenti parametri di reazione vincolare sono staticamente determinati in funzione dei carichi esterni e dei valori assunti da tali parametri iperstatici  $(X_1, \dots, X_n)$

## esempio 3

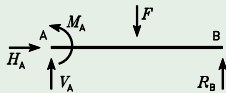


$$X = H_A$$

$V_A = \text{stat. ind.}$

$M_A = \text{stat. ind.}$

$R_B = \text{stat. ind.}$



# reazioni vincolari e stati di sollecitazione interna

## rappresentazione del sistema delle reazioni vincolari

Il sistema delle  $\infty^n$  reazioni vincolari  $\mathbf{R}$  avrà la seguente rappresentazione lineare

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_o + X_1 \mathbf{R}_1 + X_2 \mathbf{R}_2 + \dots + X_n \mathbf{R}_n; \quad \forall X_i \in (-\infty, +\infty)$$

dove:

- $\mathbf{R}_o$  sono le reazioni vincolari in equilibrio con i carichi esterni (e per valori nulli dei parametri iperstatici)
- $\mathbf{R}_i$  sono le reazioni vincolari in equilibrio con un valore unitario  $X_i = 1$  del  $i$ -esimo parametro (e valori nulli dei carichi esterni e dei rimanenti parametri iperstatici)

## rappresentazione degli stati di sollecitazione interna

Di conseguenza, il sistema delle  $\infty^n$  sollecitazioni interne  $\sigma \equiv \{N(s), T(s), M(s)\}$  avrà un'analogia forma lineare

$$\sigma = \sigma_o + X_1 \sigma_1 + X_2 \sigma_2 + \dots + X_n \sigma_n; \quad \forall X_i \in (-\infty, +\infty)$$

dove:

- $\sigma_o \equiv \{N_o, T_o, M_o\}$  è lo stato di sollecitazione interna in equilibrio con i carichi esterni (e per valori nulli dei parametri iperstatici)
- $\sigma_i \equiv \{N_i, T_i, M_i\}$  sono gli stati di sollecitazione interna in equilibrio con un valore unitario  $X_i = 1$  del  $i$ -esimo parametro (e valori nulli dei carichi e dei rimanenti parametri)

# la struttura isostatica equivalente

$$\begin{aligned} R &= R_o + X_1 R_1 + X_2 R_2 + \dots + X_n R_n \\ \sigma &= \sigma_o + X_1 \sigma_1 + X_2 \sigma_2 + \dots + X_n \sigma_n \end{aligned}, \quad \forall X_i \in (-\infty, +\infty)$$

- $(R_o, \sigma_o)$  sono in equilibrio con i carichi esterni (e per valori nulli dei parametri iperstatici)
- $(R_i, \sigma_i)$  sono in equilibrio con un valore unitario  $X_i = 1$  del  $i$ -esimo parametro (e valori nulli dei carichi esterni e dei rimanenti parametri iperstatici)

## la struttura isostatica equivalente

Cio suggerisce di costruire la rappresentazione del sistema delle reazioni vincolari e degli stati di sollecitazione interna con riferimento ad una **struttura isostatica equivalente**,

- ottenuta dalla struttura originaria eliminando i vincoli corrisponde agli  $n$  parametri iperstatici
- soggetta, oltre che ai carichi esterni, anche ai carichi corrispondenti a valori dei parametri iperstatici  $(X_1, \dots, X_n)$

L'equivalenza di tale struttura (isostatica) alla struttura (iperstatica) del problema è intesa solo dal punto di vista statico, nel senso che sono soggette alle stesse equazioni di equilibrio che realizzano con le stesse reazioni vincolari e la stessa distribuzione di caratteristiche di sollecitazione.

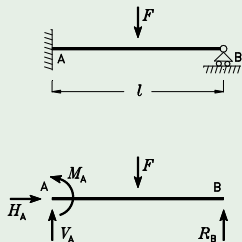
# la struttura isostatica equivalente

## la struttura isostatica equivalente

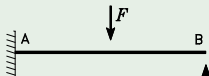
Ciò suggerisce di costruire la rappresentazione del sistema delle reazioni vincolari e degli stati di sollecitazione interna con riferimento ad una **struttura isostatica equivalente**,

- ottenuta dalla struttura originaria eliminando i vincoli corrisponde agli  $n$  parametri iperstatici
- soggetta, oltre che ai carichi esterni, anche ai carichi corrispondenti a valori dei parametri iperstatici ( $X_1, \dots, X_n$ )

## esempio 1



$$X = R_B$$

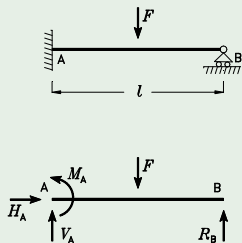


$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ M_A \\ R_B \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F \\ \frac{Fl}{2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_0} + X \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -l \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_1}$$

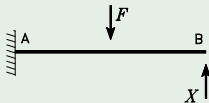
$$\underbrace{\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_0} + X \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_1}$$

# la struttura isostatica equivalente

## esempio 1

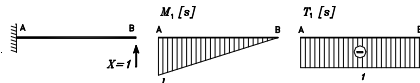
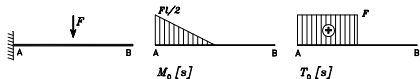


$$X = R_B$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ M_A \\ R_B \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F \\ \frac{Fl}{2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_0} + X \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -l \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_0} + X \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_1}$$



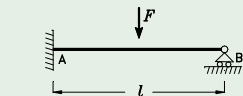
# la struttura isostatica equivalente

## la struttura isostatica equivalente

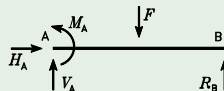
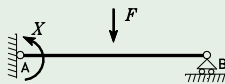
Ciò suggerisce di costruire la rappresentazione del sistema delle reazioni vincolari e degli stati di sollecitazione interna con riferimento ad una **struttura isostatica equivalente**,

- ottenuta dalla struttura originaria eliminando i vincoli corrisponde agli  $n$  parametri iperstatici
- soggetta, oltre che ai carichi esterni, anche ai carichi corrispondenti a valori dei parametri iperstatici ( $X_1, \dots, X_n$ )

## esempio 2



$$X = M_A$$

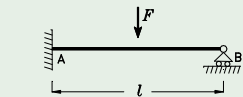


$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ M_A \\ R_B \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F/2 \\ 0 \\ F/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_0} + X \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ +1/l \\ 1 \\ -1/l \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_1}$$

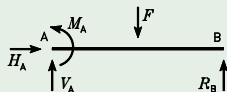
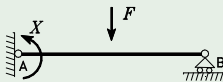
$$\underbrace{\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_0} + X \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_1}$$

## la struttura isostatica equivalente

## esempio 2

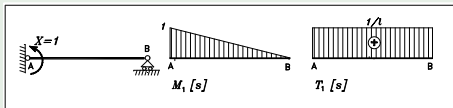
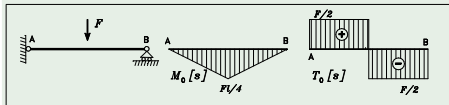


$$X = M_A$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ M_A \\ R_B \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F/2 \\ 0 \\ F/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_0} + X \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ +1/l \\ 1 \\ -1/l \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_0} + X \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_1}$$



# la struttura isostatica equivalente

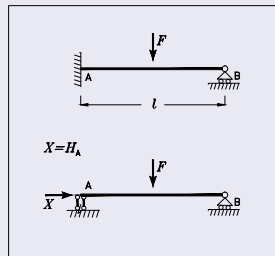
## la struttura isostatica equivalente

Ciò suggerisce di costruire la rappresentazione del sistema delle reazioni vincolari e degli stati di sollecitazione interna con riferimento ad una **struttura isostatica equivalente**,

- ottenuta dalla struttura originaria eliminando i vincoli corrisponde agli  $n$  parametri iperstatici
- soggetta, oltre che ai carichi esterni, anche ai carichi corrispondenti a valori dei parametri iperstatici ( $X_1, \dots, X_n$ )

## osservazione 1

Le scelte delle incognite iperstatiche, pur potendo essere realizzata in infiniti modi diversi, non può essere del tutto arbitraria in quanto l'eliminazione dei vincoli connessi alla scelta delle incognite **deve condurre ad un struttura isostatica**, la sola per la quale risultano staticamente determinate le soluzioni ( $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ ).





# la struttura isostatica equivalente

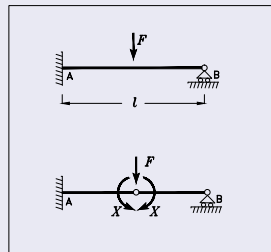
## la struttura isostatica equivalente

Ciò suggerisce di costruire la rappresentazione del sistema delle reazioni vincolari e degli stati di sollecitazione interna con riferimento ad una **struttura isostatica equivalente**,

- ottenuta dalla struttura originaria eliminando i vincoli corrisponde agli  $n$  parametri iperstatici
- soggetta, oltre che ai carichi esterni, anche ai carichi corrispondenti a valori dei parametri iperstatici ( $X_1, \dots, X_n$ )

## osservazione 2

La scelta del parametro iperstatico non necessariamente deve corrispondere ad un valore delle reazioni dei vincoli esterni, ma può anche ricadere su parametri statici (momento, taglio, ecc) di sezioni interne. In tal caso la struttura isostatica equivalente è definita mediante l'introduzione di opportune sconnessioni interne.



# gli schemi statici di calcolo

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_o + X_1 \mathbf{R}_1 + X_2 \mathbf{R}_2 + \dots + X_n \mathbf{R}_n \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_o + X_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + X_2 \boldsymbol{\sigma}_2 + \dots + X_n \boldsymbol{\sigma}_n \end{aligned}, \quad \forall X_i \in (-\infty, +\infty)$$

- $(\mathbf{R}_o, \boldsymbol{\sigma}_o)$  sono in equilibrio con i carichi esterni (e per valori nulli dei parametri iperstatici)
- $(\mathbf{R}_i, \boldsymbol{\sigma}_i)$  sono in equilibrio con un valore unitario  $X_i = 1$  del  $i$ -esimo parametro (e valori nulli dei carichi esterni e dei rimanenti parametri iperstatici)

## gli $n + 1$ schemi statici di calcolo

- $(\mathbf{R}_o, \boldsymbol{\sigma}_o)$  sono definiti nello schema statico  $S_0$ , cioè nella struttura isostatica equivalente soggette ai soli carichi esterni (e per valori nulli dei parametri iperstatici)
- $(\mathbf{R}_i, \boldsymbol{\sigma}_i)$  sono definiti nello  $i$ -esimo schema statico  $S_i$ , cioè nella struttura isostatica equivalente soggetta ad un valore unitario  $X_i = 1$  del  $i$ -esimo parametro (e valori nulli dei carichi esterni e dei rimanenti parametri iperstatici)

# le equazioni di congruenza

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_o + X_1 \mathbf{R}_1 + X_2 \mathbf{R}_2 + \dots + X_n \mathbf{R}_n \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_o + X_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + X_2 \boldsymbol{\sigma}_2 + \dots + X_n \boldsymbol{\sigma}_n \end{aligned}, \quad \forall X_i \in (-\infty, +\infty)$$

I valori dei parametri iperstatici  $\{X_1, \dots, X_n\}$  sono indeterminati sulla base delle sole equazioni di equilibrio di corpo rigido.

La loro determinazione, per definire univocamente la soluzione, necessita di ulteriori equazioni.

Tali equazioni sono ricavate considerando la deformabilità elastica degli elementi del sistema, nel rispetto della congruenza cinematica delle relative configurazioni.

Su tale procedimento si basa fundamentalmente il *metodo delle forze*.

# le equazioni di congruenza

equivalenza statica ed equivalenza cinematica

Al generico sistema di tensioni equilibrate  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \sum_{i=1}^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i$  corrisponde, per il legame elastico e cinematico, un campo di spostamenti della deformata elastica

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \sum_{i=1}^n X_i \mathbf{u}_i ,$$

compatibile con i vincoli cinematici del sistema isostatico ma che viola alcuni dei vincoli cinematici dell'iniziale sistema iperstatico.

In altri termini, ...

la struttura isostatica equivalente usata nella rappresentazione statica è equivalente solo dal punto di vista statico alla struttura iniziale del problema.

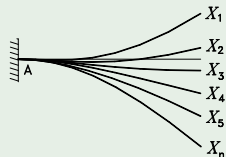
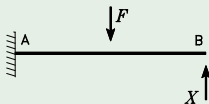
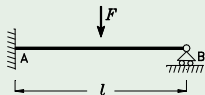
Essa non risulta però equivalente dal punto di vista cinematico, in quanto presenterà in generale configurazioni deformate elastiche che violano proprio i vincoli presenti nella struttura iniziale ma soppressi nella struttura isostatica equivalente.

Il rispetto di "tutti" i vincoli cinematici fornisce un ulteriore insieme di equazioni (di congruenza) che determina univocamente i valori delle incognite iperstatiche e, quindi, la soluzione (equilibrata e congruente) del problema.

# le condizioni di equivalenza cinematica

equivalenza statica ed equivalenza cinematica

## esempio 1 (continuazione)



Calcolo spostamento  $\Delta$  (di incompatibilità cinematica) mediante il PLV:

- il sistema fittizio duale corrisponde allo schema statico  $S_1$ , quindi  $\{\delta N, \delta T, \delta M\} \equiv \{N_1, T_1, M_1\}$
- l'equazione dei lavori virtuali fornisce:

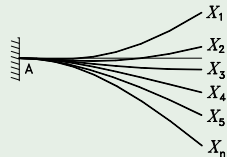
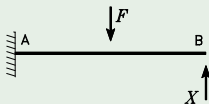
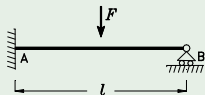
$$\Delta \approx \int_0^l \delta M \frac{M}{EJ} ds = \int_0^l M_1 \frac{M_o + XM_1}{EJ} ds = \left( \int_0^l \frac{M_1 M_o}{EJ} ds \right) + X \left( \int_0^l \frac{M_1 M_1}{EJ} ds \right)$$

$$\underbrace{\left( \int_0^l \frac{M_1 M_o}{EJ} ds \right)}_{\Delta_0} + X \underbrace{\left( \int_0^l \frac{M_1 M_1}{EJ} ds \right)}_{\Delta_1} = \underbrace{\left( -\frac{5}{48} \frac{Fl^3}{EJ} \right)}_{\Delta_0} + X \underbrace{\left( \frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ} \right)}_{\Delta_1} \neq 0$$

# le condizioni di equivalenza cinematica

equivalenza statica ed equivalenza cinematica

## esempio 1 (continuazione)



Calcolo spostamento  $\Delta$  (di incompatibilità cinematica) mediante il PLV:

$$\Delta \approx \underbrace{\left(-\frac{5}{48} \frac{F l^3}{EJ}\right)}_{\Delta_0} + X \underbrace{\left(\frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ}\right)}_{\Delta_1} \neq 0$$

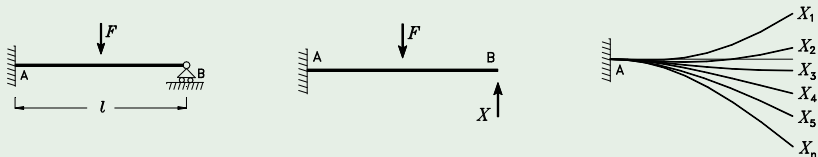
$\Delta_0$  spostamento nello schema S0;

$\Delta_1$  spostamento nello schema S1.

# le condizioni di equivalenza cinematica

equivalenza statica ed equivalenza cinematica

## esempio 1 (continuazione)



## la condizione di congruenza cinematica / la soluzione

$$\Delta \approx \left( -\frac{5}{48} \frac{Fl^3}{EJ} \right) + X \left( \frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ} \right) = 0 \Rightarrow X = -\frac{\left( -\frac{5}{48} \frac{Fl^3}{EJ} \right)}{\left( \frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ} \right)} = \frac{5}{16} F$$

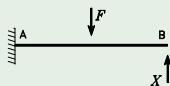
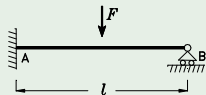
## la ricostruzione finale della soluzione

$$N(s) = N_o(s) + \left( \frac{5}{16} F \right) N_1(s) \quad , \quad T(s) = T_o(s) + \left( \frac{5}{16} F \right) T_1(s) \quad , \quad M(s) = M_o(s) + \left( \frac{5}{16} F \right) M_1(s)$$

# le condizioni di equivalenza cinematica

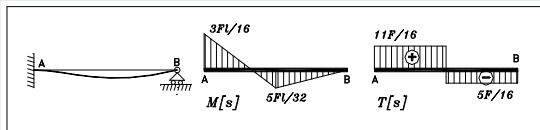
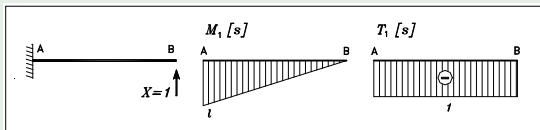
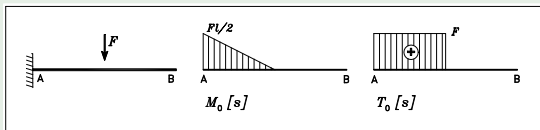
## equivalenza statica ed equivalenza cinematica

### esempio 1 (continuazione)



$$\underbrace{\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}}_{\sigma} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_o \\ T_o \\ M_o \end{bmatrix}}_{\sigma_o} + X \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix}}_{\sigma_1}$$

$$X = \frac{5}{16} F$$

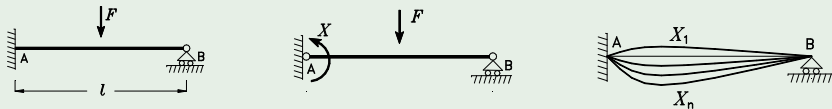




# le equazioni di congruenza

equivalenza statica ed equivalenza cinematica

## esempio 2 (continuazione)



Calcolo rotazione  $\varphi$  in A (di incompatibilità cinematica) mediante il PLV:

- il sistema fittizio duale corrisponde allo schema statico  $S_1$ , quindi  $\{\delta N, \delta T, \delta M\} \equiv \{N_1, T_1, M_1\}$
- l'equazione dei lavori virtuali fornisce:

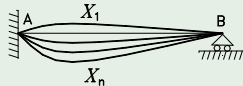
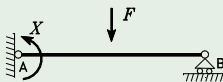
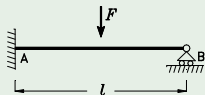
$$\varphi \approx \int_0^l \delta M \frac{M}{EJ} ds = \int_0^l M_1 \frac{M_o + XM_1}{EJ} ds = \left( \int_0^l \frac{M_1 M_o}{EJ} ds \right) + X \left( \int_0^l \frac{M_1 M_1}{EJ} ds \right)$$

$$\underbrace{\left( \int_0^l \frac{M_1 M_o}{EJ} ds \right)}_{\varphi_0} + X \underbrace{\left( \int_0^l \frac{M_1 M_1}{EJ} ds \right)}_{\varphi_1} = \underbrace{\left( -\frac{1}{16} \frac{F l^2}{EJ} \right)}_{\varphi_0} + X \underbrace{\left( \frac{1}{3} \frac{l}{EJ} \right)}_{\varphi_1} \neq 0$$

# le equazioni di congruenza

equivalenza statica ed equivalenza cinematica

## esempio 2 (continuazione)



Calcolo rotazione  $\varphi$  (di incompatibilità cinematica) mediante il PLV:

$$\varphi \approx \underbrace{\left(-\frac{1}{16} \frac{F l^2}{EJ}\right)}_{\varphi_0} + X \underbrace{\left(\frac{1}{3} \frac{l}{EJ}\right)}_{\varphi_1} \neq 0$$

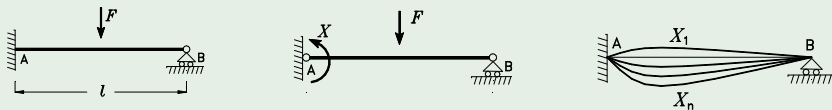
$\varphi_0$  rotazione nello schema S0;

$\varphi_1$  rotazione nello schema S1.

# le equazioni di congruenza

equivalenza statica ed equivalenza cinematica

## esempio 2 (continuazione)



## la condizione di congruenza cinematica / la soluzione

$$\varphi \approx \left(-\frac{1}{16} \frac{Fl^2}{EJ}\right) + X \left(\frac{1}{3} \frac{l}{EJ}\right) = 0 \Rightarrow X = -\frac{\left(-\frac{1}{16} \frac{Fl^2}{EJ}\right)}{\left(\frac{1}{3} \frac{l}{EJ}\right)} = \frac{3}{16} Fl$$

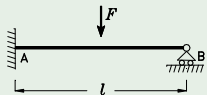
## la ricostruzione finale della soluzione

$$N(s) = N_o(s) + \left(\frac{3}{16} Fl\right) N_1(s), \quad T(s) = T_o(s) + \left(\frac{3}{16} Fl\right) T_1(s), \quad M(s) = M_o(s) + \left(\frac{3}{16} Fl\right) M_1(s)$$

# le equazioni di congruenza

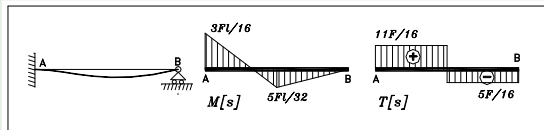
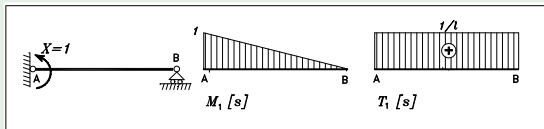
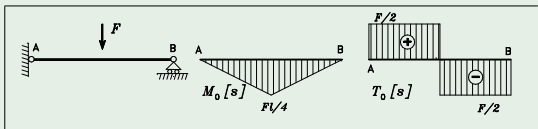
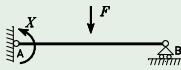
equivalenza statica ed equivalenza cinematica

## esempio 2 (continuazione)



$$\underbrace{\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}}_{\sigma} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_o \\ T_o \\ M_o \end{bmatrix}}_{\sigma_o} + X \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix}}_{\sigma_1}$$

$$X = \frac{3}{16} F l$$



# le equazioni di congruenza

alcune osservazioni

la determinazione delle incognite iperstatiche permette di individuare, tra le infinite soluzioni equilibrare  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\sigma}_1$ , l'**unica** che realizzi anche la congruenza cinematica per la struttura elastica iperstatica del problema.

Pur variando la scelta della incognita iperstatica, e quindi del procedimento di risoluzione seguito, i valori trovati per le incognite iperstatiche nei due casi considerati ricostruiscono, mediante le

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\sigma}_1, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_0 + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\epsilon}_1 \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{X}\boldsymbol{u}_1$$

la *stessa soluzione*  $\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{u}\}$  (equilibrata e congruente) del problema elasto-statico.

Le precedenti osservazioni sono in accordo con la **proprietà di unicità** della soluzione elastica nella teoria del I° ordine.

La metodologia di risoluzione seguita rientra nel **metodo delle forze**

Nel seguito si provvederà a fornire una rappresentazione generalizzata del metodo delle forze, estendendo il metodo a strutture  $n$  volte iperstatiche, in presenza o meno di cedimenti.

# il metodo delle forze

## formulazione e passi dell'algorithm

Il metodo delle forze definisce un algorithm di risoluzione del problema elastico-lineare relativo a strutture iperstatiche composte da elementi monodimensionali (telai e travi reticolari).

### la formulazione

Il metodo segue una formulazione in termini di tensione, ricercando tra tutti i possibili campi di tensioni generalizzate  $\sigma \equiv (M, N, T)$  in equilibrio con i carichi esterni, l'unica soluzione cui corrisponde, tramite il legame costitutivo elasto-lineare

$$\epsilon = \mathcal{F}\sigma \Leftrightarrow \left( \epsilon = \frac{N}{EA}, \gamma = \frac{T}{GA^*}, \chi = \frac{M}{EJ} \right),$$

deformazioni generalizzate  $\epsilon \equiv (\epsilon, \gamma, \chi)$  e spostamenti  $\mathbf{u} \equiv (u, w, \varphi)$  compatibili con i vincoli cinematici del sistema.

### i passi dell'algorithm

Il metodo si articola nei passi:

- 1 Rappresentazione del generale campo di tensione  $\sigma$  in equilibrio con i carichi esterni;
- 2 Scrittura e soluzione delle condizioni di congruenza cinematica del problema.

# il metodo delle forze

## i passi dell'algoritmo

### i passi dell'algoritmo

- 1 Rappresentazione del generale campo di tensione  $\sigma$  in equilibrio con i carichi esterni;
- 2 Scrittura e soluzione delle condizioni di congruenza cinematica del problema.

### passo 1: gli $n + 1$ schemi statici di calcolo

Per un problema ad  $n$  gradi di iperstaticità, ...

le **incognite iperstatiche**: scelte le incognite iperstatiche  $\{X_1, \dots, X_n\}$  e definito un sistema isostatico equivalente

la **rappresentazione**: il **passo 1** è realizzato mediante una rappresentazione del tipo

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_{i=1}^n X_i \sigma_i$$

- $\sigma_0$  è la soluzione dello schema statico  $S_0$ , cioè in equilibrio con i soli carichi esterni (e per valori nulli dei parametri iperstatici)
- $\sigma_j$  è la soluzione dello schema statico  $S_j$ , cioè in equilibrio con un valore unitario  $X_j = 1$  del  $j$ -esimo parametro (e valori nulli dei carichi esterni e dei rimanenti parametri iperstatici)

# il metodo delle forze

## i passi dell'algoritmo

### i passi dell'algoritmo

- 1 Rappresentazione del generale campo di tensione  $\sigma$  in equilibrio con i carichi esterni;
- 2 Scrittura e soluzione delle condizioni di congruenza cinematica del problema.

### passo 1: gli $n + 1$ schemi statici di calcolo

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_{i=1}^n X_i \sigma_i$$

### osservazioni

- La scelta delle incognite iperstatiche, e quindi del sistema isostatico equivalente, costituisce una fase molto delicata del problema, proprio perché la scelta non è univoca né pienamente riconducibile a precise regole da seguire.
- In particolare si deve porre una certa attenzione a non ridursi a sistemi degeneri, labili quindi, invece che isostatici.



# il metodo delle forze

## i passi dell'algoritmo

### i passi dell'algoritmo

- 1 Rappresentazione del generale campo di tensione  $\sigma$  in equilibrio con i carichi esterni;
- 2 Scrittura e soluzione delle condizioni di congruenza cinematica del problema.

### passo 2: le $n$ condizioni di congruenza

- Le configurazioni deformate della struttura isostatica equivalente, associate alla rappresentazione  $\sigma = \sigma_0 + \sum_{i=1}^n X_i \sigma_i$  del campo tensionale, violano gli  $n$  vincoli presenti nella struttura iniziale ma soppressi nella struttura resa isostatica.
- Tali vincoli cinematici vanno pertanto imposti espressamente: ciò fornisce un sistema di  $n$  equazioni (di congruenza) che determina i valori delle  $n$  incognite iperstatiche  $\{X_1, \dots, X_n\}$  e, quindi, definisce univocamente la soluzione elastica del problema.

### formulazione variazionale delle condizioni di congruenza

Una forma elegante e concisa di rappresentare le  $n$  equazioni di congruenza del problema è attraverso la formulazione variazionale fornita dal *principio di minimo della energia complementare totale*

# il metodo delle forze

le condizioni di congruenza in forma variazionale

## principio di minimo dell'energia complementare totale

Tra tutti i campi di tensione equilibrati con i carichi esterni, la soluzione del problema elastica è quella che rende minimo il funzionale della energia complementare totale

$$\Pi_c[\boldsymbol{\sigma}] = \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\sigma}^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma} dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds = \min_{\boldsymbol{\sigma}}$$

nel caso in esame ...

- Il sistema delle tensioni equilibrate ha una rappresentazione lineare in termini delle incognite iperstatiche del problema

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i$$

- l'energia complementare totale risulta una funzione (quadratica) delle sole incognite iperstatiche  $\{X_1, \dots, X_n\}$ .

$$\Pi_c[X_1, \dots, X_n] = \frac{1}{2} \int_B (\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i)^t \mathcal{F} (\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_j^n X_j \boldsymbol{\sigma}_j) dv - \int_{C_u} ((\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i) \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds$$

# il metodo delle forze

le condizioni di congruenza in forma variazionale

## il funzionale dell'energia complementare totale

$$\Pi_c[X_1, \dots, X_n] = \frac{1}{2} \int_B (\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i)^t \mathcal{F} (\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i) dv - \int_{C_u} \left( (\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i) \mathbf{n} \right)^t \bar{\mathbf{u}} ds$$

- le condizioni di stazionarietà/minimo del funzionale energetico  $\Pi_c[X_1, \dots, X_n]$

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \Pi_c[X_1, \dots, X_n] = 0, \quad \{j = 1, \dots, n\}$$

- alcuni sviluppi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_j} \Pi_c[X_1, \dots, X_n] &= \int_B \frac{\partial}{\partial X_j} (\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i)^t \mathcal{F} (\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i) dv \\ &\quad - \int_{C_u} \left( \frac{\partial}{\partial X_j} (\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i) \mathbf{n} \right)^t \bar{\mathbf{u}} ds \\ &= \int_B (\delta_{ij} \boldsymbol{\sigma}_i)^t \mathcal{F} (\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i) dv - \int_{C_u} \left( (\delta_{ij} \boldsymbol{\sigma}_i) \mathbf{n} \right)^t \bar{\mathbf{u}} ds \end{aligned}$$

# il metodo delle forze

le condizioni di congruenza in forma variazionale

## il funzionale dell'energia complementare totale

$$\Pi_c[X_1, \dots, X_n] = \frac{1}{2} \int_B (\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i)^t \mathcal{F} (\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i) dv - \int_{C_u} ((\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i) \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds$$

- le condizioni di stazionarietà/minimo del funzionale energetico  $\Pi_c[X_1, \dots, X_n]$

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \Pi_c[X_1, \dots, X_n] = 0, \quad \{j = 1, \dots, n\}$$

- alcuni sviluppi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_j} \Pi_c[X_1, \dots, X_n] &= \int_B (\delta_{ij} \boldsymbol{\sigma}_i)^t \mathcal{F} (\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i) dv - \int_{C_u} ((\delta_{ij} \boldsymbol{\sigma}_i) \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \\ &= \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} (\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i) dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_j \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \\ &= \left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_o dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_j \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right) + \sum_{i=1}^n X_i \left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_i dv \right) \end{aligned}$$

# il metodo delle forze

le condizioni di congruenza in forma variazionale

## il funzionale dell'energia complementare totale

$$\Pi_c[X_1, \dots, X_n] = \frac{1}{2} \int_B (\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i)^t \mathcal{F} (\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i) dv - \int_{C_u} ((\boldsymbol{\sigma}_o + \sum_i^n X_i \boldsymbol{\sigma}_i) \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds$$

- le condizioni di stazionarietà/minimo del funzionale energetico  $\Pi_c[X_1, \dots, X_n]$

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \Pi_c[X_1, \dots, X_n] = 0, \quad \{j = 1, \dots, n\}$$

- alcuni sviluppi

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \Pi_c[X_1, \dots, X_n] = \left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_o dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_j \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right) + \sum_{i=1}^n X_i \left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_i dv \right)$$

## le condizioni di congruenza

$$\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_o dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_j \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right) + \sum_{i=1}^n X_i \left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_i dv \right) = 0, \quad \{j = 1, \dots, n\}$$

# il metodo delle forze

## le condizioni di congruenza

### le condizioni di congruenza

$$\underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_0 dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_j \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right)}_{f_{0j}} + \sum_{i=1}^n X_i \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_i dv \right)}_{f_{ij}} = 0, \quad \{j = 1, \dots, n\}$$

per esteso:

$$(1) \quad \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_1^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_0 dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right)}_{f_{01}} + X_1 \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_1^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_1 dv \right)}_{f_{11}} + \dots + X_n \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_1^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_n dv \right)}_{f_{1n}} = 0$$

...

$$(j) \quad \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_0 dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_j \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right)}_{f_{0j}} + X_1 \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_1 dv \right)}_{f_{j1}} + \dots + X_n \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_n dv \right)}_{f_{jn}} = 0$$

...

$$(n) \quad \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_n^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_0 dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_n \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right)}_{f_{0n}} + X_1 \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_n^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_1 dv \right)}_{f_{n1}} + \dots + X_n \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_n^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_n dv \right)}_{f_{nn}} = 0$$

# il metodo delle forze

## le condizioni di congruenza

### le condizioni di congruenza

$$\underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_0 dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_j \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right)}_{f_{0j}} + \sum_{i=1}^n X_i \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_i dv \right)}_{f_{ij}} = 0, \quad \{j = 1, \dots, n\}$$

per esteso:

$$(1) \quad \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_1^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_0 dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right)}_{f_{01}} + X_1 \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_1^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_1 dv \right)}_{f_{11}} + \dots + X_n \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_1^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_n dv \right)}_{f_{1n}} = 0$$

...

$$(j) \quad \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_0 dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_j \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right)}_{f_{0j}} + X_1 \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_1 dv \right)}_{f_{j1}} + \dots + X_n \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_n dv \right)}_{f_{jn}} = 0$$

...

$$(n) \quad \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_n^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_0 dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_n \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right)}_{f_{0n}} + X_1 \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_n^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_1 dv \right)}_{f_{n1}} + \dots + X_n \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_n^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_n dv \right)}_{f_{nn}} = 0$$

# il metodo delle forze

## le condizioni di congruenza

### le condizioni di congruenza

$$\underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_0 dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_j \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right)}_{f_{0j}} + \sum_{i=1}^n X_i \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_i dv \right)}_{f_{ij}} = 0, \quad \{j = 1, \dots, n\}$$

per esteso:

$$(1) \quad \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_1^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_0 dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right)}_{f_{01}} + X_1 \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_1^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_1 dv \right)}_{f_{11}} + \dots + X_n \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_1^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_n dv \right)}_{f_{1n}} = 0$$

...

$$(j) \quad \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_0 dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_j \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right)}_{f_{0j}} + X_1 \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_1 dv \right)}_{f_{1j}} + \dots + X_n \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_n dv \right)}_{f_{nj}} = 0$$

...

$$(n) \quad \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_n^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_0 dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_n \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right)}_{f_{0n}} + X_1 \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_n^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_1 dv \right)}_{f_{1n}} + \dots + X_n \underbrace{\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_n^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_n dv \right)}_{f_{nn}} = 0$$



# il metodo delle forze

le condizioni di congruenza mediante il PLV

È possibile pervenire direttamente alle precedenti equazioni di congruenza mediante il Principio dei Lavori Virtuali:

- computando mediante il PLV le componenti cinematiche  $(\Delta_1, \dots, \Delta_j, \dots, \Delta_n)$  duali delle incognite iperstatiche  $(X_1, \dots, X_j, \dots, X_n)$
- imponendo espressamente la realizzazione dei vincoli cinematici del problema mediante le

$$\Delta_1 = 0, \dots, \Delta_j = 0, \dots, \Delta_n = 0$$

## computo del generico parametro $\Delta_j$

mediante l'equazione dei lavori virtuali e facendo uso di un sistema di forze fittizio definito da un parametro statico unitario duale della componente cinematica cercata

$$1 \cdot \Delta_j = \int_B \delta \sigma^t \mathcal{F} \sigma dv - \int_{C_u} (\delta \sigma \sigma_j \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds$$

Osservando che

- lo schema fittizio delle forze corrisponde esattamente allo schema statico  $S_j$ , per cui  $\delta \sigma \equiv \sigma_j$ ,
- per l'equilibrio  $\sigma = \sigma_0 + \sum_i X_i \sigma_i$ ,

# il metodo delle forze

le condizioni di congruenza mediante il PLV

È possibile pervenire direttamente alle precedenti equazioni di congruenza mediante il Principio dei Lavori Virtuali:

- computando mediante il PLV le componenti cinematiche  $(\Delta_1, \dots, \Delta_j, \dots, \Delta_n)$  duali delle incognite iperstatiche  $(X_1, \dots, X_j, \dots, X_n)$
- imponendo espressamente la realizzazione dei vincoli cinematici del problema mediante le

$$\Delta_1 = 0, \dots, \Delta_j = 0, \dots, \Delta_n = 0$$

## computo del generico parametro $\Delta_j$

mediante l'equazione dei lavori virtuali e facendo uso di un sistema di forze fittizio definito da un parametro statico unitario duale della componente cinematica cercata

$$1 \cdot \Delta_j = \int_B \sigma_j^t \mathcal{F}(\sigma_0 + \sum_i X_i \sigma_i) dv - \int_{C_u} (\delta \sigma \sigma_j \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds$$

Osservando che

- lo schema fittizio delle forze corrisponde esattamente allo schema statico  $S_j$ , per cui  $\delta \sigma \equiv \sigma_j$ ,
- per l'equilibrio  $\sigma = \sigma_0 + \sum_i X_i \sigma_i$ ,

# il metodo delle forze

le condizioni di congruenza mediante il PLV

È possibile pervenire direttamente alle precedenti equazioni di congruenza mediante il Principio dei Lavori Virtuali:

- computando mediante il PLV le componenti cinematiche  $(\Delta_1, \dots, \Delta_j, \dots, \Delta_n)$  duali delle incognite iperstatiche  $(X_1, \dots, X_j, \dots, X_n)$
- imponendo espressamente la realizzazione dei vincoli cinematici del problema mediante le

$$\Delta_1 = 0, \dots, \Delta_j = 0, \dots, \Delta_n = 0$$

computo del generico parametro  $\Delta_j$

$$\Delta_j = \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_0 + X_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + \dots + X_n \boldsymbol{\sigma}_n) dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_j \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds$$

la condizione di congruenza ( $\Delta_j = 0$ ) è realizzata proprio dalla  $j$ -esima equazione del sistema di precedentemente ricavato mediante formulazione variazionale.

$$\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_0 dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_j \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right) + \sum_{i=1}^n X_i \left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_i dv \right) = 0$$

# il metodo delle forze

le condizioni di congruenza per traviature piane

Per problemi piani relativi alle strutture intelaiate da noi considerate, il funzionale dell'energia complementare totale assume l'espressione

$$\begin{aligned}\Pi_c[\boldsymbol{\sigma}] &= \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\sigma}^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma} dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \\ &\equiv \frac{1}{2} \sum_{\text{travi}} \int_l \left\{ \frac{M^2}{EJ} + \frac{N^2}{EA} + \frac{T^2}{GA^*} \right\} ds + \frac{1}{2} \sum_{\text{molle}} \frac{S^2}{k} - \sum_{\text{ced}} \mathbf{R}^t \bar{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

che evidenzia

- l'energia di deformazione degli elementi a deformabilità distribuita (travi elastiche)
- l'energia di deformazione degli elementi a deformabilità concentrata (molle)
- il lavoro compiuto dalle reazioni dei vincoli per i cedimenti assegnati  $\bar{\mathbf{u}}$ .

# il metodo delle forze

le condizioni di congruenza per traviature piane

Per problemi piani relativi alle strutture intelaiate da noi considerate, il funzionale dell'energia complementare totale assume l'espressione

$$\Pi_c[\boldsymbol{\sigma}] \equiv \frac{1}{2} \sum_{\text{travi}} \int_l \left\{ \frac{M^2}{EJ} + \frac{N^2}{EA} + \frac{T^2}{GA^*} \right\} ds + \frac{1}{2} \sum_{\text{molle}} \frac{S^2}{k} - \sum_{\text{ced}} \mathbf{R}^t \bar{\mathbf{u}}$$

Le equazioni di congruenza ...

$$\left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_0 dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_j \cdot \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right) + \sum_{i=1}^n \chi_i \left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_i dv \right) = 0, \quad \{j = 1, \dots, n\}$$

... sono pertanto le seguenti:

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{\text{travi}} \int_l \left\{ \frac{M_0 M_j}{EJ} + \frac{N_0 N_j}{EA} + \frac{T_0 T_j}{GA^*} \right\} ds + \sum_{\text{molle}} \frac{S_0 S_j}{k} - \sum_{\text{ced}} \mathbf{R}_j^t \bar{\mathbf{u}} \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \chi_i \left( \sum_{\text{travi}} \int_l \left\{ \frac{M_i M_j}{EJ} + \frac{N_i N_j}{EA} + \frac{T_i T_j}{GA^*} \right\} ds + \sum_{\text{molle}} \frac{S_i S_j}{k} \right) = 0 \end{aligned}$$

$\{j = 1, \dots, n\}$

# il metodo delle forze

le condizioni di congruenza per traviature piane

$$\left( \sum_{\text{travi}} \int_l \left\{ \frac{M_0 M_j}{EJ} + \frac{N_0 N_j}{EA} + \frac{T_0 T_j}{GA^*} \right\} ds + \sum_{\text{molle}} \frac{S_0 S_j}{k} - \sum_{\text{ced}} \mathbf{R}_j^t \bar{\mathbf{u}} \right) + \sum_{i=1}^n X_i \left( \sum_{\text{travi}} \int_l \left\{ \frac{M_i M_j}{EJ} + \frac{N_i N_j}{EA} + \frac{T_i T_j}{GA^*} \right\} ds + \sum_{\text{molle}} \frac{S_i S_j}{k} \right) = 0$$

$\{j = 1, \dots, n\}$

## osservazioni

- Per strutture composte da travi sufficientemente snelle, il contributo energetico dovuto alla deformabilità tagliante è trascurabile rispetto a quello dovuto alla deformabilità flettente (ipotesi di Bernoulli), semplificando le equazioni di congruenza
- Nelle stesse ipotesi, in presenza di flessione, è molte volte trascurabile pure il contributo energetico dovuto alla deformabilità assiale da sforzo normale
- Diverso è il caso di aste soggette a sola deformazione assiale (per esempio, aste di traviature reticolari), dove il relativo contributo energetico è l'unico presente ed è pertanto non trascurabile, pena la trasformazione dell'asta di un vincolo rigido.
- In assenza di molle e cedimenti scompare anche il relativo contributo

# il metodo delle forze

le condizioni di congruenza per traviature piane

## Le equazioni di congruenza di Müller–Breslau

$$\left( \sum_{\text{travi}} \int_l \left\{ \frac{M_0 M_j}{EJ} \right\} ds \right) + \sum_{i=1}^n X_i \left( \sum_{\text{travi}} \int_l \left\{ \frac{M_i M_j}{EJ} \right\} ds \right) = 0$$

$\{j = 1, \dots, n\}$

- Per strutture composte da travi sufficientemente snelle, trascurando il contributo energetico legato alla deformabilità tagliante e assiale
- In assenza di cedimenti e molle.

# il metodo delle forze

## aspetti operativi

Dal punto di vista operativo, il metodo delle forze si sviluppa pertanto nelle seguenti fasi:

- definizione di un sistema isostatico equivalente esplicitando le incognite iperstatiche  $\{X_1, \dots, X_n\}$ ;
- costruzione dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione degli  $n + 1$  schemi statici  $S_0, S_1, \dots, S_n$

$$\{(N_0, T_0, M_0), (N_1, T_1, M_1), \dots, (N_n, T_n, M_n)\}$$

- calcolo degli integrali del tipo

$$\int M_i M_0 ds, \quad \int M_i M_j ds, \quad \{(i, j) = 1, \dots, n\}$$

e determinazione dei coefficienti

$$f_{i0} = \sum_{\text{travi}} \int_l \frac{M_i M_0}{EJ} ds + \dots, \quad f_{ij} = \sum_{\text{travi}} \int_l \frac{M_i M_j}{EJ} ds + \dots, \quad \{(i, j) = 1, \dots, n\}$$

- soluzione del sistema di  $n$  equazioni lineari (di congruenza) nelle incognite iperstatiche  $\{X_1, \dots, X_n\}$ ;

$$f_{j0} + \sum_{i=1}^n X_i f_{j0} = 0, \quad \{j = 1, \dots, n\}$$

- ricostruzione della soluzione mediante combinazione lineare dei diagrammi parziali

$$N = N_0 + \sum_i^n X_i N_i, \quad T = T_0 + \sum_i^n X_i T_i, \quad M = M_0 + \sum_i^n X_i M_i,$$



## 5 Il metodo delle forze

- Rappresentazione di strutture iperstatiche
- Le equazioni di congruenza
- I passi del metodo delle forze
- Formulazione condizioni di congruenza
- **Le distorsioni**
- Esempi di applicazioni

# Le distorsioni

una rivisitazione del legame costitutivo elastico-lineare

il legame costitutivo ...

$$\sigma = \mathcal{C}\epsilon \Leftrightarrow \epsilon = \mathcal{F}\sigma$$

... prevede che lo stato deformativo della struttura ...

*dipenda* esclusivamente dalla variazione dello stato tensionale al variare dei carichi,  
*si annulli* una volta rimossi i carichi esterni.

Esistono però situazioni particolari in cui tali ipotesi non sono verificate: cioè all'assenza di forze esterne non corrisponde l'assenza di deformazioni.

un esempio

- Un anello nel quale, operati due tagli, ne venga asportato un tronco di materiale saldando successivamente le due facce dopo averle forzate a combaciare.
- È chiaro che la struttura risulterà alla fine sede di deformazioni, pur in assenza di forze esterne applicate.

un arricchimento del legame costitutivo

Un modo semplice per rappresentare tali casi è un arricchimento del legame costitutivo elastico-lineare prevedendo che le deformazioni totali siano somma di due aliquote

# Le distorsioni

una rivisitazione del legame costitutivo elastico-lineare

il legame costitutivo ...

$$\sigma = \mathcal{C}\epsilon \Leftrightarrow \epsilon = \mathcal{F}\sigma$$

... prevede che lo stato deformativo della struttura ...

*dipenda* esclusivamente dalla variazione dello stato tensionale al variare dei carichi,  
*si annulli* una volta rimossi i carichi esterni.

Esistono però situazioni particolari in cui tali ipotesi non sono verificate: cioè all'assenza di forze esterne non corrisponde l'assenza di deformazioni.

un arricchimento del legame costitutivo

Un modo semplice per rappresentare tali casi è un arricchimento del legame costitutivo elasto-lineare prevedendo che le deformazioni totali siano somma di due aliquote

$$\epsilon = \epsilon^e + \bar{\epsilon} \quad , \quad \epsilon^e = \mathcal{F}\sigma$$

- $\epsilon$  sono le deformazioni elastiche "reversibili", legate tramite il legame costitutivo alla variazione dello stato tensionale  $\sigma$  lungo la storia di carico;
- $\bar{\epsilon}$  sono le *distorsioni*, cioè deformazioni preimprese e indipendenti dalle variazioni delle tensioni e dei carichi.

# Le distorsioni

una rivisitazione del legame costitutivo elasto-lineare

il legame costitutivo ...

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}\boldsymbol{\epsilon} \Leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \mathcal{F}\boldsymbol{\sigma}$$

... prevede che lo stato deformativo della struttura ...

*dipenda* esclusivamente dalla variazione dello stato tensionale al variare dei carichi,  
*si annulli* una volta rimossi i carichi esterni.

il legame costitutivo elasto-lineare in presenza di distorsioni

in presenza di distorsioni preimprese alla configurazione iniziale di riferimento, il legame costitutivo elasto-lineare è ridefinito nella seguente forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}(\boldsymbol{\epsilon} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathcal{F}\boldsymbol{\sigma}$$

# Le distorsioni

formulazioni integrali e variazionali delle condizioni di equilibrio

il legame costitutivo elasto-lineare in presenza di distorsioni

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}(\boldsymbol{\epsilon} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathcal{F}\boldsymbol{\sigma}$$

le condizioni di equilibrio

le distorsioni non alterano le relazioni di equilibrio tra tensioni interne  $\boldsymbol{\sigma}$  e carichi esterni  $(\mathbf{q}, \mathbf{f})$  applicati alla struttura

scrittura differenziale  $\mathbf{D}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q} = 0$  su  $B$  &  $(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{N}) = \bar{\mathbf{f}}$  su  $C_f$

scrittura integrale  $\int_B \boldsymbol{\sigma}^t \delta \boldsymbol{\epsilon} dv - \int_B \mathbf{q}^t \delta \mathbf{u} dv - \int_{C_f} \mathbf{f}^t \delta \mathbf{u} ds = 0, \quad \forall \delta \delta \mathbf{u}$

le condizioni di congruenza cinematica

le distorsioni non alterano le relazioni di congruenza cinematica tra deformazioni totali  $\boldsymbol{\epsilon}$  e spostamenti  $\mathbf{u}$  della struttura

scrittura differenziale  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u}$  su  $B$  &  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  su  $C_u$

scrittura integrale  $\int_B \delta \boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\epsilon} dv - \int_{C_u} (\delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds = 0, \quad \forall \delta \boldsymbol{\sigma} \text{ (autotensioni)}$

le condizioni di equilibrio in forma variazionale

la presenza di distorsioni ridefinisce la formulazione variazionale delle condizioni di equilibrio (il principio di minimo della energia potenziale totale)

# Le distorsioni

formulazioni integrali e variazionali delle condizioni di equilibrio

il legame costitutivo elasto-lineare in presenza di distorsioni

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}(\boldsymbol{\epsilon} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathcal{F}\boldsymbol{\sigma}$$

le condizioni di equilibrio

le distorsioni non alterano le relazioni di equilibrio tra tensioni interne  $\boldsymbol{\sigma}$  e carichi esterni  $(\mathbf{q}, \mathbf{f})$  applicati alla struttura

scrittura differenziale  $\mathbf{D}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q} = 0$  su  $B$  &  $(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{N}) = \bar{\mathbf{f}}$  su  $C_f$

scrittura integrale  $\int_B \boldsymbol{\sigma}^t \delta \boldsymbol{\epsilon} dv - \int_B \mathbf{q}^t \delta \mathbf{u} dv - \int_{C_f} \mathbf{f}^t \delta \mathbf{u} ds = 0$ ,  $\forall \delta \mathbf{u}$

le condizioni di equilibrio in forma variazionale

la presenza di distorsioni ridefinisce la formulazione variazionale delle condizioni di equilibrio (il principio di minimo della energia potenziale totale)

- dalla formulazione integrale scritta in termini cinematici

$$\int_B \boldsymbol{\epsilon}^t \mathcal{C} \delta \boldsymbol{\epsilon} dv - \int_B \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^t \mathcal{C} \delta \boldsymbol{\epsilon} dv - \int_B \mathbf{q}^t \delta \mathbf{u} dv - \int_{C_f} \mathbf{f}^t \delta \mathbf{u} ds = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

- l'espressione della energia potenziale totale in presenza di distorsioni

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\epsilon}^t \mathcal{C} \boldsymbol{\epsilon} dv - \int_B \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^t \mathcal{C} \boldsymbol{\epsilon} dv - \int_B \mathbf{q}^t \delta \mathbf{u} dv - \int_{C_f} \mathbf{f}^t \delta \mathbf{u} ds,$$

# Le distorsioni

formulazioni integrali e variazionali delle condizioni di congruenza

il legame costitutivo elasto-lineare in presenza di distorsioni

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}(\boldsymbol{\epsilon} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathcal{F}\boldsymbol{\sigma}$$

le condizioni di congruenza cinematica

le distorsioni non alterano le relazioni di congruenza cinematica tra deformazioni totali  $\boldsymbol{\epsilon}$  e spostamenti  $\mathbf{u}$  della struttura

scrittura differenziale  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u}$  su  $B$  &  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  su  $C_u$

scrittura integrale  $\int_B \delta \boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\epsilon} dv - \int_{C_u} (\delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds = 0$ ,  $\forall \delta \boldsymbol{\sigma}$  (autotensioni)

le condizioni di congruenza cinematica in forma variazionale

la presenza di distorsioni ridefinisce la formulazione variazionale delle condizioni di congruenza (il principio di minimo della energia complementare totale)

- dalla formulazione integrale scritta in termini tensionali

$$\int_B \delta \boldsymbol{\sigma}^t \mathcal{F} \delta \boldsymbol{\sigma} dv + \int_B \delta \boldsymbol{\sigma}^t \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dv - \int_{C_u} (\delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds = 0, \quad \forall \delta \boldsymbol{\sigma} \text{ (autotensioni)}$$

- l'espressione della energia complementare totale in presenza di distorsioni

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\sigma}^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma} dv + \int_B \boldsymbol{\sigma}^t \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds,$$

# Le distorsioni

formulazioni integrali e variazionali delle condizioni di equilibrio e congruenza

il legame costitutivo elasto-lineare in presenza di distorsioni

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}(\boldsymbol{\epsilon} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathcal{F}\boldsymbol{\sigma}$$

formulazioni variazionali in presenza di distorsioni

- espressione della energia potenziale totale

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\epsilon}^t \mathcal{C} \boldsymbol{\epsilon} dv - \int_B \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^t \mathcal{C} \boldsymbol{\epsilon} dv - \int_B \mathbf{q}^t \delta \mathbf{u} dv - \int_{C_f} \mathbf{f}^t \delta \mathbf{u} ds ,$$

- espressione della energia complementare totale

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\sigma}^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma} dv + \int_B \boldsymbol{\sigma}^t \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds ,$$



# Le distorsioni

calcolo spostamenti mediante il PLV e condizioni di congruenza del metodo delle forze

le condizioni di congruenza cinematica integrale e in forma variazionale

- la formulazione integrale scritta in termini tensoriali

$$\int_B \delta \boldsymbol{\sigma}^t \mathcal{F} \boldsymbol{\epsilon} dv + \int_B \boldsymbol{\sigma}^t \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dv - \int_{C_u} (\delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds = 0, \quad \forall \delta \boldsymbol{\sigma} \text{ (autotensioni)}$$

- l'espressione della energia complementare totale

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\sigma}^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma} dv + \int_B \boldsymbol{\sigma}^t \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds,$$

calcolo componenti cinematiche mediante il PLV

$$\begin{aligned} u_c &= \int_B \delta \boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\epsilon} dv - \int_{C_u} (\delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \\ &= \int_B \delta \boldsymbol{\sigma}^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma} dv + \int_B \delta \boldsymbol{\sigma}^t \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dv - \int_{C_u} (\delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \end{aligned}$$

le equazioni di congruenza del metodo delle forze

# Le distorsioni

calcolo spostamenti mediante il PLV e condizioni di congruenza del metodo delle forze

le condizioni di congruenza cinematica integrale e in forma variazionale

- la formulazione integrale scritta in termini tensoriali

$$\int_B \delta \boldsymbol{\sigma}^t \mathcal{F} \boldsymbol{\epsilon} dv + \int_B \boldsymbol{\sigma}^t \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dv - \int_{C_u} (\delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds = 0, \quad \forall \delta \boldsymbol{\sigma} \text{ (autotensioni)}$$

- l'espressione della energia complementare totale

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\sigma}^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma} dv + \int_B \boldsymbol{\sigma}^t \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds,$$

calcolo componenti cinematiche mediante il PLV

$$u_c = \int_B \delta \boldsymbol{\sigma}^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma} dv + \int_B \delta \boldsymbol{\sigma}^t \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dv - \int_{C_u} (\delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds$$

le equazioni di congruenza del metodo delle forze

ridefinizione dei soli termini noti delle equazioni

$$f_{oj} = \left( \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \mathcal{F} \boldsymbol{\sigma}_0 dv + \int_B \boldsymbol{\sigma}_j^t \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dv - \int_{C_u} (\boldsymbol{\sigma}_j \mathbf{n})^t \bar{\mathbf{u}} ds \right)$$

# Le distorsioni per i sistemi di travi

calcolo spostamenti mediante il PLV e condizioni di congruenza del metodo delle forze

## le distorsioni per le travi

Per le travi il più generale sistema di distorsioni è costituito da distribuzioni di scorrimenti assiali, trasversali e curvature  $\{\bar{\epsilon}, \bar{\gamma}, \bar{\chi}\}$ .

## il legame costitutivo elasto-lineare in presenza di distorsioni

$$\epsilon = \bar{\epsilon} + \mathcal{F}\sigma \Leftrightarrow \epsilon = \bar{\epsilon} + \frac{N}{EA}, \quad \gamma = \bar{\gamma} + \frac{T}{GA^*}, \quad \chi = \bar{\chi} + \frac{M}{EJ}$$

## calcolo componenti cinematiche mediante il PLV

$$u_c = \dots + \int_B \delta \sigma^t \bar{\epsilon} dv \Leftrightarrow u_c = \dots + \sum_{\text{travi}} \int_l \{\delta N \bar{\epsilon} + \delta T \bar{\gamma} + \delta M \bar{\chi}\} ds + \dots$$

## i termini noti delle equazioni di congruenza del metodo delle forze

$$f_{oj} = \dots + \int_B \sigma_j^t \bar{\epsilon} dv \Leftrightarrow f_{oj} = \dots + \sum_{\text{travi}} \int_l \{N_j \bar{\epsilon} + T_j \bar{\gamma} + M_j \bar{\chi}\} ds + \dots$$

# Le distorsioni termiche

Un caso particolare di distorsioni sono quelle indotte da variazioni di temperature sulla struttura o su parti della struttura.

- In materiali isotropi, le variazioni di temperature determinano uno stato di deformazione in ogni punto del materiale, caratterizzate da scorrimenti angolari nulli e dilatazioni uguali in ogni direzione uscente dal punto.
- L'entità di tali dilatazioni è linearmente proporzionale alla variazione di temperatura  $\Delta T$  tramite un coefficiente  $\alpha$  (detto *coefficiente di dilatazione termica*) caratteristico delle proprietà del materiale.

$$dl = \alpha \Delta T \cdot ds$$

## le distorsioni termiche nelle travi

Per un elemento di trave di materiale isotropo, considerato un concio elementare di lunghezza  $ds$ , una variazione termica produce una variazione  $dl$  della lunghezza delle fibre disposte parallelamente all'asse della trave, misurata dalla

$$dl = \alpha \Delta T \cdot ds$$

I casi più comuni di distorsioni termiche considerati sono connessi ad una variazione della temperatura distribuita lungo l'altezza  $h$  della sezione.

# Le distorsioni termiche

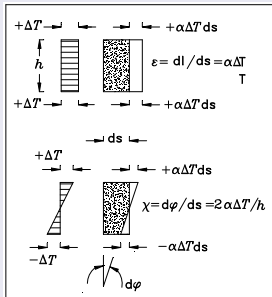
## il caso delle travi

### le distorsioni termiche nelle travi

Per un concio di trave di materiale isotropo di lunghezza  $ds$ , una variazione termica produce una variazione  $dl$  della lunghezza delle fibre disposte parallelamente all'asse della trave, misurata dalla

$$dl = \alpha \Delta T \cdot ds$$

I casi più comuni di distorsioni termiche considerati sono connessi ad una variazione della temperatura distribuita lungo l'altezza  $h$  della sezione.



- variazione uniforme:  
 produce una variazione di lunghezza  $dl$  costante per tutte le fibre del concio, cioè la distorsione estensionale

$$\bar{\epsilon} = \frac{dl}{ds} = \alpha \Delta T$$

- variazione lineare tra gli estremi  $\pm \Delta T$ :  
 produce una variazione lineare delle lunghezze delle fibre, cioè la distorsione di curvatura

$$\bar{\chi} = \frac{d\phi}{ds} = \alpha \frac{2\Delta T}{h}$$

## 5 Il metodo delle forze

- Rappresentazione di strutture iperstatiche
- Le equazioni di congruenza
- I passi del metodo delle forze
- Formulazione condizioni di congruenza
- Le distorsioni
- Esempi di applicazioni

## Parte IV

# Il metodo delle rigidezze

## 6 Il metodo delle rigidezze

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni



# limiti del metodo delle forze

L'utilizzazione pratica del metodo delle forze per il calcolo di strutture iperstatiche diviene tanto più complessa e laboriosa quanto maggiore è l'iperstaticità della struttura.

- all'aumentare del numero delle iperstatiche diventa infatti più laboriosa la riduzione al sistema isostatico;
- aumenta il numero dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione e, secondo una legge quadratica, il numero di integrali del tipo  $\int M_i M_j ds$  da calcolare.

Il metodo delle forze si presta male ad essere organizzato in un calcolo automatico da svolgere mediante computer.

... Tutto ciò comporta che il metodo delle forze risulti adatto solo a strutture relativamente semplici ed a procedimenti manuali di calcolo, e che per strutture a molte iperstatiche finisca col rivelarsi macchinoso e scarsamente efficiente

Per strutture complesse risulta più conveniente l'uso di un metodo alternativo di analisi noto come *metodo delle rigidezze* o *metodo degli spostamenti*.

# La travatura come un assemblaggio di elementi

## la logica del metodo delle forze

Il metodo delle forze per la risoluzione di strutture iperstatiche può essere visto come “completamento” delle condizioni di equilibrio statico, cioè come una tecnica per produrre delle condizioni ausiliarie (di compatibilità cinematica) tali da compensare l'indeterminazione delle equazioni fornite dalla statica.

## la logica del metodo delle rigidezze

Il metodo delle rigidezze richiede invece un ripensamento completo del nostro modo di “vedere” una struttura.

*Un sistema meccanico per quanto complesso può sempre essere visto come un assemblaggio di elementi semplici interconnessi, riconducibili ad una o a poche tipologie caratteristiche.*

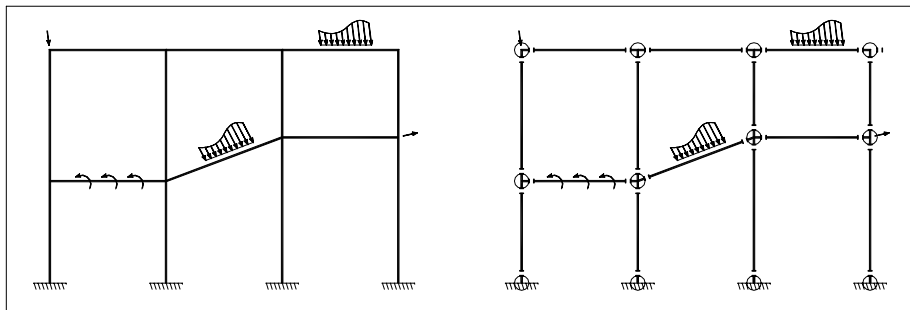
*Sono le proprietà relativamente semplici delle sue parti che determinano le proprietà generali del sistema.*

# La travatura come un assemblaggio di elementi

*Un sistema meccanico per quanto complesso può sempre essere visto come un assemblaggio di elementi semplici.*

## Il caso delle travature

un assemblaggio di elementi-trave interconnesse attraverso nodi



# La travatura come un assemblaggio di elementi

*Un sistema meccanico per quanto complesso può sempre essere visto come un assemblaggio di elementi semplici.*

## Il caso delle travi

un assemblaggio di elementi-trave interconnesse attraverso nodi

Il comportamento meccanico globale della struttura è somma del comportamento dei suoi **elementi** e delle loro interazioni statico-cinematiche.

I **nodi** sono il luogo delle interazioni statico-cinematiche delle travi

# Aspetti dell'analisi

- **Ogni elemento–trave** della travatura presenta sia una caratterizzazione “interna” che una “esterna”.

## aspetto interno: $\mathbf{u}[x]$ , $\epsilon[x]$ , $\sigma[x]$

riguarda ciò che realmente avviene all'interno di ogni elemento,

- è descritto in termini di spostamenti  $\mathbf{u}[x]$ , caratt. di deformazione  $\epsilon[x]$  e caratt. di sollecitazione  $\sigma[x]$  su ogni sezione della trave.

## aspetto esterno: $\mathbf{p}_e$ , $\mathbf{u}_e$

riguarda ciò che è osservato sul suo contorno (i nodi), dove l'elemento interagisce con le parti adiacenti della struttura,

- è descritto in termini di forze  $\mathbf{p}_e$  e spostamenti  $\mathbf{u}_e$  sui nodi dell'elemento.

E' l'aspetto esterno che determina l'influenza dell'elemento sul comportamento generale del sistema di cui è parte.

- **Ogni nodo** è il luogo delle interazioni statico-cinematiche delle travi

tali interazioni determinano il comportamento globale della struttura.

# Aspetti dell'analisi

- **Ogni elemento–trave** della travatura presenta sia una caratterizzazione “interna” che una “esterna”.

**aspetto interno:**  $\mathbf{u}[\mathbf{x}], \epsilon[\mathbf{x}], \sigma[\mathbf{x}]$

**aspetto esterno:**  $\mathbf{p}_e, \mathbf{u}_e$

E' l'aspetto esterno che determina l'influenza dell'elemento sul comportamento generale del sistema di cui è parte.

- **Ogni nodo** è il luogo delle interazioni statico-cinematiche delle travi  
tali interazioni determinano il comportamento globale della struttura.

Al fine di una efficace rappresentazione delle interazioni statico-cinematiche nodali, necessita una rappresentazione sintetica ed essenziale del comportamento delle singole travi, in termini quindi dei relativi soli parametri nodali  $\mathbf{p}_e, \mathbf{u}_e$ .

# Livello locale e livello globale dell'analisi

L'analisi della struttura può essere organizzata in due livelli diversi

## *il livello locale*

associato con lo studio del comportamento del singolo elemento-trave,

- comporta un'operazione di riscrittura delle relazioni interne tra tensioni e deformazioni in termini di relazioni esterne tra forze nodali e spostamenti nodali dell'elemento.

$$\sigma[x] \leftrightarrow \epsilon[x] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_e \leftrightarrow \mathbf{u}_e$$

## *il livello globale*

associato allo studio delle interazioni nodali degli elementi

- riguarda l'utilizzazione delle relazioni esterne del generico elemento allo scopo di costruire delle equazioni che descrivono il comportamento della intera struttura.

# Fasi dell'analisi

## decomposizione (il livello locale)

### discretizzazione

decomposizione della struttura in tanti elementi-trave;

### localizzazione

rappresentazione in un riferimento locale del comportamento dell'elemento;

### rappresentazione nodale

rappresentazione, nel riferimento locale, del comportamento dell'elemento in termini di forze e spostamenti nodali.

## assemblaggio e soluzione (il livello globale)



# Fasi dell'analisi

decomposizione (il livello locale)

assemblaggio e soluzione (il livello globale)

globalizzazione

rappresentazione del comportamento dell'elemento in un riferimento globale;

assemblaggio

scrittura delle condizioni globali di equilibrio e congruenza dei nodi;

condizioni al contorno

applicazione delle condizioni al contorno (ai nodi della struttura);

calcolo delle variabili primarie

soluzione (nelle variabili primarie del problema);

rappresentazione della soluzione

recupero di quantità derivate (spostamenti e sollecitazione nelle sezioni).

# Fasi dell'analisi

## decomposizione (il livello locale)

discretizzazione

localizzazione

rappresentazione nodale

## assemblaggio e soluzione (il livello globale)

globalizzazione

assemblaggio

condizioni al contorno

calcolo delle variabili primarie

rappresentazione della soluzione

## 6 Il metodo delle rigidezze

- Introduzione
- **Analisi locale / equazioni linea elastica**
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

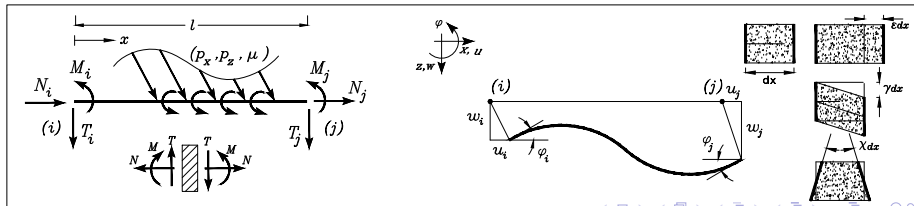
# Descrittori statico/cinematici della trave

aspetto interno - in un riferimento  $(x, z)$  locale, per ogni sezione di ascissa  $s$ :

- campo di spostamenti  $\{u(s), w(s), \varphi(s)\}$
- campo caratteristiche di deformazione  $\{\varepsilon(s), \gamma(s), \chi(s)\}$
- caratteristiche di sollecitazione  $\{N(s), T(s), M(s)\}$

aspetto esterno - condizioni al contorno sui due nodi  $i$  e  $j$ :

- spostamenti nodali  $(u_i, w_i, \varphi_i)$  e  $(u_j, w_j, \varphi_j)$   
 $u_i = u(0)$ ,  $w_i = w(0)$ ,  $\varphi_i = \varphi(0)$ ,  $u_j = u(l)$ ,  $w_j = w(l)$ ,  $\varphi_j = \varphi(l)$ ,
- forze nodali  $(N_i, T_i, M_i)$  e  $(N_j, T_j, M_j)$   
 $N_i = -N(0)$ ,  $T_i = -T(0)$ ,  $M_i = -M(0)$ ,  $N_j = N(l)$ ,  $T_j = T(l)$ ,  $M_j = M(l)$



# Il modello di trave di Bernoulli

formulazione compatibile

Relazioni interne (di campo), per il modello di trave di Eulero-Bernoulli:

$$\forall x \in (0, l) \quad \begin{array}{l} \text{equilibrio} \\ \left\{ \begin{array}{l} N_{,x} + p_x = 0 \\ T_{,x} + p_z = 0 \\ M_{,x} - T + \mu = 0 \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{leg. cost.} \\ \left\{ \begin{array}{l} N = EA\varepsilon \\ M = EJ\chi \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{congruenza} \\ \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = u_{,x} \\ \varphi = -w_{,x} \\ \chi = -w_{,xx} \end{array} \right. \end{array}$$

condizioni al contorno statiche:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_i = -N(0) \\ T_i = -T(0) \\ M_i = -M(0) \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} N_j = N(l) \\ T_j = T(l) \\ M_j = M(l) \end{array} \right.$$

condizioni al contorno cinematiche:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = u(0) \\ w_i = w(0) \\ \varphi_i = \varphi(0) \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} u_j = u(l) \\ w_j = w(l) \\ \varphi_j = \varphi(l) \end{array} \right.$$

dalle equazioni di equilibrio, sostituendo i legami costitutivi, e quindi le relazioni cinematiche, le equazioni di campo possono essere espresse in termini di soli spostamenti

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{,x} + p_x = 0 \\ M_{,xx} + p_z + \mu_{,x} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} EA\varepsilon_{,x} + p_x = 0 \\ EJ\chi_{,xx} + p_z + \mu_{,x} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} EAu_{,xxx} + p_x = 0 \\ -EJw_{,xxxx} + p_z + \mu_{,x} = 0 \end{array} \right.$$

# Il modello di trave di Bernoulli

formulazione compatibile

Relazioni interne (di campo), per il modello di trave di Eulero-Bernoulli:

$$\forall x \in (0, l) , \quad \begin{cases} EA u_{,xx} + p_x = 0 \\ -EJ w_{,xxxx} + p_z + \mu_{,x} = 0 \end{cases}$$

condizioni al contorno statiche:

$$\begin{cases} N_i = -N(0) & , & N_j = N(l) \\ T_i = -T(0) & , & T_j = T(l) \\ M_i = -M(0) & , & M_j = M(l) \end{cases}$$

condizioni al contorno cinematiche:

$$\begin{cases} u_i = u(0) & , & u_j = u(l) \\ w_i = w(0) & , & w_j = w(l) \\ \varphi_i = \varphi(0) & , & \varphi_j = \varphi(l) \end{cases}$$

la formulazione del problema in termini di sole componenti di spostamento

un problema differenziale disaccoppiato in termini delle funzioni di  $u(x)$  e  $w(x)$

# Il modello di trave di Bernoulli

formulazione compatibile

$$\forall x \in (0, l) \quad EAu_{,xx} = -p_x \quad , \quad u(0) = u_i \quad , \quad u(l) = u_j$$

$$\forall x \in (0, l) \quad EJw_{,xxxx} = p_z + \mu_{,x} \quad , \quad \begin{cases} w(0) = w_i \quad , \quad \varphi(0) = -w_{,x}(0) = \varphi_i \\ w(l) = w_j \quad , \quad \varphi(l) = -w_{,x}(l) = \varphi_j \end{cases}$$

condizioni al contorno statiche:

$$\begin{cases} N_i = -N(0) \quad , \quad N_j = N(l) \\ T_i = -T(0) \quad , \quad T_j = T(l) \\ M_i = -M(0) \quad , \quad M_j = M(l) \end{cases}$$

condizioni al contorno cinematiche:

$$\begin{cases} u_i = u(0) \quad , \quad u_j = u(l) \\ w_i = w(0) \quad , \quad w_j = w(l) \\ \varphi_i = \varphi(0) \quad , \quad \varphi_j = \varphi(l) \end{cases}$$

la formulazione del problema in termini di sole componenti di spostamento

un problema differenziale disaccoppiato in termini delle funzioni di  $u(x)$  e  $w(x)$

# Decomposizione della soluzione locale

Soluzione di incastro perfetto e soluzione nodale

$$\forall x \in (0, l) \quad EAu_{,xx} = -p_x \quad , \quad u(0) = u_i \quad , \quad u(l) = u_j$$

$$\forall x \in (0, l) \quad EJw_{,xxxx} = p_z + \mu_{,x} \quad , \quad \begin{cases} w(0) = w_i \quad , \quad \varphi(0) = -w_{,x}(0) = \varphi_i \\ w(l) = w_j \quad , \quad \varphi(l) = -w_{,x}(l) = \varphi_j \end{cases}$$

Per il **principio di sovrapposizione degli effetti**, la soluzione generale del problema locale è esprimibile come somma di due aliquote

$$\tilde{u}(x) + u(x) \quad , \quad \tilde{w}(x) + w(x)$$

*soluzione di incastro perfetto* ( $\tilde{u}[x], \tilde{w}[x]$ )

soluzione particolare del sistema non omogeneo,

*soluzione nodale* ( $u[x], w[x]$ ) (o della **linea elastica**)

soluzione generale del sistema omogeneo associato



# Decomposizione della soluzione locale

Soluzione di incastro perfetto e soluzione nodale

## *soluzione di incastro perfetto* ( $\tilde{u}[x], \tilde{w}[x]$ )

soluzione particolare del sistema non omogeneo,

- in equilibrio quindi con i carichi applicati su punti interni della trave,
- a spostamenti nodali nulli (equivalenti ad una condizione di vincolo di incastro ai due nodi)

$$EA\tilde{u}_{,xx} = -p_x \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}(l) = 0$$

$$EJ\tilde{w}_{,xxxx} = p_z + \mu_{,x} \quad \tilde{w}(0) = \tilde{\varphi}(0) = \tilde{w}(l) = \tilde{\varphi}(l) = 0 \quad ,$$

## *soluzione nodale* ( $u[x], w[x]$ ) (o della **linea elastica**)

soluzione generale del sistema omogeneo associato

- in equilibrio con carichi ripartiti nulli
- congruente con gli spostamenti dei nodi

# Decomposizione della soluzione locale

Soluzione di incastro perfetto e soluzione nodale

*soluzione di incastro perfetto* ( $\tilde{u}[x], \tilde{w}[x]$ )

*soluzione nodale* ( $u[x], w[x]$ ) (o della **linea elastica**)

$$EAu_{,xx} = 0 \quad u(0) = u_i \quad u(l) = u_j$$

$$EJw_{,xxxx} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} w(0) = w_i \\ \varphi(0) = \varphi_i \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} w(l) = w_j \\ \varphi(l) = \varphi_j \end{array} \right. ,$$

Rimandando ad una successiva sezione il trattamento della soluzione di incastro perfetto ( $u_0(x), w_0(x)$ ), concentriamo adesso la nostra attenzione sulla aliquota nodale ( $u(x), w(x)$ ) della soluzione.

Ciò equivale a considerare nulli i carichi ripartiti sulle travi e fare riferimento solo a sistemi di carichi costituiti di forze o coppie concentrate ai nodi della struttura.

# La soluzione della linea elastica

$$\begin{aligned}
 EAu_{,xx} &= 0 & u(0) &= u_i & u(l) &= u_j \\
 EJw_{,xxxx} &= 0 & \left\{ \begin{array}{l} w(0) = w_i \\ \varphi(0) = \varphi_i \end{array} \right. &, & \left\{ \begin{array}{l} w(l) = w_j \\ \varphi(l) = \varphi_j \end{array} \right. &,
 \end{aligned}$$

$$EAu_{,xx} = 0$$

$$EJw_{,xxxx} = 0$$

 $\Rightarrow$ 

$$u(x) = A + Bx$$

$$w(x) = C + Dx + Ex^2 + Fx^3$$

La soluzione della linea elastica è univocamente individuata in funzione degli spostamenti nodali della trave.

Posto  $\xi = \frac{x}{l}$  si ha:

$$u(x) = (1 - \xi) u_i + \xi u_j$$

$$\begin{aligned}
 w(x) &= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) w_i + l(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3) \varphi_i \\
 &\quad + (3\xi^2 - 2\xi^3) w_j + l(\xi^2 - \xi^3) \varphi_j
 \end{aligned}$$

# La soluzione della linea elastica

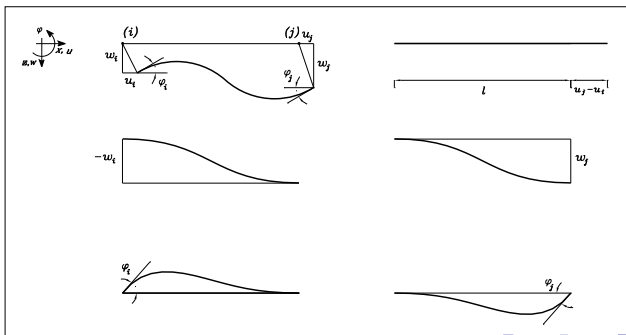
## Ricostruzione dei campi di spostamento

- La soluzione della linea elastica è univocamente individuata in funzione degli spostamenti nodali della trave.

Posto  $\xi = \frac{x}{l}$  si ha:

$$u(x) = (1 - \xi) u_i + \xi u_j$$

$$w(x) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) w_i + l(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3) \varphi_i + (3\xi^2 - 2\xi^3) w_j + l(\xi^2 - \xi^3) \varphi_j$$



# La soluzione della linea elastica

## Ricostruzione dei campi di spostamento

- La soluzione della linea elastica è univocamente individuata in funzione degli spostamenti nodali della trave.

Posto  $\xi = \frac{x}{l}$  si ha:

$$\begin{aligned} u(x) &= (1 - \xi) u_i + \xi u_j \\ w(x) &= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) w_i + l(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3) \varphi_i \\ &\quad + (3\xi^2 - 2\xi^3) w_j + l(\xi^2 - \xi^3) \varphi_j \end{aligned}$$

- In forma matriciale  $\mathbf{u}(x) = \mathbf{F}(x) \mathbf{u}_e$ :

$$\begin{array}{c} \mathbf{u}(x) \\ \left[ \begin{array}{c} u(x) \\ w(x) \end{array} \right] \end{array} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1 - \xi) & \cdot & \cdot & \cdot & \xi & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) & l(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3) & \cdot & (3\xi^2 - 2\xi^3) & l(\xi^2 - \xi^3) & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}(x)} \begin{array}{c} \mathbf{u}_e \\ \left[ \begin{array}{c} u_i \\ w_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ w_j \\ \varphi_j \end{array} \right] \end{array}$$

$\mathbf{F}(x)$  è la matrice che raccoglie le **funzioni di forma** del problema. .

# La soluzione della linea elastica

Ricostruzione dei campi caratteristiche di deformazione

- Dalle relazioni cinematiche  $\varepsilon = u_{,x}$  e  $\chi = -w_{,xx}$ :

$$\varepsilon[x] = \frac{u_j - u_i}{l}$$

$$\chi[x] = \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x\right)(w_j - w_i) + \left(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x\right)\varphi_i + \left(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x\right)\varphi_j$$

si osservi che i parametri deformativi sono sostanzialmente condizionati non tanto dai valori assoluti degli spostamenti ( $u_i, u_j, w_i, w_j$ ) quanto dai valori relativi ( $u_j - u_i, w_j - w_i$ )

- Una riscrittura in forma matriciale  $\epsilon(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e$ :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon(x) \\ \chi(x) \end{bmatrix}}_{\epsilon(x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{l} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x\right) & \left(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) & \left(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}$$

dove il vettore  $\mathbf{d}_e \equiv [\Delta u, \Delta w, \varphi_i, \varphi_j]^t$  è legato agli spostamenti significativi (ai fini della deformazione) dei nodi dell'asta.

# La soluzione della linea elastica

Ricostruzione dei campi caratteristiche di sollecitazione

- Dalle relazioni  $N = EA\varepsilon$ ,  $M = EJ\chi$  ed  $T = M_{,x}$ :

$$N[x] = \frac{EA}{l}(u_j - u_i) = N \text{ (cost)}$$

$$T[x] = \frac{12EJ}{l^3}(w_j - w_i) + \frac{6EJ}{l^2}\varphi_i + \frac{6EJ}{l^2}\varphi_j = T \text{ (cost)}$$

$$M[x] = \left\{-\frac{6EJ}{l^2} + \frac{12EJ}{l^3}x\right\}(w_j - w_i) + \left\{-\frac{4EJ}{l} + \frac{6EJ}{l^2}x\right\}\varphi_i + \left\{-\frac{2EJ}{l} + \frac{6EJ}{l^2}x\right\}\varphi_j$$

- In forma matriciale  $\sigma(x) = \mathbf{E} \mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e$  ( $\mathbf{E}$  è la matrice dei coefficienti elastici):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{bmatrix}}_{\sigma(x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} EA & \cdot \\ \cdot & EJ \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{l} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x\right) & \left(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) & \left(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}$$

## Osservazione 1

Lo stato elastico interno

$$\mathbf{u}(x) , \boldsymbol{\epsilon}(x) , \boldsymbol{\sigma}(x)$$

è definito univocamente in funzione dei parametri cinematici nodali

$$(u_i, w_i, \varphi_i, u_j, w_j, \varphi_j)$$

nel rispetto delle relazioni

**interne** all'elemento di equilibrio, congruenza e legame costitutivo

**esterne** all'elemento di sola congruenza cinematica ai due nodi dell'elemento

## Osservazione 2

Rimane ancora da realizzare il rispetto delle condizioni esterne di equilibrio ai nodi tra i valori delle caratteristiche di sollecitazione nodale e le forze esterne applicate ai due nodi di ogni elemento

$$N_i = -N(0), T_i = -T(0), M_i = -M(0), N_j = N(l), T_j = T(l), M_j = M(l)$$



## 6 Il metodo delle rigidezze

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- **Analisi locale / coefficienti di rigidezza**
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

Dalle relazioni di equilibrio sul contorno

$$N = -N_i = N_j = \frac{EA}{l}(u_j - u_i)$$

$$T = -T_i = T_j = \frac{12EJ}{l^3}(w_j - w_i) + \frac{6EJ}{l^2}\varphi_i + \frac{6EJ}{l^2}\varphi_j$$

$$M_i = \frac{6EJ}{l^2}(w_j - w_i) + \frac{4EJ}{l}\varphi_i + \frac{2EJ}{l}\varphi_j$$

$$M_j = \frac{6EJ}{l^2}(w_j - w_i) + \frac{2EJ}{l}\varphi_i + \frac{4EJ}{l}\varphi_j$$

Tali relazioni . . .

. . . caratterizzano in modo sintetico la risposta elastica della trave

- cioè le forze nodali prodotte a seguito di una deformata elastica impressa (descritta dai relativi spostamenti nodali)
- o, il che è lo stesso, le forze nodali necessarie ad imprimere alla trave un deformata elastica.

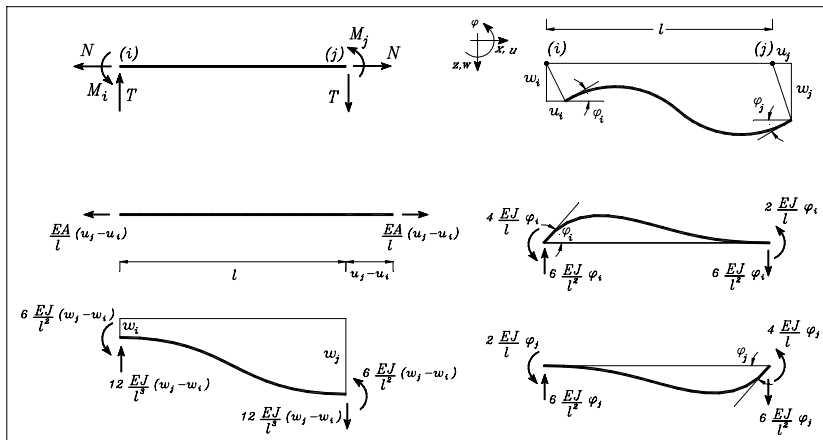
. . . regolano l'influenza della trave sul comportamento generale della struttura

essi sintetizzano, in termini di sole quantità nodali, come le parti adiacenti della struttura "vedono" la presenza della generica trave.

# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

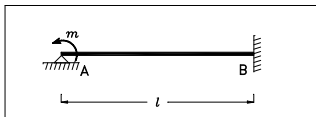
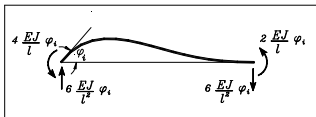
## I coefficienti di rigidità

- I coefficienti delle relazioni esterne sono detti *coefficienti di rigidità* della trave.
- Significato fisico dei coefficienti di rigidità



# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

Ricostruzione alternativa dei coefficienti di rigidzza/1



## il sistema equivalente di vincoli

Le condizioni al contorno che determinano la cinematica fondamentale in figura

$$u_i = w_i = u_j = w_j = \varphi_j = 0$$

sono realizzate da un sistema equivalente di vincoli.

## diversa strategia di calcolo dei coefficienti elastici

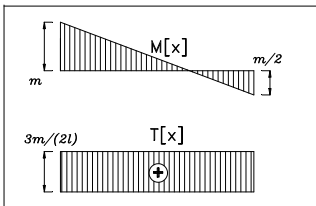
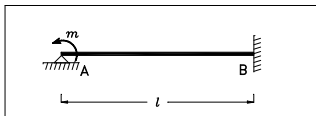
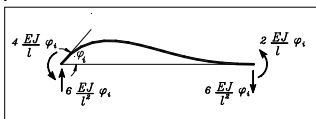
- l'esempio (iperstatico) può essere risolto (mediante il metodo delle forze) in funzione della coppia  $m$ ;
- la rotazione del nodo  $A$  risulta di facile calcolo mediante l'equazione dei lavori virtuali (facendo uso di un opportuno sistema di forze fittizie)

$$1 \cdot \varphi_i = \int_0^l \left( \delta T[x] \cdot \frac{T[x]}{GA^*} + \delta M[x] \cdot \frac{M[x]}{EJ} \right) ds \approx \frac{m l}{4EJ}$$

- la relazione trovata individua, assieme ai valori delle forze nodali, tutti i coefficienti di rigidzza associati alla cinematica

# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

Ricostruzione alternativa dei coefficienti di rigidzza/1



il sistema equivalente di vincoli

diversa strategia di calcolo dei coefficienti elastici

- l'esempio (iperstatico) può essere risolto (mediante il metodo delle forze) in funzione della coppia  $m$ ;
- la rotazione del nodo  $A$  risulta di facile calcolo mediante l'equazione dei lavori virtuali (facendo uso di un opportuno sistema di forze fittizie)

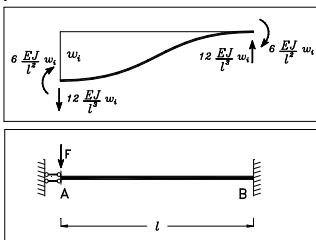
$$1 \cdot \varphi_i = \int_0^l (\delta T[x] \cdot \frac{T[x]}{GA^*} + \delta M[x] \cdot \frac{M[x]}{EJ}) ds \approx \frac{m l}{4EJ}$$

- la relazione trovata individua, assieme ai valori delle forze nodali, tutti i coefficienti di rigidzza associati alla cinematica.

$$M_i = m = \frac{4EJ}{l} \varphi_i, \quad M_j = \frac{m}{2} = \frac{2EJ}{l} \varphi_i, \quad T = \frac{3m}{2l} = \frac{6EJ}{l^2}$$

# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

Ricostruzione alternativa dei coefficienti di rigidzza/2



## il sistema equivalente di vincoli

Le condizioni al contorno che determinano la cinematica fondamentale in figura

$$u_i = \varphi_i = u_j = w_j = \varphi_j = 0$$

sono realizzate da un sistema equivalente di vincoli.

## diversa strategia di calcolo dei coefficienti elastici

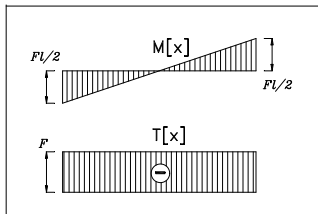
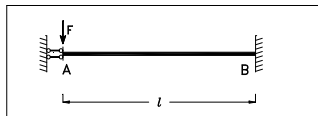
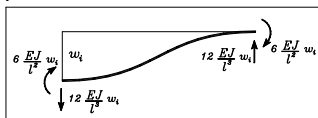
- l'esempio (iperstatico) può essere risolto (mediante il metodo delle forze) in funzione della forza  $F$ ;
- l'abbassamento del nodo  $A$  risulta di facile calcolo mediante l'equazione dei lavori virtuali (facendo uso di un opportuno sistema di forze fittizie)

$$1 \cdot w_i = \int_0^l \left( \delta T[x] \cdot \frac{T[x]}{GA^*} + \delta M[x] \cdot \frac{M[x]}{EJ} \right) ds \approx \frac{F l^3}{12EJ}$$

- la relazione trovata individua, assieme ai valori delle forze nodali, tutti i coefficienti di rigidzza associati alla cinematica

# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

Ricostruzione alternativa dei coefficienti di rigidzza/2



il sistema equivalente di vincoli

diversa strategia di calcolo dei coefficienti elastici

- l'esempio (iperstatico) può essere risolto (mediante il metodo delle forze) in funzione della forza  $F$ ;
- l'abbassamento del nodo  $A$  risulta di facile calcolo mediante l'equazione dei lavori virtuali (facendo uso di un opportuno sistema di forze fittizie)

$$1 \cdot w_i = \int_0^l (\delta T[x] \cdot \frac{T[x]}{GA^*} + \delta M[x] \cdot \frac{M[x]}{EJ}) ds \approx \frac{F l^3}{12EJ}$$

- la relazione trovata individua, assieme ai valori delle forze nodali, tutti i coefficienti di rigidzza associati alla cinematica.

$$T = F = \frac{12EJ}{l^3} w_i, \quad M_i = \frac{Fl}{2} = \frac{6EJ}{l^2} w_i, \quad M_j = \frac{Fl}{2} = \frac{6EJ}{l^2} w_j$$

# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

La matrice di rigidzza della trave / 1

Dalle relazioni che caratterizzano in modo sintetico la risposta elastica della trave

$$N = -N_i = N_j = \frac{EA}{l}(u_j - u_i)$$

$$T = -T_i = T_j = \frac{12EJ}{l^3}(w_j - w_i) + \frac{6EJ}{l^2}\varphi_i + \frac{6EJ}{l^2}\varphi_j$$

$$M_i = \frac{6EJ}{l^2}(w_j - w_i) + \frac{4EJ}{l}\varphi_i + \frac{2EJ}{l}\varphi_j$$

$$M_j = \frac{6EJ}{l^2}(w_j - w_i) + \frac{2EJ}{l}\varphi_i + \frac{4EJ}{l}\varphi_j$$

... si ricava la seguente ...

representazione matriciale (nel riferimento locale)

$$s_e = K_e d_e \Leftrightarrow \begin{bmatrix} N \\ T \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{6EJ}{l^2} \\ \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{4EJ}{l} & +\frac{2EJ}{l} \\ \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} & +\frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}}_{K_e} \begin{bmatrix} u_j - u_i \\ w_j - w_i \\ \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix}$$



# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

La matrice di rigidezza della trave / 1

rappresentazione matriciale (nel riferimento locale)

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e \Leftrightarrow \begin{bmatrix} N \\ T \\ M_i \\ M_j \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{6EJ}{l^2} \\ \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{4EJ}{l} & +\frac{2EJ}{l} \\ \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} & +\frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_e} \begin{bmatrix} u_j - u_i \\ w_j - w_i \\ \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix}$$

- Il vettore  $\mathbf{d}_e \equiv [\Delta u, \Delta w, \varphi_i, \varphi_j]^t$  assembla i parametri significativi degli spostamenti dei nodi dell'asta.
- Il vettore  $\mathbf{s}_e \equiv [N, T, M_i, M_j]^t$  assembla i parametri significativi delle forze nodali dell'asta.
- I vettori  $\mathbf{d}_e$  ed  $\mathbf{s}_e$  si corrispondono dualmente, cioè tale che sia possibile misurare un lavoro mediante il prodotto scalare  $\mathbf{s}_e^t \mathbf{d}_e$
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  dei coefficienti di rigidezza è detta **matrice di rigidezza della trave**

# Relazioni esterne tra forze e spostamenti nodali

La matrice di rigidzza della trave / 2 (una diversa scelta dei parametri nodali)

diversa rappresentazione matriciale

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \Leftrightarrow \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_j \\ T_j \\ M_j \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot & -\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot \\ \cdot & +\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & \cdot & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ \cdot & -\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{4EJ}{l} & \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot & +\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} & \cdot & +\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} \\ \cdot & -\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} & \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_e} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ w_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}$$

- Diversa scelta del vettore  $\mathbf{u}_e \equiv [u_i, w_i, \varphi_i, u_j, w_j, \varphi_j]^t$  che assembla **tutti** gli spostamenti nodali dell'asta.
- Il vettore  $\mathbf{p}_e \equiv [N_i, T_i, M_i, N_j, T_j, M_j]^t$  assembla **tutte** le componenti delle forze nodali dell'asta.
- I vettori  $\mathbf{u}_e$  ed  $\mathbf{p}_e$  devono corrispondere dualmente, cioè tale che sia possibile misurare un lavoro mediante il prodotto scalare  $\mathbf{p}_e^t \mathbf{u}_e$
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  dei coefficienti di rigidzza è detta **matrice di rigidzza della trave**

# Equazioni di equilibrio nodale della trave

Scrittura integrale e vettoriale delle condizioni di equilibrio

Il lavoro virtuale interno:

$$\delta L_i = \int_0^l \{N(x) \delta \varepsilon(x) + M(x) \delta \chi(x)\} dx = \int_0^l \boldsymbol{\sigma}(x)^t \delta \boldsymbol{\epsilon}(x) dx$$

Equazione e principio dei lavori virtuali:

$$\int_0^l \boldsymbol{\sigma}(x)^t \delta \boldsymbol{\epsilon}(x) dx = \mathbf{s}_e^t \delta \mathbf{d}_e, \quad \forall \delta \mathbf{d}_e \quad (\delta \boldsymbol{\epsilon}(x) \text{ congruente con } \delta \mathbf{d}_e)$$

La soluzione della linea elastica  $\delta \boldsymbol{\epsilon}(x) = \mathbf{B}(x) \delta \mathbf{d}_e$  garantisce la congruenza tra deformazione  $\delta \boldsymbol{\epsilon}(x)$  e i parametri di spostamento nodale  $\delta \mathbf{d}_e$

# Equazioni di equilibrio nodale della trave

Scrittura integrale e vettoriale delle condizioni di equilibrio

Condizione di equilibrio in forma integrale (principio dei lavori virtuali):

$$\int_0^l \boldsymbol{\sigma}(x)^t \delta \boldsymbol{\epsilon}(x) dx = \mathbf{s}_e^t \delta \mathbf{d}_e, \quad \forall \delta \mathbf{d}_e \quad (\delta \boldsymbol{\epsilon}(x) = \mathbf{B}(x) \delta \mathbf{d}_e)$$

Alcuni sviluppi facendo uso della soluzione della linea elastica  $\delta \boldsymbol{\epsilon}(x) = \mathbf{B}(x) \delta \mathbf{d}_e$ :

$$\begin{aligned} \int_0^l \boldsymbol{\sigma}(x)^t (\mathbf{B}(x) \delta \mathbf{d}_e) dx &= \left( \int_0^l \boldsymbol{\sigma}(x)^t \mathbf{B}(x) dx \right) \delta \mathbf{d}_e \\ &= \left( \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \boldsymbol{\sigma}(x) dx \right)^t \delta \mathbf{d}_e = \mathbf{s}_e^t \delta \mathbf{d}_e, \quad \forall \delta \mathbf{d}_e \end{aligned}$$

Espressione vettoriale delle relazioni (di equilibrio):

$$\mathbf{s}_e = \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \boldsymbol{\sigma}(x) dx$$

# Equazioni di equilibrio nodale della trave

Espressione integrale della matrice di rigidzza della trave

Dalle relazioni di equilibrio nodale e facendo uso della soluzione della linea elastica

$$\mathbf{s}_e = \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \boldsymbol{\sigma}(x) dx \quad \boldsymbol{\sigma}(x) = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}(x) = \mathbf{E} \mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e$$

$$\mathbf{s}_e = \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \left( \mathbf{E} \mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e \right) dx = \underbrace{\left( \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \mathbf{E} \mathbf{B}(x) dx \right)}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{d}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$$

si ricava la espressione integrale della matrice di rigidzza della trave:

$$\mathbf{K}_e = \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \mathbf{E} \mathbf{B}(x) dx$$

# Equazioni di equilibrio nodale della trave

Espressione integrale della matrice di rigidezza della trave

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e, \quad \mathbf{K}_e = \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \mathbf{E} \mathbf{B}(x) dx$$

risulta infatti:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \mathbf{E} \mathbf{B}(x) dx = \int_0^l \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{l} & & & \\ & (-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x) & & \\ & (-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x) & & \\ & (-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x) & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^t(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} EA & & & \\ & EJ & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{l} & & & \\ & (-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x) & (-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x) & (-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(x)} dx \\ &= \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{EA}{l^2} & & & \\ & EJ(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x)^2 & EJ(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x) & EJ(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x) \\ & EJ(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x)(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x) & EJ(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x)^2 & EJ(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x)(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x) \\ & EJ(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x)(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x) & EJ(-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x)(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x) & EJ(-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x)^2 \end{bmatrix} dx \end{aligned}$$

# Equazioni di equilibrio nodale della trave

Espressione integrale della matrice di rigidità della trave

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e, \quad \mathbf{K}_e = \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \mathbf{E} \mathbf{B}(x) dx$$

risulta infatti:

$$\mathbf{K}_e = \int_0^l \underbrace{\mathbf{B}(x)^t}_{\mathbf{B}^t(x)} \underbrace{\mathbf{E}}_{\begin{bmatrix} EA & \cdot \\ \cdot & EJ \end{bmatrix}} \underbrace{\mathbf{B}(x)}_{\begin{bmatrix} \frac{1}{l} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & (-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x) & \cdot & \cdot \\ \cdot & (-\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2}x) & \cdot & \cdot \\ \cdot & (-\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2}x) & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(x)} dx$$

$$= \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{6EJ}{l^2} \\ \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{4EJ}{l} & +\frac{2EJ}{l} \\ \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} & +\frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}$$

# Significato energetico della matrice di rigidità della trave

- Espressione dell'energia di deformazione per la trave

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \int_0^l \{ EA \epsilon(x)^2 + EJ \chi(x)^2 \} dx \equiv \frac{1}{2} \int_0^l \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon(x) \\ \chi(x) \end{bmatrix}^t}_{\epsilon(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} EA & \cdot \\ \cdot & EJ \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon(x) \\ \chi(x) \end{bmatrix}}_{\epsilon(x)} dx$$

- Facendo uso della soluzione della linea elastica  $\epsilon(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e$

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \int_0^l (\mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e)^t \mathbf{E} (\mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e) dx = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \underbrace{\left( \int_0^l \mathbf{B}(x)^t \mathbf{E} \mathbf{B}(x) dx \right)}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{d}_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$$

In conclusione, sulla base della precedente relazione, la matrice di rigidità dell'elemento definisce la energia di deformazione della trave in termini dei soli parametri cinematici nodali.



# Caratteristiche della matrice di rigidezza della trave

**proprietà particolari** : sono strettamente legati alla particolare scelta (numero  $n_e$  di parametri, ordine di questi, etc) del vettore dei parametri cinematici nodali  $\mathbf{d}_e$ , e quindi del vettore dei parametri statici nodali  $\mathbf{s}_e$  duale di questo.

**proprietà generali** : non dipendono dalla scelta del vettore  $\mathbf{d}_e$

# Caratteristiche della matrice di rigidezza della trave

- La matrice di rigidezza della trave è simmetrica

è una proprietà generale che deriva fundamentalmente dal carattere iperelastico del legame costitutivo del modello di trave alla base dell'analisi, cioè dalla relazione  $\Phi_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$ ;

# Caratteristiche della matrice di rigidità della trave

- La matrice di rigidità della trave è simmetrica
- In una rappresentazione locale a 6 parametri, la matrice  $\mathbf{K}_e$  ha una struttura di  $2 \times 2$  blocchi, ogni blocco di dimensioni  $3 \times 3$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot & -\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot \\ \cdot & +\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & \cdot & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ \cdot & -\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{4EJ}{l} & \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot & +\frac{EA}{l} & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} & \cdot & +\frac{12EJ}{l^3} & +\frac{6EJ}{l^2} \\ \cdot & -\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{2EJ}{l} & \cdot & +\frac{6EJ}{l^2} & +\frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \boxed{\bar{\mathbf{K}}_{ii} \quad (3 \times 3)} & \boxed{\bar{\mathbf{K}}_{ij} \quad (3 \times 3)} \\ \boxed{\bar{\mathbf{K}}_{ji} \quad (3 \times 3)} & \boxed{\bar{\mathbf{K}}_{jj} \quad (3 \times 3)} \end{bmatrix}$$

è una proprietà particolare legata solo alla caratterizzazione locale in termini dei vettori

$$\mathbf{u}_e \equiv [u_i, w_i, \varphi_i, u_j, w_j, \varphi_j]^t \text{ e } \mathbf{p}_e \equiv [N_i, T_i, M_i, N_j, T_j, M_j]^t;$$

# Caratteristiche della matrice di rigidezza della trave

- La matrice di rigidezza della trave è simmetrica
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  ha rango pari a tre

è una proprietà generale

# Caratteristiche della matrice di rigidzza della trave

- La matrice di rigidzza della trave è simmetrica
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  ha rango pari a tre
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  ha un numero di  $i = n_e - 3$  direzioni di singolarità, cioè direzioni  $\mathbf{u}_{ei}^r$  per le quali

$$(\mathbf{u}_{ei}^r)^t \mathbf{K}_e (\mathbf{u}_{ei}^r) = 0 \quad , \quad (i = 1, \dots)$$

dove  $n_e$  è il numero di parametri di rappresentazione locale  
( $n_e = 6, i = 3; n_e = 4, i = 1$ )

Tali direzioni di singolarità corrispondono ai moti rigidi (due di traslazione e uno di rotazione) possibili per le trave: questi infatti, non generando deformazioni pure (allungamenti o inflessioni) della trave, sono associati a valori nulli della relativa energia di deformazione:

$$\Phi_e^r = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{ek}^r)^t \mathbf{K} (\mathbf{u}_{ek}^r) = 0 \quad , \quad (k = 1, 2, 3)$$

# Caratteristiche della matrice di rigidzza della trave

- La matrice di rigidzza della trave è simmetrica
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  ha rango pari a tre
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  ha un numero di  $n_e - 3$  direzioni di singolarità
- La matrice di rigidzza della trave è definita positiva in tutte le direzioni diverse dalle tre direzioni di singolarità, cioè

$$\mathbf{d}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e > 0, \forall \mathbf{d}_e \neq \mathbf{u}_{ek}^r$$

E' una proprietà generale legata alla positività della energia di deformazione  $\Phi_e(u_e) = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e > 0$ : bisogna fisicamente compiere lavoro positivo per deformare un corpo

# Caratteristiche della matrice di rigidezza della trave

- La matrice di rigidezza della trave è simmetrica
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  ha rango pari a tre
- La matrice  $\mathbf{K}_e$  ha un numero di  $n_e - 3$  direzioni di singolarità
- La matrice di rigidezza della trave è definita positiva in tutte le direzioni diverse dalle tre direzioni di singolarità

# Fasi dell'analisi

## decomposizione

discretizzazione

completa  $\Rightarrow$

localizzazione

completa  $\Rightarrow$

rappresentazione nodale

completa  $\Rightarrow$

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$$

## assemblaggio e soluzione

globalizzazione

assemblaggio

condizioni al contorno

calcolo delle variabili primarie

rappresentazione della soluzione

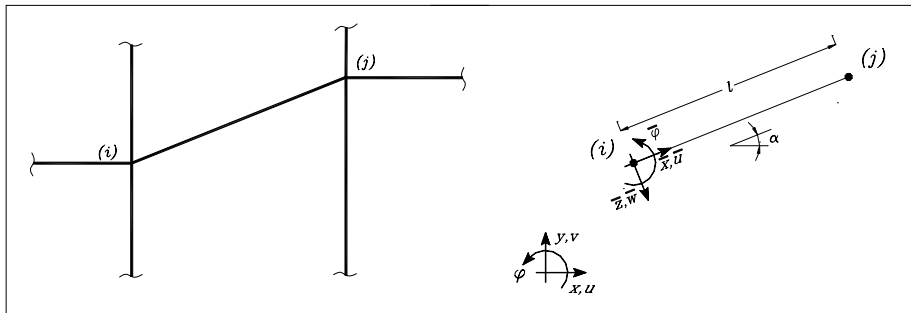


# Fasi dell'analisi

## 6 Il metodo delle rigidezze

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- **Analisi globale / trasf. locale→globale**
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

# Rappresentazione nel riferimento locale e globale



- Riferimento locale  $(\bar{x}, \bar{z})$  e globale  $(x, y)$  dell'asta
- Coseni direttori dell'asta  $(i, j)$  nel riferimento globale

$$s = \sin \alpha_e = \frac{y_j - y_i}{l} \quad , \quad c = \cos \alpha_e = \frac{x_j - x_i}{l} \quad , \quad l = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

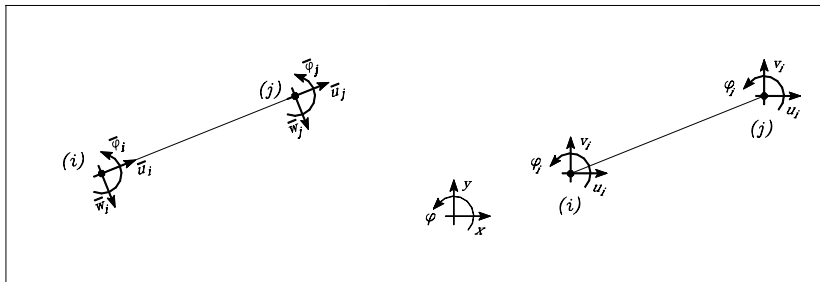
- Spostamenti e forze nodali della trave  $(i, j)$  nei due riferimenti:

$$\text{rif.loc.} \quad (\bar{u}_i^e, \bar{w}_i^e, \bar{\varphi}_i^e) \quad , \quad (\bar{N}_i^e, \bar{T}_i^e, \bar{M}_i^e) \quad , \quad (\bar{u}_j^e, \bar{w}_j^e, \bar{\varphi}_j^e) \quad , \quad (\bar{N}_j^e, \bar{T}_j^e, \bar{M}_j^e)$$

$$\text{rif.glo.} \quad (u_i^e, v_i^e, \varphi_i^e) \quad , \quad (P_i^e, Q_i^e, M_i^e) \quad , \quad (u_j^e, v_j^e, \varphi_j^e) \quad , \quad (P_j^e, Q_j^e, M_j^e)$$

# Trasformazione locale-globale degli spostamenti nodali

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_j^e - \bar{u}_i^e &= -\cos \alpha_e u_i^e - \sin \alpha_e v_i^e \\
 &\quad + \cos \alpha_e u_j^e + \sin \alpha_e v_j^e \\
 \bar{w}_j^e - \bar{w}_i^e &= -\sin \alpha_e u_i^e + \cos \alpha_e v_i^e \\
 &\quad + \sin \alpha_e u_j^e - \cos \alpha_e v_j^e \\
 \bar{\varphi}_i^e &= \varphi_i^e \\
 \bar{\varphi}_j^e &= \varphi_j^e
 \end{aligned}
 \Leftrightarrow
 \begin{aligned}
 \mathbf{d}_e &= \begin{bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{u}}^e \\ \Delta \bar{\mathbf{w}}^e \\ \bar{\varphi}_i^e \\ \bar{\varphi}_j^e \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -c & -s & 0 & +c & +s & 0 \\ -s & +c & 0 & +s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\bar{A}}_e} \begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \varphi_i^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ \varphi_j^e \end{bmatrix} = \mathbf{u}_e
 \end{aligned}$$



# Trasformazione locale-globale delle forze nodali

$$P_i^e = -\bar{N}^e \cos \alpha_e - \bar{T}^e \sin \alpha_e$$

$$Q_i^e = -\bar{N}^e \sin \alpha_e + \bar{T}^e \cos \alpha_e$$

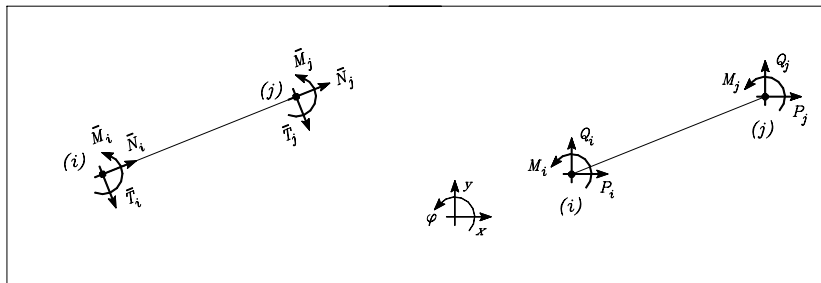
$$M_i^e = \bar{M}_i^e$$

$$P_j^e = +\bar{N}^e \cos \alpha_e + \bar{T}^e \sin \alpha_e$$

$$Q_j^e = +\bar{N}^e \sin \alpha_e - \bar{T}^e \cos \alpha_e$$

$$M_j^e = \bar{M}_j^e$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} P_i^e \\ Q_i^e \\ M_i^e \\ P_j^e \\ Q_j^e \\ M_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} -c & -s & 0 & 0 \\ -s & +c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +c & +s & 0 & 0 \\ +s & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_e^t} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{N}^e \\ \bar{T}^e \\ \bar{M}_i^e \\ \bar{M}_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_e}$$



# Trasformazione locale-globale / 1

- degli spostamenti nodali

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \bar{u}^e \\ \Delta \bar{w}^e \\ \bar{\varphi}_i^e \\ \bar{\varphi}_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} -c & -s & 0 & +c & +s & 0 \\ -s & +c & 0 & +s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \varphi_i^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ \varphi_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_e}$$

- delle forze nodali

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_i^e \\ Q_i^e \\ M_i^e \\ P_j^e \\ Q_j^e \\ M_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} -c & -s & 0 & 0 \\ -s & +c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +c & +s & 0 & 0 \\ +s & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_e^t} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{N}^e \\ \bar{T}^e \\ \bar{M}_i^e \\ \bar{M}_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_e}$$

# Trasformazione locale-globale / 2

- degli spostamenti nodali

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{u}_i^e \\ \bar{w}_i^e \\ \bar{\varphi}_i^e \\ \bar{u}_j^e \\ \bar{w}_j^e \\ \bar{\varphi}_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{\bar{u}}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} +c & +s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +s & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +c & +s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\bar{A}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \varphi_i^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ \varphi_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_e}$$

- delle forze nodali

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_i^e \\ Q_i^e \\ M_i^e \\ P_j^e \\ Q_j^e \\ M_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} +c & +s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +s & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +c & +s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\bar{A}}_e^t} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{N}_i^e \\ \bar{T}_i^e \\ \bar{M}_i^e \\ \bar{N}_j^e \\ \bar{T}_j^e \\ \bar{M}_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{\bar{p}}_e}$$

# Relazioni delle trasformazioni locale-globale

- Relazioni della trasformazione locale-globale di forze e spostamenti nodali:

$$\mathbf{d}_e = \bar{\mathbf{A}}_e \mathbf{u}_e \quad , \quad \mathbf{p}_e = \bar{\mathbf{A}}_e^t \mathbf{s}_e$$

Vale infatti:

$$\mathbf{p}_e^t \mathbf{u}_e = \mathbf{s}_e^t \mathbf{d}_e = \mathbf{s}_e^t (\bar{\mathbf{A}}_e \mathbf{u}_e) = (\bar{\mathbf{A}}_e^t \mathbf{s}_e)^t \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{p}_e = \bar{\mathbf{A}}_e^t \mathbf{s}_e$$

- Trasformazione locale-globale della matrice di rigidzza trave  $(i, j)$ :

$$\mathbf{K}_e = \bar{\mathbf{A}}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{A}}_e$$

Vale infatti

$$\Phi_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{A}}_e \mathbf{u}_e)^t \bar{\mathbf{K}}_e (\bar{\mathbf{A}}_e \mathbf{u}_e) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^t (\bar{\mathbf{A}}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{A}}_e) \mathbf{u}_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e$$

$$\Rightarrow \mathbf{K}_e = \bar{\mathbf{A}}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{A}}_e$$



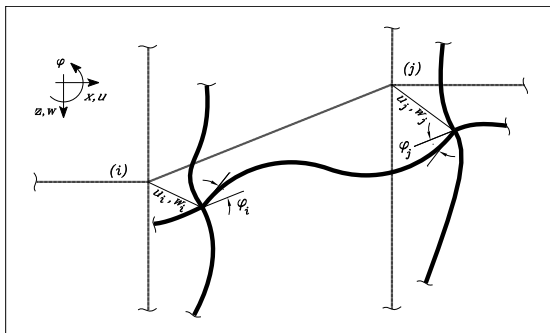
## 6 Il metodo delle rigidezze

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- **Analisi globale / congruenza cinematica**
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

# Congruenza cinematica nodale

## definizione di congruenza

*gli spostamenti (e le rotazioni) nodali devono essere uguali per tutti gli elementi convergenti sullo stesso nodo.*



# Congruenza cinematica nodale

## definizione di congruenza

*gli spostamenti (e le rotazioni) nodali devono essere uguali per tutti gli elementi convergenti sullo stesso nodo.*

- vettore globale degli spostamenti nodali

$$\mathbf{u} \equiv [(u, v, \varphi)_1, \dots, (u, v, \varphi)_i, \dots, (u, v, \varphi)_j, \dots, (u, v, \varphi)_n]^t$$

- congruenza cinematica sul generico nodo  $k$  (per ogni elemento convergente sul nodo):

$$u_k^e = u_k, \quad v_k^e = v_k, \quad \varphi_k^e = \varphi_k, \quad \forall e$$

- operazione di indentificazione delle variabili nodali sul generico elemento di nodi  $(i, j)$ :

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{l}_e \mathbf{u} :$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{u}_e \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ [u_i \quad v_i \quad \varphi_i \quad u_j \quad v_j \quad \varphi_j] \\ \swarrow \hspace{4em} \searrow \\ [u_1 \quad v_1 \quad \varphi_1 \quad \cdots \quad u_i \quad v_i \quad \varphi_i \quad \cdots \quad u_j \quad v_j \quad \varphi_j \quad \cdots \quad u_n \quad v_n \quad \varphi_n] \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ \mathbf{u} \end{array}$$

# Relazioni di congruenza per una trave di nodi $(i, j)$

I parametri nodali che caratterizzano (nel riferimento locale) la deformazione di una trave sono univocamente determinati da precise *relazioni di congruenza cinematica* in funzione degli spostamenti dei nodi dell'intera struttura (nel riferimento globale).

$$\mathbf{d}_e = \bar{\mathbf{A}}_e \mathbf{u}_e = \bar{\mathbf{A}}_e \mathbf{l}_e \mathbf{u} = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$$

$\mathbf{A}_e$  è detta **matrice di congruenza**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{d}_e \\ \Delta \bar{u}^e \\ \Delta \bar{w}^e \\ \bar{\varphi}_i^e \\ \bar{\varphi}_j^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} -c & -s & 0 & +c & +s & 0 \\ -s & +c & 0 & +s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & -c & -s & 0 & \dots & +c & +s & 0 & \dots \\ \dots & -s & +c & 0 & \dots & +s & -c & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ \dots \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \\ \dots \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

# Rappresentazione cinematica della struttura

## Le cinematiche fondamentali della struttura

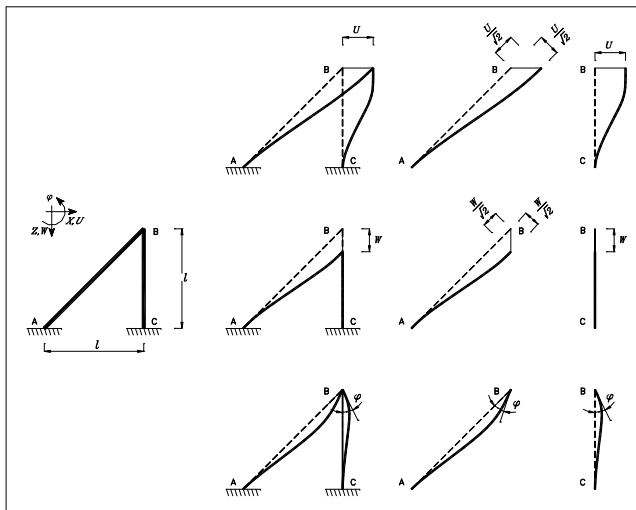
- La soluzione della linea elastica per ogni trave della struttura e le relazioni di congruenza nodale forniscono una rappresentazione della cinematica compatibile dell'intera struttura in funzione dei soli parametri  $\mathbf{u}$  di spostamento dei nodi della struttura

$$\bar{\mathbf{u}}(x) = \left\{ \begin{array}{c} u_e(x) \\ w_e(x) \end{array} \right\} = \mathbf{F}(x) \mathbf{u}_e \quad , \quad \bar{\mathbf{u}}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$$

- Ogni singolo parametro scalare del vettore degli spostamenti nodali  $\mathbf{u}$  è associato ad una cinematica fondamentale della struttura, cioè ad una cinematica della struttura ottenuta per un valore arbitrario del parametro considerato e con valori nulli dei rimanenti parametri.
- Una generica cinematica compatibile dell'intera struttura risulta dalla combinazione lineare delle cinematiche fondamentali associate ad ognuno dei parametri scalari del vettore  $\mathbf{u}$

# Rappresentazione cinematica della struttura

Le cinematiche fondamentali della struttura / esempio



Asta AB

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{2}} U - \frac{1}{\sqrt{2}} W$$

$$\Delta w = \frac{1}{\sqrt{2}} U + \frac{1}{\sqrt{2}} W$$

$$\varphi_i = 0$$

$$\varphi_j = \varphi$$

Asta BC

$$\Delta u = -W$$

$$\Delta w = U$$

$$\varphi_i = \varphi$$

$$\varphi_j = 0$$

# Rappresentazione cinematica della struttura

## Osservazioni

- In generale, il numero dei parametri di spostamento nodale (e quindi il numero di cinematiche fondamentali) è  $3 \times n$ , dove  $n$  indica il numero di nodi.
- La necessaria presenza dei vincoli cinematici esterni (altrimenti la struttura sarebbe labile) predetermina i valori di alcuni parametri cinematici nodali e riduce il numero dei parametri cinematici indipendenti.
- Come vedremo, tale numero può essere ulteriormente ridotto da condizioni di vincolo costitutivo come, ad esempio, l'ipotesi di indeformabilità assiale delle travi.
- A meno di casi particolarmente semplici, è invece esclusa dalla nostra trattazione la presenza di sconnessioni interne (tipo cerniere interne, ecc.), che aumenterebbe il numero dei parametri cinematici indipendenti e richiederebbe uno studio ad hoc del problema.
- Fa eccezione il caso delle travature reticolari, la cui rappresentazione cinematica risulta particolarmente semplice essendo definita dalla sola posizione (e non rotazione) dei relativi nodi-cerniera.

## 6 Il metodo delle rigidezze

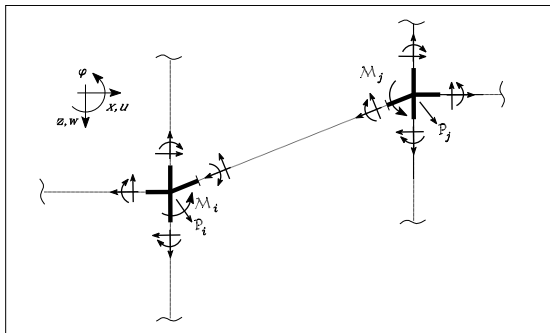
- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- **Analisi globale / equilibrio**
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni



# Equilibrio nodale

## definizione di equilibrio nodale

*per ogni nodo, la risposta elastica, cioè la somma delle forze (e coppie) nodali interne, trasmesse dagli elementi convergenti sul nodo, deve equilibrare le forze (e coppie) applicate esternamente al nodo.*



# Equilibrio nodale

## definizione di equilibrio nodale

*per ogni nodo, la risposta elastica, cioè la somma delle forze (e coppie) nodali interne, trasmesse dagli elementi convergenti sul nodo, deve equilibrare le forze (e coppie) applicate esternamente al nodo.*

- Vettore globale dei carichi esterni nodali

$$\mathbf{p} \equiv [(P, Q, M)_1, \dots, (P, Q, M)_i, \dots, (P, Q, M)_j, \dots, (P, Q, M)_n]^t$$

- Equilibrio del generico nodo  $k$  (la somma è estesa a tutti gli elementi convergenti sul nodo):

$$P_k = \sum_e P_k^e, \quad Q_k = \sum_e Q_k^e, \quad M_k = \sum_e M_k^e$$

- Equilibrio globale su tutti i nodi della struttura (equazione dei lavori virtuali):

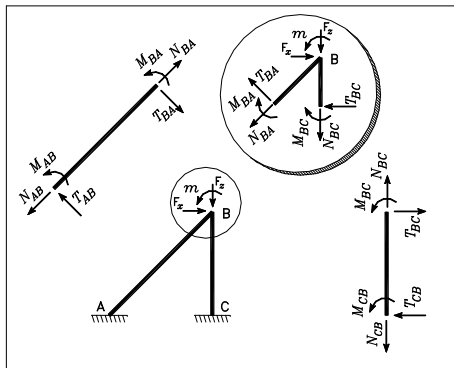
$$\underbrace{\mathbf{p}^t \delta \mathbf{u}}_{\text{lav.est. } \delta L_e} = \underbrace{\sum_e \int_I \boldsymbol{\sigma}^t \delta \boldsymbol{\epsilon} dx}_{\text{lav.int. } \delta L_i}, \quad \forall \delta \boldsymbol{\epsilon}[x] \text{ congruente con } \delta \mathbf{u}$$

# Equilibrio nodale

esempio (continuazione)

## definizione di equilibrio nodale

per ogni nodo, la risposta elastica, cioè la somma delle forze (e coppie) nodali interne, trasmesse dagli elementi convergenti sul nodo, deve equilibrare le forze (e coppie) applicate esternamente al nodo.



$$\begin{cases} \frac{N_{BA}}{\sqrt{2}} + \frac{T_{BA}}{\sqrt{2}} + T_{BC} = F_x \\ -\frac{N_{BA}}{\sqrt{2}} + \frac{T_{BA}}{\sqrt{2}} - N_{BC} = F_z \\ M_{BA} + M_{BC} = m \end{cases}$$

# Equilibrio nodale

## Rappresentazione vettoriale

- Equilibrio globale della struttura (equazione dei lavori virtuali):

$$\mathbf{p}^t \delta \mathbf{u} = \sum_e \int_I \boldsymbol{\sigma}^t \delta \epsilon dx, \quad \forall \delta \epsilon[x] \text{ congruente con } \delta \mathbf{u}$$

- Equilibrio della generica trave (equazione dei lavori virtuali):

$$\mathbf{s}_e^t \delta \mathbf{d}_e = \int_I \boldsymbol{\sigma}^t \delta \epsilon dx, \quad \forall \delta \epsilon[x] \text{ congruente con } \delta \mathbf{d}_e$$

Riscrittura della condizione di equilibrio su tutti i nodi della struttura:

$$\mathbf{p}^t \delta \mathbf{u} = \sum_e \mathbf{s}_e^t \delta \mathbf{d}_e = \sum_e \mathbf{s}_e^t (\mathbf{A}_e \delta \mathbf{u}) = \left( \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e \right)^t \delta \mathbf{u}$$

$\forall \delta \mathbf{d}_e$  congruente con  $\delta \mathbf{u}$  : in particolare per  $\delta \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \delta \mathbf{u}$

$$\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$$

# Risposta elastica ed equilibrio nodale

- I vettori  $\mathbf{s}_e$  sono rappresentativi delle azioni interne delle singole travi indotte dalla deformata elastica della stessa, in quanto forze nodali prodotte a livello di ogni elemento trave da questa deformazione (elastica) : **sono la risposta elastica relativa alle singole travi.**
- In tale senso il vettore

$$\mathbf{S} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$$

è rappresentativo delle azioni interne dell'intera struttura indotte dalla deformazione elastica della stessa, in quanto risultante nodale della risposta elastica delle singole travi: **è la risposta elastica della struttura.**

- La condizione di equilibrio nodale richiede l'uguaglianza tra le forze esterne applicate ai nodi della struttura e le forze interne della risposta elastica nodale (prodotta dalla deformazione interna alla struttura)

$$\mathbf{p} = \mathbf{S}$$

# Fasi dell'analisi

## decomposizione

discretizzazione

completa  $\Rightarrow$ 

localizzazione

completa  $\Rightarrow$ 

rappresentazione nodale

completa  $\Rightarrow$ 

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$$

## assemblaggio e soluzione

globalizzazione

completa  $\Rightarrow$ 

assemblaggio

completa  $\Rightarrow$ 

condizioni al contorno

calcolo delle variabili primarie

rappresentazione della soluzione

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$$
$$\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$$

## 6 Il metodo delle rigidezze

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- **Analisi globale / il metodo delle rigidezze**
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

# Il metodo delle rigidezze

Il **metodo delle rigidezze** (o degli spostamenti) ...

*definisce* una strategia di risoluzione di travature elastiche con carichi esterni costituiti (o equivalenti) a forze e coppie applicate ai nodi.

*fa uso* delle seguenti relazioni:

- (a)  $\mathbf{s}_e = \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e$  (di elasticità di ogni singola trave);
- (b)  $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$  (di compatibilità cinematica nodale);
- (c)  $\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$  (di equilibrio nodale).

In particolare, il metodo delle rigidezze ...

*impone* le condizioni di equilibrio nodale (c)

*assumendo* le relazioni di elasticità (a),

e *facendo uso* delle condizioni di compatibilità (b)

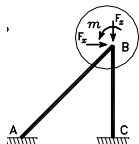
$$\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e = \sum_e \mathbf{A}_e^t (\bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e) = \sum_e \mathbf{A}_e^t (\bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{A}_e \mathbf{u}) = \left( \sum_e \mathbf{A}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{A}_e \right) \mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{u}$$

La matrice  $\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{A}_e$  è detta *matrice di rigidezza della struttura*.



# Assemblaggio della matrice di rigidzza

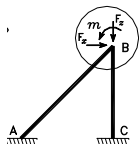
## esempio (continuazione)



	asta AB	asta BC
<b>rel. congruenza</b> $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$	$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{2}} (U - W), \quad \varphi_i = 0$ $\Delta w = \frac{1}{\sqrt{2}} (U + W), \quad \varphi_j = \varphi$	$\Delta u = -W, \quad \varphi_i = \varphi$ $\Delta w = U, \quad \varphi_j = 0$
<b>rel. costitutive</b> $\mathbf{s}_e = \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e$	$N_{AB} = \frac{EA}{\sqrt{2}l} \Delta u$ $T_{AB} = \frac{12EJ}{2\sqrt{2}l^3} \Delta w + \frac{6EJ}{2l^2} \varphi$ $M_{AB} = \frac{6EJ}{2l^2} \Delta w + \frac{2EJ}{\sqrt{2}l} \varphi$ $M_{BA} = \frac{6EJ}{2l^2} \Delta w + \frac{4EJ}{\sqrt{2}l} \varphi$	$N_{BC} = \frac{EA}{l} \Delta u$ $T_{BC} = \frac{12EJ}{l^3} \Delta w + \frac{6EJ}{l^2} \varphi$ $M_{BC} = \frac{6EJ}{l^2} \Delta w + \frac{4EJ}{l} \varphi$ $M_{CB} = \frac{6EJ}{l^2} \Delta w + \frac{2EJ}{l} \varphi$
<b>rel. equilibrio</b> $\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{N_{BA}}{\sqrt{2}} + \frac{T_{BA}}{\sqrt{2}} + T_{BC} = F_x \\ -\frac{N_{BA}}{\sqrt{2}} + \frac{T_{BA}}{\sqrt{2}} - N_{BC} = F_z \\ M_{BA} + M_{BC} = m \end{array} \right.$	

# Assemblaggio della matrice di rigidzza

esempio (continuazione)



	asta AB	asta BC
<p>rel. congruenza</p> $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$	$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{2}} (U - W), \quad \varphi_i = 0$ $\Delta w = \frac{1}{\sqrt{2}} (U + W), \quad \varphi_j = \varphi$	$\Delta u = -W, \quad \varphi_i = \varphi$ $\Delta w = U, \quad \varphi_j = 0$
<p>rel. costitutive</p> $\mathbf{s}_e = \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{A}_e \mathbf{u}$	$N_{AB} = \frac{EA}{\sqrt{2}l} \left( \frac{U-W}{\sqrt{2}} \right)$ $T_{AB} = \frac{12EJ}{2\sqrt{2}l^3} \left( \frac{U+W}{\sqrt{2}} \right) + \frac{6EJ}{2l^2} \varphi$ $M_{AB} = \frac{6EJ}{2l^2} \left( \frac{U+W}{\sqrt{2}} \right) + \frac{2EJ}{\sqrt{2}l} \varphi$ $M_{BA} = \frac{6EJ}{2l^2} \left( \frac{U+W}{\sqrt{2}} \right) + \frac{4EJ}{\sqrt{2}l} \varphi$	$N_{BC} = \frac{EA}{l} (-W)$ $T_{BC} = \frac{12EJ}{l^3} (U) + \frac{6EJ}{l^2} \varphi$ $M_{BC} = \frac{6EJ}{l^2} (U) + \frac{4EJ}{l} \varphi$ $M_{CB} = \frac{6EJ}{l^2} (U) + \frac{2EJ}{l} \varphi$
<p>rel. equilibrio</p> $\mathbf{p} = \mathbf{K} \mathbf{u}$	$\begin{bmatrix} \left( \frac{EA}{2\sqrt{2}l} + (12 + \frac{3}{\sqrt{2}}) \frac{EJ}{l^3} \right) & \left( -\frac{EA}{2\sqrt{2}l} + \frac{3EJ}{\sqrt{2}l^3} \right) & (6 + \frac{3EJ}{\sqrt{2}}) \frac{EJ}{l^2} \\ \left( -\frac{EA}{2\sqrt{2}l} + \frac{3EJ}{\sqrt{2}l^3} \right) & \left( (1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}) \frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{\sqrt{2}l^3} \right) & \frac{3EJ}{\sqrt{2}l^2} \\ (6 + \frac{3EJ}{\sqrt{2}}) \frac{EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{\sqrt{2}l^2} & (4 + \frac{4EJ}{\sqrt{2}}) \frac{EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \\ m \end{bmatrix}$	

# Una rappresentazione energetica del metodo delle rigidzze

L'energia di deformazione (significato energetico della matrice di rigidzza):

$$\begin{aligned}\Phi[u] &= \sum_{\text{travi}} \Phi_e[u_e] = \sum \left( \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e \right) = \frac{1}{2} \sum (\mathbf{u}^t \mathbf{A}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{A}_e \mathbf{u}) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \underbrace{\left( \sum \mathbf{A}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{A}_e \right)}_{\mathbf{K}} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u}\end{aligned}$$

Il lavoro dei carichi :

$$\text{LC} = \mathbf{p}^t \mathbf{u}$$

Minimo della energia potenziale totale :

$$\begin{aligned}\Pi(u) = \Phi(u) - \text{LC} = \min_u &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{p}^t \mathbf{u} = \min_u \\ &\Rightarrow \delta \mathbf{u}^t (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{p}) = 0, \forall \delta \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}\end{aligned}$$

# Caratteristiche della matrice di rigidezza della struttura

- La matrice di rigidezza globale della struttura è simmetrica

l'operazione di assemblaggio  $\mathbf{K} = \sum_{e \in E} \mathbf{A}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{A}_e$  conserva, sulla matrice globale  $\mathbf{K}$ , le proprietà di simmetria delle matrici locali  $\bar{\mathbf{K}}_e$

- La matrice  $\mathbf{K}$  è singolare nelle tre direzioni che corrispondono ai tre modi rigidi della struttura ( $\mathbf{u}_{r1}, \mathbf{u}_{r2}, \mathbf{u}_{r3}$ )

I moti rigidi, per definizione, non producono deformazione nella struttura ed è pertanto nulla la relativa energia di deformazione e risulta

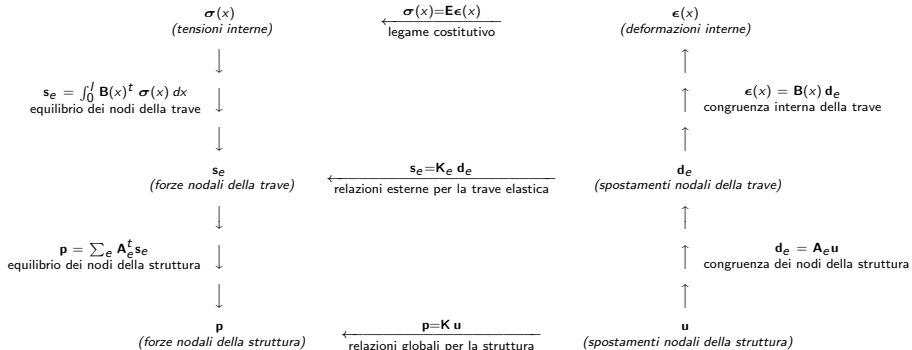
$$\Phi^r = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{rk}^t \mathbf{K} \mathbf{u}_{rk} = 0, \quad (k = 1, 2, 3)$$

- La matrice di rigidezza della struttura è definita positiva in tutte le direzioni diverse dalle tre direzioni di singolarità, cioè

$$\mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} > 0, \quad \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{u}_{rk}$$

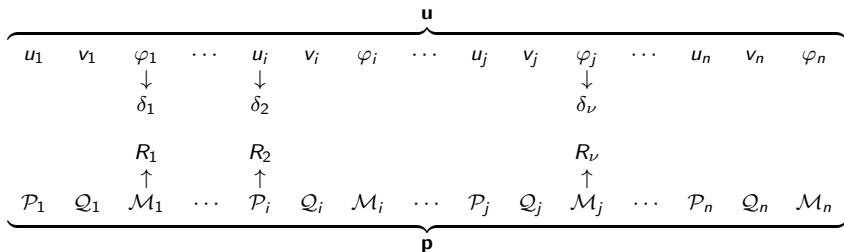
E' una proprietà generale legata alla positività della energia di deformazione  $\Phi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} > 0$  della struttura: bisogna fisicamente compiere lavoro positivo per deformare un corpo

# Relazioni multilivello



# Condizioni di vincolo sul contorno

Applicazione di cedimenti sul contorno vincolato:



Si osservi che le componenti statiche duali delle componenti cinematiche vincolare rappresentano le reazioni esplicitate dal vincolo

- La presenza delle condizioni di vincolo sul contorno, annullando gli atti di moto rigido e quindi le direzioni di singolarità della matrice di rigidzza globale  $\mathbf{K}$ , rende ben definito il problema:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$$

- Rimane aperto il problema della gestione delle condizioni di vincolo/cedimento nell'ambito della risoluzione del sistema  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$ .

# Fasi dell'analisi

## decomposizione

discretizzazione

completa  $\Rightarrow$ 

localizzazione

completa  $\Rightarrow$ 

rappresentazione nodale

completa  $\Rightarrow$ 

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e$$

## assemblaggio e soluzione

globalizzazione

completa  $\Rightarrow$ 

assemblaggio

completa  $\Rightarrow$ 

condizioni al contorno

completa  $\Rightarrow$ 

$$\mathbf{p} = \mathbf{K} \mathbf{u}$$

calcolo delle variabili primarie

da completare

rappresentazione della soluzione

da completare

# I passi dell'analisi

Una strategia automatica di analisi

Proprio per la naturalezza con cui è stato possibile formalizzare le varie fasi del metodo in una successione di operazioni matriciali (il linguaggio dei calcolatori), il metodo delle rigidzze si presta in modo particolare ad una implementazione in codici di calcolo automatico.

- ① definizione dei parametri cinematici nodali  $\mathbf{u}$  e dei relativi vincoli;
- ② determinazione, per ogni elemento, delle matrici di congruenza  $\mathbf{A}_e$  e di rigidzza locale  $\bar{\mathbf{K}}_e$ ;
- ③ assemblaggio della matrice di rigidzza della struttura  $\mathbf{K} = \sum \mathbf{A}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{A}_e$  ;
- ④ assemblaggio del vettore  $\mathbf{p}$  dei carichi esterni nodali associato al vettore delle incognite cinematiche  $\mathbf{u}$  sulla base della relazione di dualità  $\mathbf{L}\mathbf{C} = \mathbf{p}^t \mathbf{u}$  ;
- ⑤ risoluzione, in termini dei parametri nodali incogniti  $\mathbf{u}$ , del sistema algebrico

$$\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{p} = 0 ;$$

- ⑥ a partire dagli spostamenti nodali  $\mathbf{u}$ , ricostruzione della soluzione in termini di deformata e caratteristiche di sollecitazioni facendo uso, a livello di ciascun elemento, della soluzione della linea elastica.

$$\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{s}_e = \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e \longrightarrow (u(x), w(x), \varphi(x), \varepsilon(x), \chi(x), N(x), T(x), M(x))$$



# I passi dell'analisi

## Una strategia manuale di analisi

### 1 Analisi cinematica

- Sono definiti i parametri cinematici nodali indipendenti  $\mathbf{u}$ , congruenti con i vincoli interni ed esterni della struttura
  - Per ogni parametro nodale, è tracciata la relativa cinematica fondamentale: la combinazione lineare di queste rappresenta l'insieme delle possibili cinematiche compatibili per la struttura.
- 
- La corretta costruzione delle cinematiche fondamentali è fondamentale per il metodo delle rigidezze.
  - Tale fase risulta delicata se, nell'ottica di un'analisi manuale al fine di ridurre il numero di incognite del problema, si introducono (come vedremo in seguito) vincoli interni di inestensibilità assiale delle aste.
  - I nuovi vincoli devono essere tenuti coerentemente in conto nel tracciamento delle cinematiche fondamentali.

# I passi dell'analisi

Una strategia manuale di analisi

- 1 Analisi cinematica
- 2 **Analisi locale**: per ogni trave ...
  - sono determinati i parametri cinematici deformativi (nel riferimento locale) in funzione dei parametri cinematici globali  $\mathbf{u}$  facendo uso dei coseni direttori dell'asta (la matrice di congruenza)

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$$

- sono determinate le forze nodali in funzione dei parametri deformativi facendo uso dei coefficienti di rigidezza (la matrice di rigidezza)

$$\mathbf{s}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{A}_e \mathbf{u}$$

# I passi dell'analisi

Una strategia manuale di analisi

- 1 Analisi cinematica
- 2 Analisi locale
- 3 **Analisi globale:** sui nodi della struttura
  - Sono scritte le condizioni di equilibrio su tutti i nodi della struttura tra i carichi esterni applicati  $\mathbf{p}$  e le forze nodali  $\bar{\mathbf{p}}_e$  trasmesse dalle varie aste confluenti nei nodi

$$\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e \Rightarrow \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$$

- Ciò conduce ad un sistema di equazioni algebriche lineari definite in termini della matrice di rigidità della struttura  $\mathbf{K} = \sum \mathbf{A}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e$

si osservi che al sistema di equazioni algebriche possiamo pervenire assemblando direttamente la matrice di rigidità  $\mathbf{K} = \sum \mathbf{A}_e^t \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e$  ed il vettore dei carichi sulla base dell'assemblaggio rispettivamente dell'energia di deformazione e del lavoro dei carichi

$$\Phi[u] = \sum_{\text{travi}} \Phi_e[u_e] = \sum \left( \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^t \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{d}_e \right) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} \quad , \quad LC = \mathbf{p}^t \mathbf{u}$$

# I passi dell'analisi

Una strategia manuale di analisi

- 1 Analisi cinematica
- 2 Analisi locale
- 3 Analisi globale
- 4 **Risoluzione del sistema e rappresentazione della soluzione:** in termini di spostamenti e caratteristiche di sollecitazione

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}$$

$$\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{s}_e = \bar{\mathbf{K}}_e\mathbf{d}_e \longrightarrow (u(x), w(x), \varphi(x), \varepsilon(x), \chi(x), N(x), T(x), M(x)))$$

# I passi dell'analisi

## Una strategia manuale di analisi

- 1 Analisi cinematica
- 2 Analisi locale
- 3 Analisi globale
- 4 Risoluzione del sistema e rappresentazione della soluzione

### osservazioni

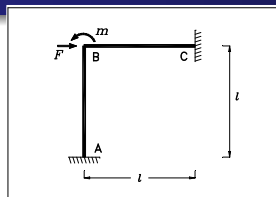
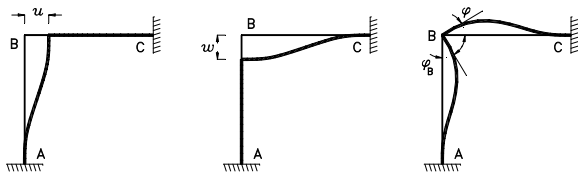
- In presenza di una struttura labile il metodo delle rigidezze conduce ad un sistema algebrico  $\mathbf{Ku} = \mathbf{p}$  di tipo singolare, e come tale non risolvibile (la matrice  $\mathbf{Ku} = \mathbf{p}$  non è invertibile).
- Il metodo delle rigidezze è indifferente al carattere isostatico o iperstatico di una struttura.
- Contrariamente al metodo delle forze, il metodo delle rigidezze non risulta appesantito dall'aumento del grado di iperstaticità di una struttura.
- Paradossalmente, l'aumento del grado di iperstaticità con l'introduzione di ulteriori vincoli cinematici comporta una riduzione del numero di parametri nodali indipendenti e, quindi, una semplificazione del sistema di equazioni algebriche di equilibrio nodale cui il metodo delle rigidezze perviene.

# Una applicazione

## Analisi elastica di un portale zoppo

### analisi cinematica (il vettore delle incognite $u$ )

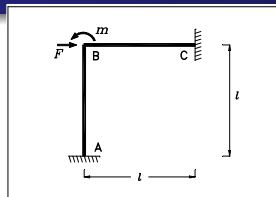
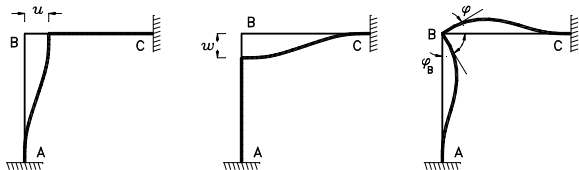
- Le deformate elastiche delle aste della struttura sono completamente determinate, mediante le equazioni della linea elastica, in funzione degli spostamenti dei relativi nodi
- La struttura presenta 3 nodi, ma il rispetto dei vincoli esterni (di incastro) riduce i parametri cinematici indipendenti alle sole componenti di spostamento ( $u, w, \varphi$ ) del nodo  $B$
- Ognuno di questi parametri è associato ad una cinematica fondamentale della struttura.



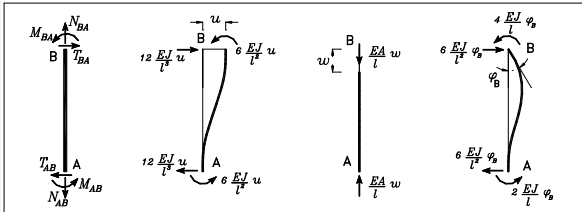
# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $u$ )



analisi locale delle aste ( $d_e = A_e u$ ,  $s_e = k_e d_e$ ) / asta AB



$$N_{AB} = N_{BA} = -\frac{EA}{l} w$$

$$T_{AB} = T_{BA} = \frac{12EJ}{l^3} u + \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

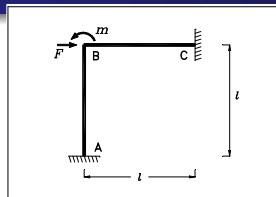
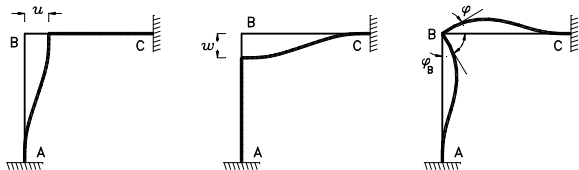
$$M_{AB} = \frac{6EJ}{l^2} u + \frac{2EJ}{l} \varphi$$

$$M_{BA} = \frac{6EJ}{l^2} u + \frac{4EJ}{l} \varphi$$

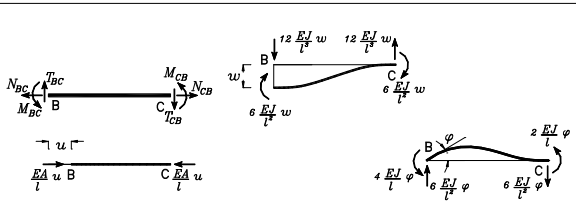
# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $u$ )



analisi locale delle aste ( $d_e = A_e u$ ,  $s_e = k_e d_e$ ) / asta BC



$$N_{BC} = N_{CB} = -\frac{EA}{l} u$$

$$T_{BC} = T_{CB} = -\frac{12EJ}{l^3} w + \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$M_{BC} = -\frac{6EJ}{l^2} w + \frac{4EJ}{l} \varphi$$

$$M_{CB} = -\frac{6EJ}{l^2} w + \frac{2EJ}{l} \varphi$$



# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $u$ )

analisi locale delle aste ( $d_e = A_e u$ ,  $s_e = k_e d_e$ )

$$N_{AB} = N_{BA} = -\frac{EA}{l} w$$

$$N_{BC} = N_{CB} = -\frac{EA}{l} u$$

$$T_{AB} = T_{BA} = \frac{12EJ}{l^3} u + \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$T_{BC} = T_{CB} = -\frac{12EJ}{l^3} w + \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$M_{AB} = \frac{6EJ}{l^2} u + \frac{2EJ}{l} \varphi$$

$$M_{BC} = -\frac{6EJ}{l^2} w + \frac{4EJ}{l} \varphi$$

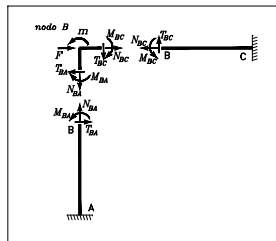
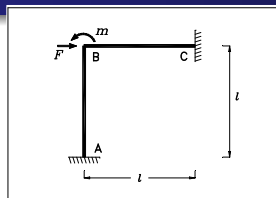
$$M_{BA} = \frac{6EJ}{l^2} u + \frac{4EJ}{l} \varphi$$

$$M_{CB} = -\frac{6EJ}{l^2} w + \frac{2EJ}{l} \varphi$$

le equazioni di equilibrio nodale ( $p = \sum_e A_e^t s_e$ )

Le relazioni di equilibrio che determinano i valori delle incognite cinematiche ( $u, w, \varphi$ ) sono duali, nel senso dei lavori virtuali, delle incognite stesse: le condizioni di equilibrio alla traslazione orizzontale (verso destra), alla traslazione verticale (verso il basso) e alla rotazione del nodo  $B$

$$T_{BA} - N_{BC} = F, \quad N_{BA} + T_{BC} = 0, \quad M_{BA} + M_{BC} = m$$



# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $\mathbf{u}$ )

analisi locale delle aste ( $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e$ )

$$N_{AB} = N_{BA} = -\frac{EA}{l} w$$

$$N_{BC} = N_{CB} = -\frac{EA}{l} u$$

$$T_{AB} = T_{BA} = \frac{12EJ}{l^3} u + \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$T_{BC} = T_{CB} = -\frac{12EJ}{l^3} w + \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$M_{AB} = \frac{6EJ}{l^2} u + \frac{2EJ}{l} \varphi$$

$$M_{BC} = -\frac{6EJ}{l^2} w + \frac{4EJ}{l} \varphi$$

$$M_{BA} = \frac{6EJ}{l^2} u + \frac{4EJ}{l} \varphi$$

$$M_{CB} = -\frac{6EJ}{l^2} w + \frac{2EJ}{l} \varphi$$

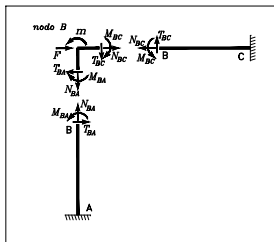
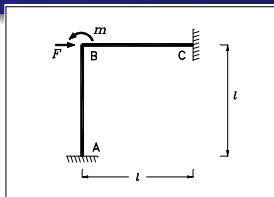
le equazioni di equilibrio nodale ( $\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$ )

Facendo uso delle relazioni locali  $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e$ , le relazioni di equilibrio sono espresse nelle incognite  $\mathbf{u}$

$$T_{BA} - N_{BC} = F \quad \frac{EA}{l} u + \frac{12EJ}{l^3} u + \frac{6EJ}{l^2} \varphi = F$$

$$-N_{BA} - T_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{EA}{l} w - \frac{12EJ}{l^3} w + \frac{6EJ}{l^2} \varphi = 0$$

$$M_{BA} + M_{BC} = m \quad \frac{6EJ}{l^2} u - \frac{6EJ}{l^2} w + \frac{8EJ}{l} \varphi = m$$

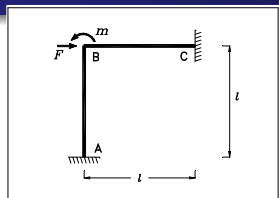


# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $\mathbf{u}$ )

analisi locale delle aste ( $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e$ )



le equazioni di equilibrio nodale ( $\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e = \mathbf{K} \mathbf{u}$ )

$$\frac{EA}{l} u + \frac{12EJ}{l^3} u + \frac{6EJ}{l^2} \varphi = F$$

$$\frac{EA}{l} w + \frac{12EJ}{l^3} w - \frac{6EJ}{l^2} \varphi = 0$$

$$\frac{6EJ}{l^2} u - \frac{6EJ}{l^2} w + \frac{8EJ}{l} \varphi = m$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} + 12 \frac{EJ}{l^3} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{EA}{l} + 12 \frac{EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{6EJ}{l^2} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{8EJ}{l} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ m \end{bmatrix}$$

La forma matriciale delle relazioni  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$  evidenzia la la matrice di rigidità  $\mathbf{K}$  della struttura

la soluzione del problema ( $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p}$ )

$$\varphi = \frac{m - \frac{Fl}{2+\mu}}{8 \frac{EJ}{l} - 12 \frac{EJ}{l(2+\mu)}} , \quad u = \frac{\frac{Fl^3}{6EJ} - \varphi l}{2 + \mu} , \quad w = \frac{+\varphi l}{2 + \mu} , \quad \text{con } \mu = \frac{EAl^2}{6EJ}$$

## 6 Il metodo delle rigidezze

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- **Il vincolo di inestensibilità assiale**
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni

# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo/il vincolo di inestensibilità assiale

la soluzione del problema ( $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}$ )

$$\varphi = \frac{m - \frac{Fl}{2+\mu}}{8\frac{EJ}{I} - 12\frac{EJ}{I(2+\mu)}} , \quad u = \frac{\frac{Fl^3}{6EJ} - \varphi l}{2 + \mu} , \quad w = \frac{+\varphi l}{2 + \mu} , \quad \text{con } \mu = \frac{EAI^2}{6EJ}$$

influenza quantitativa della deformabilità assiale

- Il coefficiente  $\mu$  è una misura (adimensionale) del rapporto tra un indice di deformabilità assiale  $EAI$  e un indice di deformabilità flessionale  $\frac{EJ}{I}$
- Permette di studiare l'influenza della deformabilità assiale sulla soluzione del problema
- Per i consueti dimensionamenti dell'ingegneria civile, il coefficiente  $\mu$  assume valori elevati ( $\mu \gg 200$ ), per cui risulta

$$\varphi \approx \frac{ml}{8EJ} , \quad u \approx 0 , \quad w \approx 0$$

- per generici portali e telai, la soluzione è approssimata abbastanza bene dalla soluzione corrispondente alla condizione limite  $\mu \rightarrow \infty$  di aste indeformabili assialmente.
- risulta lecito trascurare nella soluzione il contributo legato alla deformabilità da sforzo normale rispetto al contributo legato alla deformabilità da momento flettente.

# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo/il vincolo di inestensibilità assiale

la soluzione (approssimata) del problema ( $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}$ )

$$\varphi \approx \frac{ml}{8EJ}, \quad u \approx 0, \quad w \approx 0, \quad \text{con } \mu = \frac{EA l^2}{6EJ} \rightarrow \infty$$

- per generici portali e telai, la soluzione è approssimata abbastanza bene dalla soluzione corrispondente alla condizione limite  $\mu \rightarrow \infty$  di aste indeformabili assialmente.
- risulta lecito trascurare nella soluzione il contributo legato alla deformabilità da sforzo normale rispetto al contributo legato alla deformabilità da momento flettente.

il vincolo cinematico interno di indeformabilità assiale

- Tali conclusioni suggeriscono una diversa possibile implementazione del metodo delle rigidzze, che introduce a priori, esplicitamente, l'ipotesi di aste indeformabili assialmente.
- Ciò introduce ulteriori vincoli cinematici (interni) nel problema, col vantaggio di ridurre il numero di parametri indipendenti necessari per la sua rappresentazione cinematica.
- Il vincolo di indeformabilità assiale rende indefinito il legame  $N = \frac{EA}{l} \Delta u$ : i valori dello sforzo normale possono essere solo determinati in base a considerazioni di equilibrio.

# Una applicazione

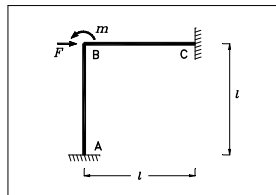
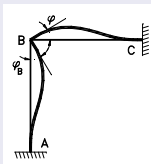
Analisi elastica di un portale zoppo/il vincolo di inestensibilità assiale

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $u$ )

- Per il portale, il vincolo di indeformabilità assiale delle due aste porta all'annullarsi dei parametri di spostamento orizzontale e verticale del nodo  $B$ , riducendo le incognite alla sola rotazione  $\varphi$  del nodo

$$\Delta l_{AB} = 0 = -w, \quad \Delta l_{BC} = 0 = -u$$

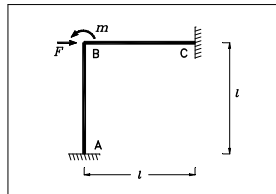
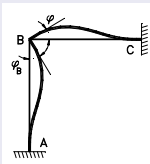
- La forma della configurazione deformata è pertanto descritta dalla sola cinematica fondamentale associata a tale parametro



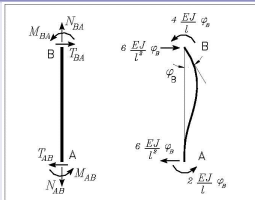
# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo/il vincolo di inestensibilità assiale

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $u$ )



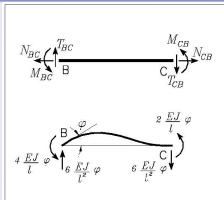
analisi locale delle aste ( $d_e = A_e u$ ,  $s_e = k_e d_e$ )



$$T_{AB} = \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$M_{AB} = \frac{2EJ}{l} \varphi$$

$$M_{BA} = \frac{4EJ}{l} \varphi$$



$$T_{BC} = \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$M_{BC} = \frac{4EJ}{l} \varphi$$

$$M_{CB} = \frac{2EJ}{l} \varphi$$



# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo/il vincolo di inestensibilità assiale

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $\mathbf{u}$ )

analisi locale delle aste ( $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e$ )

$$T_{AB} = \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$T_{BC} = \frac{6EJ}{l^2} \varphi$$

$$M_{AB} = \frac{2EJ}{l} \varphi$$

$$M_{BC} = \frac{4EJ}{l} \varphi$$

$$M_{BA} = \frac{4EJ}{l} \varphi$$

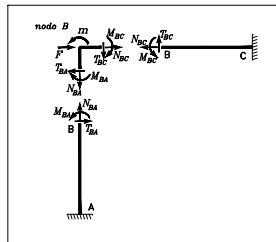
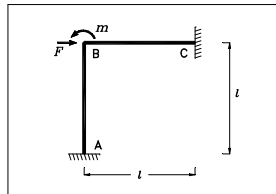
$$M_{CB} = \frac{2EJ}{l} \varphi$$

le equazioni di equilibrio nodale ( $\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e$ )

Le relazioni di equilibrio che determinano i valori delle incognite cinematiche sono duali, nel senso dei lavori virtuali, delle incognite stesse: in tal caso, la rotazione del nodo  $B$  è associata alla sola condizione di equilibrio alla rotazione del nodo  $B$ .

Facendo uso delle relazioni locali  $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e$ :

$$M_{BA} + M_{BC} = m \quad \Rightarrow \quad \frac{8EJ}{l} \varphi = m$$

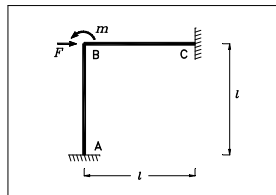


# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo/il vincolo di inestensibilità assiale

analisi cinematica (il vettore delle incognite  $\mathbf{u}$ )

analisi locale delle aste ( $\mathbf{d}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e$ )



le equazioni di equilibrio nodale ( $\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \mathbf{s}_e = \mathbf{K} \mathbf{u}$ )

$$\frac{8EJ}{l} \varphi = m$$

$$\underbrace{\left[ 8 \frac{EJ}{l} \right]}_{\mathbf{K}} \underbrace{[\varphi]}_{\mathbf{u}} = \underbrace{[m]}_{\mathbf{p}}$$

La forma matriciale delle relazioni  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$  evidenzia la la matrice di rigidezza  $\mathbf{K}$  della struttura

la soluzione del problema ( $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p}$ )

$$\varphi = \frac{ml}{8EJ}$$

corrisponde esattamente alla soluzione precedentemente ricavata

# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo/il vincolo di inestensibilità assiale

la soluzione del problema ( $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}$ )

$$\varphi = \frac{m l}{8EJ}$$

La ricostruzione locale delle sollecitazioni ( $T, M$ )

$$T_{AB} = \frac{6EJ}{l^2} \varphi = \frac{3m}{4l}$$

$$T_{BC} = \frac{6EJ}{l^2} \varphi = \frac{3m}{4l}$$

$$M_{AB} = \frac{2EJ}{l} \varphi = \frac{1}{4}m$$

$$M_{BC} = \frac{4EJ}{l} \varphi = \frac{1}{2}m$$

$$M_{BA} = \frac{4EJ}{l} \varphi = \frac{1}{2}m$$

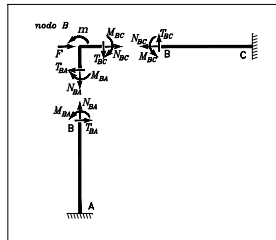
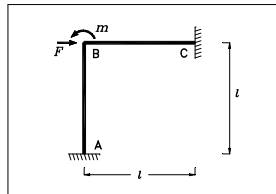
$$M_{CB} = \frac{2EJ}{l} \varphi = \frac{1}{4}m$$

La ricostruzione dello sforzo normale  $N$

I valori dello sforzo normale delle aste possono essere determinati (in molti casi) facendo uso delle equazioni di equilibrio (alla traslazione dei nodi) non ancora utilizzate

$$T_{BA} - N_{BC} = F \quad \Rightarrow \quad N_{BC} = T_{BA} - F = \frac{3m}{4l} - F$$

$$N_{AB} + T_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{AB} = -T_{BC} = -\frac{3m}{4l}$$



# Una applicazione

Analisi elastica di un portale zoppo/il vincolo di inestensibilità assiale

La ricostruzione locale delle sollecitazioni ( $N$ ,  $T$ ,  $M$ )

$$N_{AB} = -\frac{3}{4} \frac{m}{l}$$

$$T_{AB} = \frac{6EJ}{l^2} \varphi = \frac{3}{4} \frac{m}{l}$$

$$M_{AB} = \frac{2EJ}{l} \varphi = \frac{1}{4} m$$

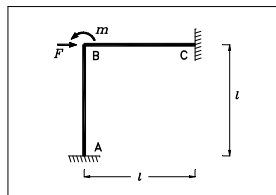
$$M_{BA} = \frac{4EJ}{l} \varphi = \frac{1}{2} m$$

$$N_{BC} = \frac{3}{4} \frac{m}{l} - F$$

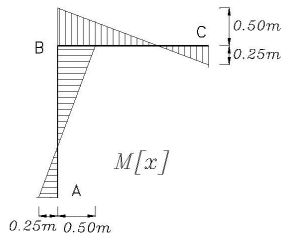
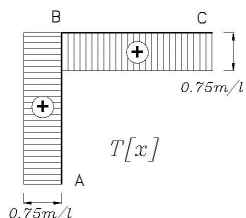
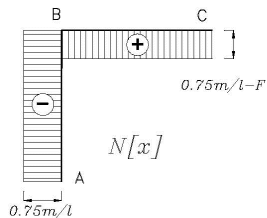
$$T_{BC} = \frac{6EJ}{l^2} \varphi = \frac{3}{4} \frac{m}{l}$$

$$M_{BC} = \frac{4EJ}{l} \varphi = \frac{1}{2} m$$

$$M_{CB} = \frac{2EJ}{l} \varphi = \frac{1}{4} m$$



I diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione ( $N$ ,  $T$ ,  $M$ )



## 6 Il metodo delle rigidezze

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- **Soluzione di incastro perfetto**
- Esempi di applicazioni

# Soluzione di incastro perfetto e soluzione nodale

In presenza di carichi ripartiti lungo una o più travi, per ogni trave la soluzione del problema locale è somma di due aliquote

## *soluzione di incastro perfetto* ( $\tilde{u}[x], \tilde{w}[x]$ )

- in equilibrio quindi con i carichi ripartiti localmente sulla trave,
- a spostamenti nodali nulli

$$EA\tilde{u}_{,xx} = -p_x \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}(l) = 0$$

$$EJ\tilde{w}_{,xxxx} = p_z + \mu_{,x} \quad \tilde{w}(0) = \tilde{\varphi}(0) = \tilde{w}(l) = \tilde{\varphi}(l) = 0 ,$$

## *soluzione nodale* ( $u[x], w[x]$ ) $\equiv \mathbf{F}(x) \mathbf{u}_e$ (o della **linea elastica**)

- in equilibrio con carichi ripartiti nulli
- univocamente definita, mediante le note funzioni polinomiali, dai valori degli spostamenti nodali del problema

Studiamo adesso come la soluzione locale di incastro perfetto condiziona la soluzione nodale e come quindi interviene nella generale soluzione di tutta la struttura

# Schema fittizio equivalente

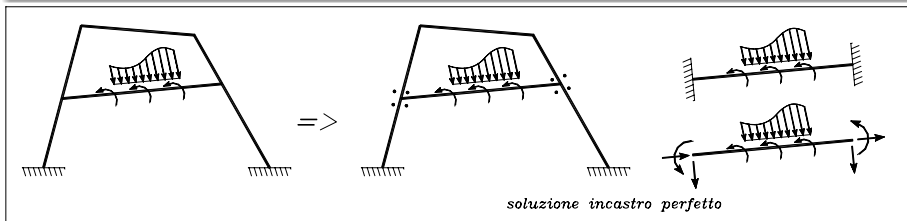
## *soluzione di incastro perfetto* ( $\tilde{u}[x]$ , $\tilde{w}[x]$ )

- in equilibrio quindi con i carichi ripartiti localmente sulla trave,
- a spostamenti nodali nulli

$$EA\tilde{u}_{,xx} = -p_x \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}(l) = 0$$

$$EJ\tilde{w}_{,xxxx} = p_z + \mu_{,x} \quad \tilde{w}(0) = \tilde{\varphi}(0) = \tilde{w}(l) = \tilde{\varphi}(l) = 0 ,$$

La soluzione di incastro perfetto è ottenuta introducendo dei vincoli fittizi di incastro che realizzano le condizioni di spostamenti nulli sul contorno delle travi



# Schema fittizio equivalente

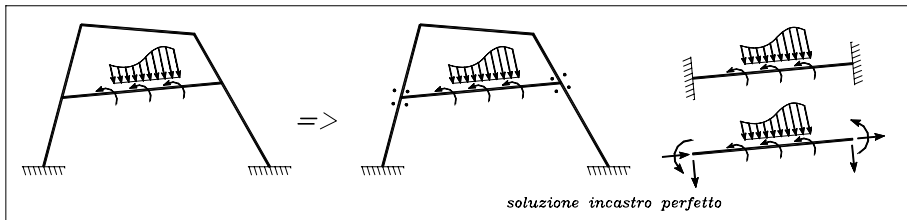
*soluzione di incastro perfetto* ( $\tilde{u}[x], \tilde{w}[x]$ )

$$EA\tilde{u}_{,xx} = -p_x \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}(l) = 0$$

$$EJ\tilde{w}_{,xxxx} = p_z + \mu_{,x} \quad \tilde{w}(0) = \tilde{\varphi}(0) = \tilde{w}(l) = \tilde{\varphi}(l) = 0 \quad ,$$

La soluzione di incastro perfetto è ottenuta introducendo dei vincoli fittizi di incastro che realizzano le condizioni di spostamenti nulli sul contorno delle travi

Introdurre dei vincoli fittizi di incastro ai nodi  $(i, j)$  della singola trave equivale ad applicare delle forze fittizie nodali corrispondenti alle reazioni  $\tilde{\mathbf{r}}_e \equiv (\tilde{N}_i, \tilde{T}_i, \tilde{M}_i, \tilde{N}_j, \tilde{T}_j, \tilde{M}_j)$  esercitate dai vincoli

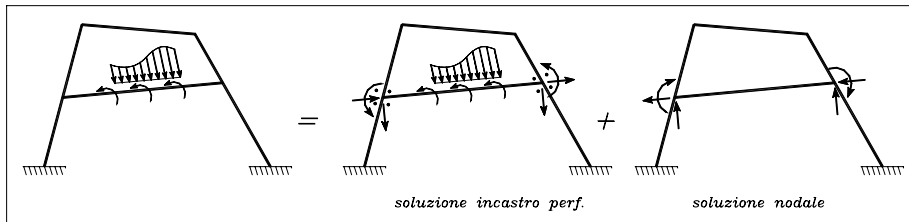




# Reazioni di incastro perfetto e carichi equivalenti nodali

- Introdurre dei vincoli fittizi di incastro ai nodi equivale ad applicare ai nodi delle forze fittizie corrispondenti alle reazioni esercitate dai vincoli stessi.
  - sui nodi  $(i, j)$  della singola trave :  $\tilde{\mathbf{r}}_e \equiv (\tilde{N}_i, \tilde{T}_i, \tilde{M}_i, \tilde{N}_j, \tilde{T}_j, \tilde{M}_j)$ ;
  - sui nodi dell'intera struttura:  $\tilde{\mathbf{r}} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \tilde{\mathbf{r}}_e$
- L'equilibrio con i carichi effettivi applicati ai nodi liberi è ottenuto introducendo un carico aggiuntivo nodale  $-\tilde{\mathbf{r}} = -\sum_e \mathbf{A}_e^t \tilde{\mathbf{r}}_e$  equivalente all'assemblaggio delle reazioni vincolari cambiate di segno.

Tale carico aggiuntivo condiziona i valori della soluzione nodale del problema: esso è il **carico nodale equivalente** (in termini di soluzione nodale) alla presenza dei carichi ripartiti lungo le travi.



# Fasi del procedimento di risoluzione

- ① (*Soluzione di incastro perfetto*) Ogni elemento viene analizzato singolarmente determinando la soluzione di incastro perfetto ( $\{\tilde{u}, \tilde{w}\}, \{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\chi}\}, \{\tilde{N}, \tilde{T}, \tilde{M}\}$ ) correlata ai carichi distribuiti eventualmente presenti, e le reazioni nodali di incastro  $\tilde{\mathbf{r}}_e$  corrispondenti.
- ② (*I carichi nodali equivalenti*) E' assemblato il vettore globale dei carichi nodali equivalente alle reazioni di incastro perfetto  $\tilde{\mathbf{r}} = \sum_e \mathbf{A}_e^t \tilde{\mathbf{r}}_e$ . Tale carico, cambiato di segno, viene aggiunto al carico effettivo esterno applicato ai nodi
- ③ (*Soluzione nodale*) Viene assemblata la matrice di rigidzza e risolto il sistema di equazioni

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{r}}$$

determinando i valori dei parametri cinematici nodali e quindi, per ogni elemento, la soluzione nodale ( $\{u, w\}, \{\varepsilon, \chi\}, \{N, T, M\}$ ).

- ④ (*Soluzione generale*) La soluzione completa del problema è ottenuta dalla sovrapposizione della soluzione di incastro perfetto, legata al termine  $(u_0[x], w_0[x])$ , e della soluzione nodale legata al termine  $(u[x], w[x])$

$$(u_0 + u, w_0 + w) , (\varepsilon_0 + \varepsilon, \chi_0 + \chi) , (N_0 + N, T_0 + T, M_0 + M)$$

## 6 Il metodo delle rigidezze

- Introduzione
- Analisi locale / equazioni linea elastica
- Analisi locale / coefficienti di rigidezza
- Analisi locale / proprietà matrice rigidezza
- Analisi globale / trasf. locale→globale
- Analisi globale / congruenza cinematica
- Analisi globale / equilibrio
- Analisi globale / il metodo delle rigidezze
- Analisi globale / proprietà matrice rigidezza
- Una applicazione
- Il vincolo di inestensibilità assiale
- Soluzione di incastro perfetto
- Esempi di applicazioni