

LA TURBOLENZA E LE LEGGI DI DISTRIBUZIONE DELLA VELOCITA' (*)

10.1 - ORIGINE DELLA TURBOLENZA

Il movimento di un fluido viscoso entro tubi rettilinei di sezione circolare verifica la legge laminare di Hagen-Poiseuille solo in un campo limitato della velocità. Superando un valore critico, che è tanto più basso quanto più grande è il diametro del tubo e quanto più piccola è la viscosità cinematica $\nu = \mu / \rho$ del fluido, il regime del moto cambia sostanzialmente: a) dal punto di vista cinematico, perchè le traiettorie non restano più rettilinee e parallele all'asse del tubo, denotando la sovrapposizione, alla velocità di trasporto, di componenti fluttuanti di velocità nella direzione del moto e nel piano ad essa normale; b) dal punto di vista dinamico, perchè la perdita di carico piezometrico per unità di lunghezza (pendenza motrice) aumenta in modo notevole passando bruscamente dalla proporzionalità "lineare" alla velocità media ($i \propto U$ nel moto laminare) ad una legge di proporzionalità quasi-quadratica, che diventa rigorosamente "quadratica" (ossia $i \propto U^2$) nel regime cosiddetto "assolutamente turbolento".

Come Reynolds aveva dimostrato con la classica esperienza richiamata nel capitolo 3, al n. 3.4.1, il parametro che regola la transizione fra regime laminare e regime turbolento è il numero

$$(10.1) \quad Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{U D}{\nu}$$

detto appunto n° di Reynolds. Per valori di $Re < 2000+2200$ il regime "laminare" è stabile, per valori maggiori, in particolare per $Re > 2500$ il moto diventa "turbolento" (**); in certe condizioni di tranquillità e di regolarità, il regime laminare si può conservare, instabilmente, anche per valori di Re molto maggiori di 2500, fino eccezionalmente a $Re = 50.000$.

L'origine della turbolenza non ha trovato ancora spiegazioni soddisfacenti sotto tutti gli aspetti. In generale si può dire che l'insorgere di disturbi accidentali nel moto, ossia di spostamenti degli elementi fluidi dalla traiettoria prevista, e quindi la formazione di curvature locali nel campo del moto, è un fenomeno che tende ad essere smorzato dalle forze viscosse ed esaltato dalle forze d'inerzia. Finchè l'effetto delle prime è prevalente, la configurazione del moto conserva la regolarità caratteristica dello stato laminare; quando invece prevale l'effetto delle forze d'i-

(*) - Stesura del prof.ing. Enrico Marchi

(**) - I valori critici di Re sono poco diversi da 2000 anche per tubi di forma differente da quella circolare, utilizzando un diametro equivalente come dimensione lineare.

nerzia i disturbi si esaltano e tutto l'assetto del moto si altera con la creazione di quella microvorticità e di quelle agitazioni persistenti che caratterizzano la turbolenza. Il n° di Reynolds, rappresentando il rapporto fra

$$\text{le forze d'inerzia} = \left[\text{massa} \cdot \frac{DU}{Dt} \right] = \left[\rho V \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + \dots \right) \right] = \rho L^3 \frac{U^2}{L} = \rho U^2 L^2$$

$$\text{e le forze viscosse} = \left[\tau_{\text{lam}} \cdot \text{area} \right] = \left[\mu \frac{dU}{dn} \cdot A \right] = \left[\mu \frac{U}{L} L^2 \right] = \mu U L$$

indica effettivamente l'esistenza di un valore critico per la stabilità del regime laminare. Tuttavia, sebbene sia possibile predire l'instabilità di un regime laminare, in particolari casi, dal punto di vista teorico, tale instabilità non sembra una condizione sufficiente per spiegare la transizione al moto turbolento e la sua persistenza.

10.2 - LE COMPONENTI DI AGITAZIONE TURBOLENTA

Nella fig. 10.1 è riportato un rilievo continuo della velocità locale, nella direzione x del moto, in un punto di una tubazione percorsa da un fluido in moto turbolento.

Come si vede, la velocità istantanea può considerarsi composta da un valor medio temporale $\langle v_x \rangle$, componente di trasporto, e da una componente di agitazione turbolenta u' , continuamente variabile in modo irregolare con il tempo. Il periodo T necessario per definire la componente di trasporto si dice periodo di turbolenza; esso comprende un grande numero di fluttuazioni ed è quindi di ampio rispetto alla scala dei tempi delle oscillazioni turbolente, pur essendo contenuto entro quella secondo al massimo. Si ha quindi

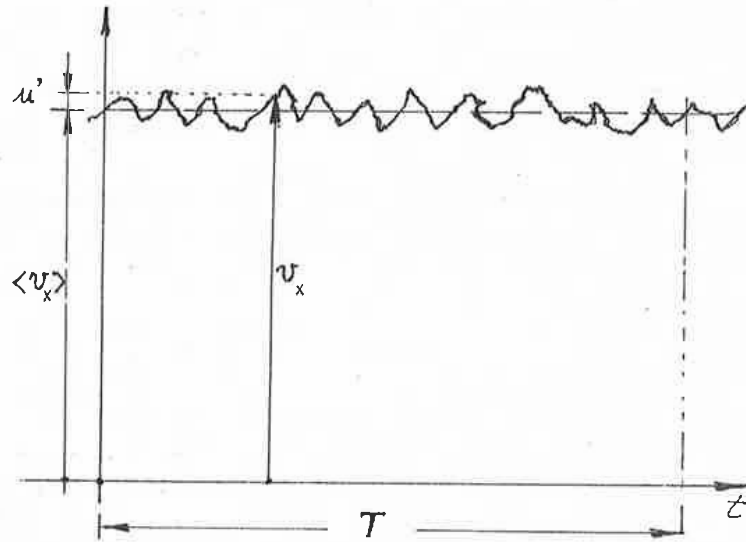


Fig. 10.1

$$(10.2) \quad v_x = \langle v_x \rangle + u'$$

$$(10.3) \quad \text{con } \langle v_x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v_x dt \quad \text{e} \quad \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0$$

Analoghe considerazioni valgono per le componenti $v_y = \langle v_y \rangle + v'_y$ e $v_z = \langle v_z \rangle + v'_z$, se il moto è tridimensionale. Nelle correnti, la velocità di trasporto $\langle \vec{v} \rangle$ ha componenti non nulle solo nella direzione del moto.

Le definizioni di moto permanente e di moto uniforme possono essere estese al regime turbolento solo con riferimento alla velocità di trasporto; ossia con il significato di moto "mediamente" permanente o "mediamente" uniforme.

Le componenti u' , v' , w' sono variabili aleatorie, con valore medio nullo, non indipendenti fra loro. La correlazione fra coppie di variabili, ad es. u' e v' , si può esprimere con il coefficiente

$$(10.4) \quad C = \frac{\langle u' v' \rangle}{\sqrt{\langle u'^2 \rangle} \sqrt{\langle v'^2 \rangle}}$$

Il suo valore è nullo se non esiste nessuna correlazione fra u' e v' , ed è tanto più vicino ad 1 quanto più stretta è tale correlazione (V. fig. 10.2).

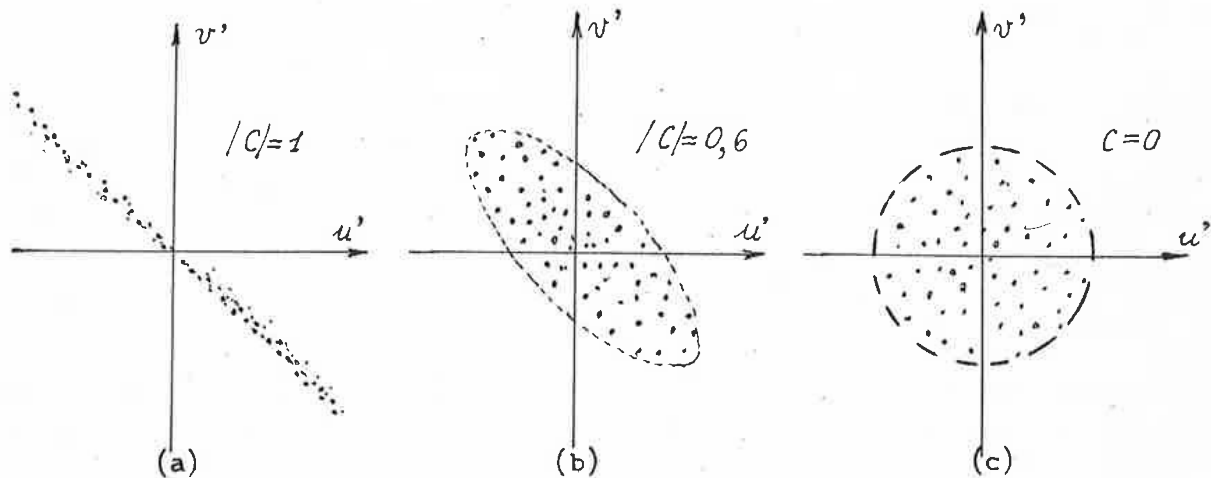


Fig. 10.2

10.3 - LE TENSIONI DI REYNOLDS

10.3.1 - L'agitazione turbolenta, favorendo un rapido e continuo mescolamento del fluido in moto, tende ad uniformare la distribuzione delle velocità e provoca una resistenza addizionale al movimento, dovuta al trasporto della quantità di moto anzichè alla deformazione degli elementi fluidi. L'aumento delle perdite di energia, praticamente brusco, che si verifica al passaggio dal moto laminare al turbolento, è appunto conseguenza del fenomeno predetto.

Per esprimere questo effetto in termini quantitativi riferiamoci ad un moto piano unidirezionale, e indichiamo per semplicità con v la velocità di trasporto $\langle v_x \rangle$, sicchè (fig. 10.3)

$$(10.5) \quad v_x = v + u' ; \quad v_y = v'$$

Attraverso un elemento di superficie δA , nell'unità di tempo, passa la massa $\rho v' \delta A$ che trasporta, nella direzione x , la Q.d.M. $\rho v'(v+u') \delta A$. Tale trasporto attraverso δA è equivalente all'azione di una forza tangenziale δF applicata sulla stessa area δA nella dire

zione x . Mediando l'eq.ne nel periodo T della turbolenza e sostituendo al valor medio $\langle \delta F \rangle$ il prodotto di una tensione media "virtuale" τ_{turb} per l'area δA , segue

$$\tau_{\text{turb}} \delta A = \rho \langle v' \rangle v \delta A + \rho \langle u'v' \rangle \delta A$$

ed essendo nullo il valore medio $\langle v' \rangle$, si ottiene la tensione "virtuale" turbolenta

$$(10.6) \quad \tau_{\text{turb}} = \rho \langle u'v' \rangle$$

detta anche tensione di Reynolds.

Sommando alla (10.6) la tensione viscosa (di Newton), mediata sempre nel periodo T , si ottiene la tensione tangenziale totale τ agente nella direzione x su piani normali ad y :

$$(10.7) \quad \tau = \tau_{\text{lam}} + \tau_{\text{turb}} = -\mu \frac{dv}{dy} + \rho \langle u'v' \rangle.$$

La τ si oppone sempre al moto, avendo segno negativo sia per la parte laminare come per quella turbolenta. Infatti i rilievi sperimentali dimostrano che la correlazione fra i valori istantanei u' e v' è del tipo rappresentato nel caso (b) della fig. 10.2: a valori positivi di una componente d'agitazione corrispondono, con alta frequenza, valori negativi dell'altra.

10.3.2 - Ricaviamo, in termini generali, le tensioni di Reynolds partendo dalle eq.ni di continuità e del moto (inizialmente nella forma di Cauchy) valide per fluidi incomprimibili

$$(10.8) \quad \left(\rho = \text{cost} \right) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$(10.9) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = \rho \left(\vec{f} - \frac{D\vec{v}}{Dt} \right)$$

Tenuto conto che: $\vec{v} = \vec{i} (\langle v_x \rangle + u') + \vec{j} (\langle v_y \rangle + v') + \vec{k} (\langle v_z \rangle + w')$ dalla (10.8) segue

$$(10.10) \quad \frac{\partial}{\partial x} \langle v_x \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle v_y \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle v_z \rangle + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

Mediando la (10.8) nel periodo T di turbolenza si ha

$$(10.11) \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{v} \rangle = 0}$$

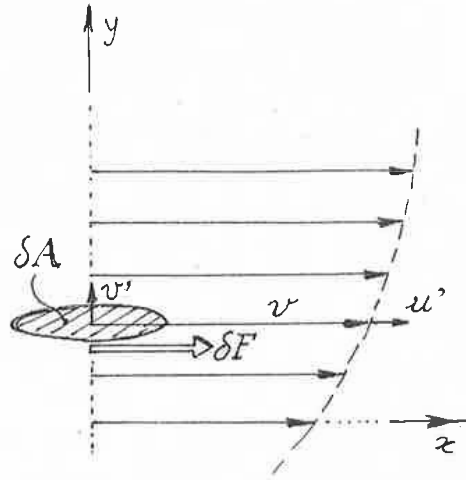


Fig. 10.3

e quindi dalla (10.10) deriva che dev'essere anche

$$(10.12) \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 .$$

Sull'eq.ne (10.9) eseguiamo la stessa operazione di media temporale, considerandone per comodità la proiezione sull'asse x

$$(10.13) \quad \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} = \rho f_x - \rho \frac{D v_x}{Dt}$$

Tenuto conto che

$$\begin{aligned} \frac{D v_x}{Dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} (\langle v_x \rangle + u') + \\ &+ (\langle v_x \rangle + u') \frac{\partial}{\partial x} (\langle v_x \rangle + u') + (\langle v_y \rangle + v') \frac{\partial}{\partial y} (\langle v_x \rangle + u') + \\ &+ (\langle v_z \rangle + w') \frac{\partial}{\partial z} (\langle v_x \rangle + u') \end{aligned}$$

mediando nel tempo T e ricordando che i valori medi di u' , v' e w' sono nulli, segue

$$(10.14) \quad \left\langle \frac{D v_x}{Dt} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle v_x \rangle + \langle v_x \rangle \frac{\partial}{\partial x} \langle v_x \rangle + \dots + \langle u' \frac{\partial u'}{\partial x} \rangle + \langle v' \frac{\partial u'}{\partial y} \rangle + \langle w' \frac{\partial u'}{\partial z} \rangle$$

od anche, tenendo presente l'eq. (10.12)

$$(10.15) \quad \left\langle \frac{D v_x}{Dt} \right\rangle = -\frac{D \langle v_x \rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x} \langle u'^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle u'w' \rangle .$$

La proiezione su x dell'eq.ne del moto (10.13), mediata nel tempo T, diventa quindi

$$(10.16) \quad \frac{\partial \langle p_{xx} \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle p_{yx} \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle p_{zx} \rangle}{\partial z} = \rho f_x - \rho \frac{D \langle v_x \rangle}{Dt} - \rho \frac{\partial}{\partial x} \langle u'^2 \rangle - \dots$$

ossia

$$(10.17) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\underbrace{\langle p_{xx} \rangle + \rho \langle u'^2 \rangle}_{\sigma_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\underbrace{\langle p_{yx} \rangle + \rho \langle u'v' \rangle}_{\tau_{yx}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\underbrace{\langle p_{zx} \rangle + \rho \langle u'w' \rangle}_{\tau_{zx}} \right) = \rho \left(f_x - \frac{D \langle v_x \rangle}{Dt} \right)$$

Se il fluido è stokesiano a viscosità lineare, le espressioni generali delle componenti normali σ e tangenziali τ della pressione diventa-

no, con la solita operazione di media sulle eq.ni che definiscono il legame costitutivo,

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \langle p \rangle - 2\mu \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial x} + \rho \langle u'^2 \rangle \\
 (10.18) \quad \tau_{yx} &= -\mu \left(\frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle v_y \rangle}{\partial x} \right) + \rho \langle u'v' \rangle = \tau_{xy} \\
 \tau_{zx} &= -\mu \left(\frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial z} + \frac{\partial \langle v_z \rangle}{\partial x} \right) + \rho \langle u'w' \rangle = \tau_{xz}
 \end{aligned}$$

e analoghe per σ_y , σ_z e τ_{yz} . In altre parole al tensore delle pressioni viscosi $\bar{T} = p\bar{I} - 2\mu\bar{D}$ si somma il tensore aggiunto di Reynolds

$$(10.19) \quad \bar{T}' = \begin{bmatrix} \rho \langle u'^2 \rangle & \rho \langle u'v' \rangle & \rho \langle u'w' \rangle \\ \rho \langle u'v' \rangle & \rho \langle v'^2 \rangle & \rho \langle v'w' \rangle \\ \rho \langle u'w' \rangle & \rho \langle v'w' \rangle & \rho \langle w'^2 \rangle \end{bmatrix}$$

che è un tensore simmetrico, definito da 6 componenti inerziali turbolente.

Tenuto conto della trasformazione di Navier-Stokes, l'eq.ne (10.16) si può scrivere

$$\begin{aligned}
 (10.20) \quad \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} - \mu \nabla^2 \langle v_x \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \rho \langle u'^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \rho \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \rho \langle u'w' \rangle &= \\
 &= \rho \left(f_x - \frac{D \langle v_x \rangle}{Dt} \right)
 \end{aligned}$$

ossia in termini vettoriali

$$(10.21) \quad \boxed{ \vec{\nabla} \langle p \rangle - \mu \nabla^2 \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot \bar{T}' = \rho \left(\vec{f} - \frac{D \langle \vec{v} \rangle}{Dt} \right) }$$

Essa fornisce 3 equazioni scalari che con l'equazione di continuità (10.11) e l'eq.ne di stato formano un sistema di 5 equazioni nelle 11 in cognite: $\langle v_x \rangle$, $\langle v_y \rangle$, $\langle v_z \rangle$, $\langle p \rangle$, ρ , + le sei componenti di \bar{T}' . La ri soluzione del problema del moto in regime turbolento richiede quindi l'intro duzione di ulteriori condizioni, o di nuove ipotesi, per rendere determinato il problema matematico.

10.4 - LA TEORIA DELLA LUNGHEZZA DI MESCOLOMENTO E LA DISTRIBUZIONE LOGARITMICA DELLA VELOCITA'

La turbolenza che si sviluppa nel movimento di un fluido in vicinanza di un contorno solido e con trascurabili accelerazioni medie (moto nelle condotte e nei canali quasi-cilindrici) si dice "turbolenza di parete". Il suo studio è stato oggetto di interpretazioni fondate su due indirizzi princi pali: i metodi statistici e i metodi fenomenologici. Fra quest'ultimi richiameremo qui un procedimento particolarmente significativo per l'importanza

za dei risultati finora conseguiti: la teoria della lunghezza di mescolamento di Prandtl (1933).

I metodi fenomenologici si propongono di ricercare una relazione fra le velocità di trasporto e le tensioni di Reynolds. Benchè non vi sia no ragioni aprioristiche per giustificare l'esistenza di una tale relazione, è evidente che si tratta di un'ipotesi di lavoro necessaria se si vuole determinare la distribuzione delle velocità medie locali, ossia risolvere il problema più importante dal punto di vista tecnico.

A questo scopo Prandtl introdusse il concetto di lunghezza di mescolamento intesa, in analogia con il percorso libero della teoria cinetica dei gas, come lo spostamento consentito ad un elemento fluido in moto turbolento prima di perdere la sua individualità per mescolamento con le particelle circostanti.

Considerando il moto piano fra pareti parallele della fig. 10.4, posto $\langle v \rangle = v$, ossia: $v_x = v + u'$ e $v_y = v'$, si vede che il cambiamento di velocità per una traslazione l vale, in prima approssimazione, $l(dv/dy)$ e si può assumere che tale sia il valore della componente u' di agitazione turbolenta. L'altra componente v' deve avere, per continuità, lo stesso ordine di grandezza, (V. fig. 10.5) per cui si può porre

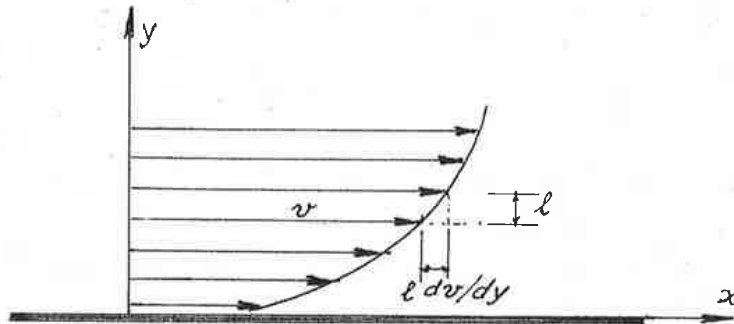


Fig. 10.4

$$(10.22) \quad \left| \tau_{\text{turb}} \right| = \left| \rho \langle u' v' \rangle \right| = \rho l^2 \left(\frac{dv}{dy} \right)^2$$

comprendendo gli eventuali coefficienti di proporzionalità nella stessa l .

A parte il significato fisico della lunghezza di mescolamento, l'eq. (10.22) è giustificata da considerazioni di analisi dimensionale. In base alla (10.7) la tensione totale τ , in valore assoluto, diventa

$$(10.23) \quad \left| \tau \right| = \mu \frac{dv}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{dv}{dy} \right)^2.$$

Per giungere alla distribuzione della velocità si può procedere in diversi modi, più o meno approssimati. La via più semplice per rag-

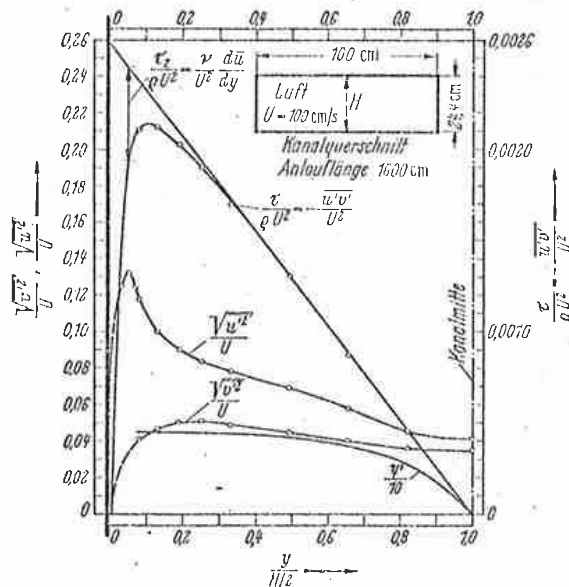


Fig. 10.5

giungere un risultato sostanzialmente corretto nei confronti delle verifiche sperimentali è quella suggerita dallo stesso Prandtl e che consiste nel ritenere: a) che in tutto il nucleo turbolento della corrente, al di fuori di un sottile strato δ aderente alla parete (substrato a regime laminare), la tensione viscosa sia trascurabile, b) che la lunghezza di mescolamento dipenda linearmente dalla distanza y quando $y \rightarrow \delta$, cioè sia $\ell = k y$, c) che nella stessa condizione $y \rightarrow \delta$, la tensione tangenziale τ tenda al valore τ_0 alla parete. Allora la (10.23) diventa

$$(10.24) \quad |\tau_0| = \rho k^2 y^2 (dv/dy)^2$$

od anche, posto $\sqrt{|\tau_0|/\rho} = v_*$, detta velocità di attrito,

$$(10.25) \quad \frac{dv}{v_*} = \frac{1}{k} \frac{dy}{y}$$

L'integrale della (10.25) è immediato e rappresenta la legge di distribuzione logaritmica della velocità

$$(10.26) \quad \boxed{\frac{v}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{y}{y_0} \right) + \frac{v_m}{v_*}}$$

dove v_m è il valore della velocità che si verifica alla distanza y_0 .

10.5 - LE CONDIZIONI AL CONTORNO E LE LEGGI UNIVERSALI DI DISTRIBUZIONE DELLA VELOCITÀ

10.5.1 - Il valore v_m della velocità caratterizza lo stato di moto e può dipendere in generale dalle caratteristiche ρ e μ del fluido, dalla tensione al contorno τ_0 (ossia dalla velocità di attrito $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$) dalla distanza y_0 e dalla scabrezza della parete, che riteniamo rappresentabile con un solo parametro ϵ , pari all'altezza delle asperità. Dalla

$$(10.27) \quad v_m = F(\rho, \mu, v_*, y_0, \epsilon)$$

applicando il teorema Π , con l'assunzione di ρ, v_*, y_0 come grandezze fondamentali, si ottiene l'equazione

$$(10.28) \quad \frac{v_m}{v_*} = \varphi \left(\frac{v_* y_0}{\nu}, \frac{\epsilon}{y_0} \right)$$

che mette in evidenza le seguenti possibilità:

- a - un regime turbolento di parete liscia, quando nella (10.28) interviene soltanto il numero $v_* y_0 / \nu$; che ha la struttura di un n° di Reynolds;
- b - un regime assolutamente turbolento (di parete scabra), quando nella (10.28) interviene soltanto la scabrezza relativa ϵ/y_0 ;
- c - un regime turbolento intermedio, quando nella (10.28) intervengono entrambi i parametri.

10.5.2 - Parete liscia . E' tecnicamente realizzata dal vetro, da laminati plastici, dall'ottone liscio, ecc..., ed è caratterizzata dalla presenza di un sottile strato laminare aderente alla parete. In generale, il comportamento di parete liscia può verificarsi anche con pareti scabre purchè le loro asperità siano completamente sommerse dallo strato laminare.

Il passaggio dallo strato laminare al nucleo turbolento si ammette (seguendo un'ipotesi di Prandtl) che avvenga bruscamente ad una distanza $y = \delta$ dalla parete, distanza per la quale il numero $v_* y / \nu$ assume un valore critico costante N_*

$$(10.29) \quad v_* \delta / \nu = N_*$$

$N_* = 11,6$ nei tubi circolari lisci, secondo Nikuradse.

Nello strato laminare, per la piccolezza di δ in confronto a y_0 , la variazione di velocità è lineare e quindi la tensione tangenziale è cost. e vale $\tau_0 = \mu v_p / \delta$, con riferimento ai simboli della fig. 10.6 ($\tau_0 > 0$, avendo assunto il suo verso contrario al moto). Allora

$$(10.30) \quad v_*^2 = \frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{v_p}{\delta}$$

da cui

$$(10.31) \quad \frac{v_p}{v_*} = \frac{\rho v_* \delta}{\mu} = N_*$$

La legge (10.26), per $y = \delta$, diventa: $\frac{v_p}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{\delta}{y_0} + \frac{v_m}{v_*}$;

tenendo conto della (10.31), segue

$$(10.32) \quad \frac{v_m}{v_*} = N_* - \frac{1}{k} \ln \left(\frac{\nu}{v_* y_0} N_* \right) = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{v_* y_0}{\nu} \right) + b_1$$

dove b_1 è una costante che sperimentalmente è risultata = 5,8 per pareti piane e = 5,5 per tubi lisci di sezione circolare.

Sostituendo la (10.32) nella (10.26) si ottiene la legge universale della velocità nel regime turbolento di parete liscia

$$(10.33) \quad \boxed{\frac{v}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{v_* y}{\nu} \right) + b_1 = a \log \left(\frac{v_* y}{\nu} \right) + b_1 .}$$

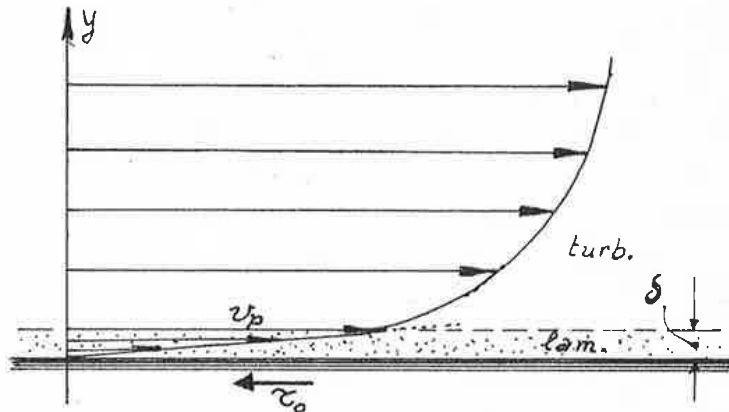


Fig. 10.6

10.5.3 - Parete scabra, regime "assolutamente turbolento"

Con il crescere di $Re_x = v y / \nu$ diminuisce lo spessore del film laminare aderente al contorno solido e quindi le eventuali asperità della parete cominciano ad affiorare e ad influenzare direttamente il nucleo turbolento. Per alti valori di Re_x l'influenza della scabrezza relativa diventa essenziale e svanisce del tutto quella di Re_x : tale stato si definisce "assolutamente turbolento".

Si fa l'ipotesi che si verifichi ancora la condizione

$$(10.34) \quad v_p / v_x = D = \text{cost}$$

ad una distanza δ dalla parete dipendente solo dalla scabrezza; nel caso più semplice, di scabrezza "omogenea", si ritiene δ proporzionale all'altezza ϵ delle asperità attraverso una costante m . Allora per $y = \delta = m \epsilon$ (fig. 10.7)

$$\frac{v_p}{v_x} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{m \epsilon}{y_0} \right) + \frac{v_m}{v_x}$$

da cui, tenendo conto della (10.34),

$$(10.35) \quad \frac{v_m}{v_x} = D + \frac{1}{k} \ln \left(\frac{y_0}{m \epsilon} \right) = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{y_0}{\epsilon} \right) + b_r$$

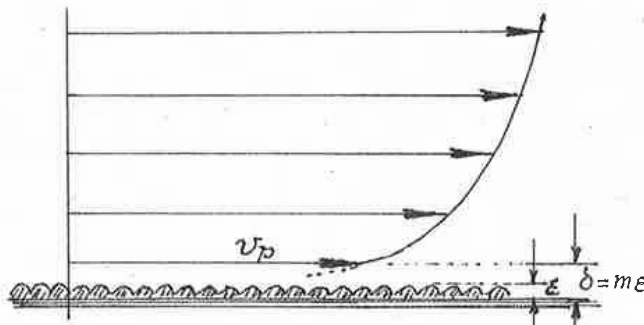


Fig. 10.7

con b_r una costante che è risultata = 8,5 nelle misure sperimentali di Nikuradse su tubi circolari resi artificialmente scabri con sabbie omogenee.

Sostituendo la (10.35) nella (10.26) si ottiene la legge universale della velocità nel regime assolutamente turbolento

$$(10.36) \quad \boxed{\frac{v}{v_x} = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{\epsilon} + b_r = a \log \frac{y}{\epsilon} + b_r}$$

10.6 - CONSIDERAZIONI SULLE LEGGI DI VELOCITÀ . LA LEGGE DI POTENZE

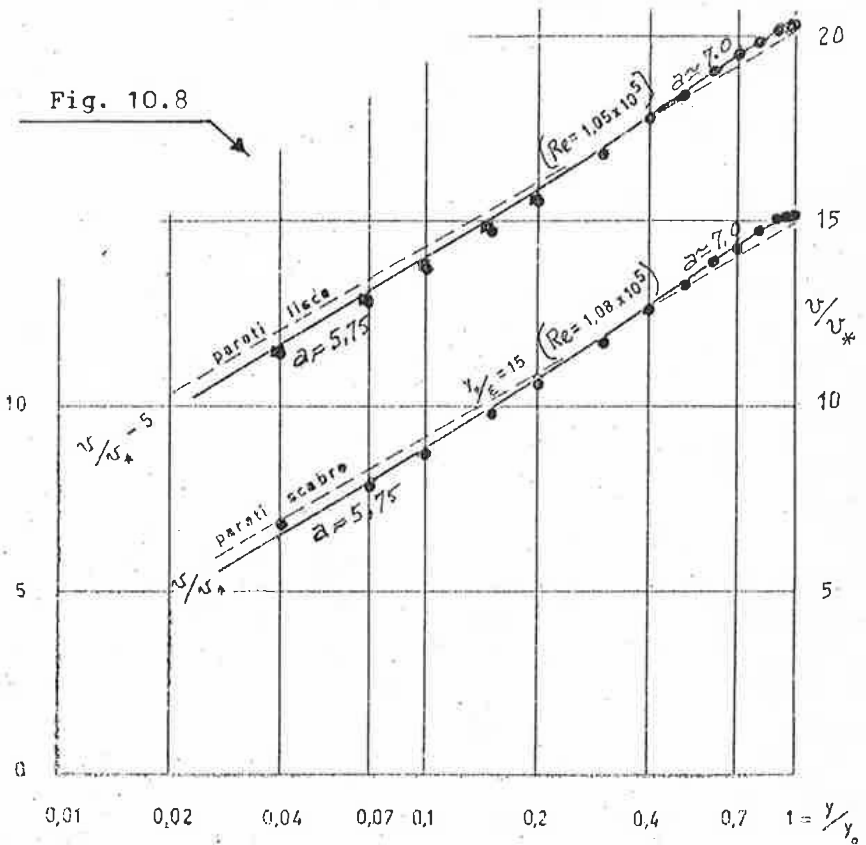
10.6.1 - Le distribuzioni di velocità, ottenute con riferimento alla situazione di moto piano, sono valide anche per il moto turbolento entro condotti di sezione circolare, perchè anche in quel caso le componenti di agitazione che influenzano il trasporto della Q.d.M. sono soltanto due: la u' nella direzione del moto e la v' nella direzione radiale.

Il valore più attendibile di k , detta costante di Kàrmàn, è risultato finora $k = 0,40$ (nei condotti circolari). Da esso deriva: $a = 2,303/k = 5,75$, valore che è stato proposto da Nikuradse sulla base delle sue sistematiche esperienze su tubi lisci e omogeneamente scabri.

Le leggi di velocità sono state ricavate con un'ipotesi giustificata solo in vicinanza della parete, ed infatti, per valori di $y/y_0 > 0,2$, le

misure sperimentali di velocità si scostano in modo abbastanza evidente dai valori della eq.ne (10.26). La pendenza della retta interpolante $v/v_* = f(y/y_0)$, nel diagramma semilog della fig. 10.8, diventa maggiore di $a = 5,75$, per $y/y_0 > 0,2$, fino ad $a \approx 7,0$. Inoltre le eq.ni (10.33) e (10.36) non presentano un massimo per $y = y_0$, come invece si verifica sperimentalmente.

Si può dimostrare che i predetti scostamenti sono correggibili con l'introduzione nelle leggi di velocità di una funzione di y/y_0 ; il procedimento è riportato in appendice. Qui si vuole solo far notare che, nei confronti delle leggi di resistenza, che si ottengono integrando la velocità su tutta la sezione, il contributo di una $\Phi(y/y_0)$, integrata sull'area, si riduce ad una costante; per questa ragione le eq.ni (10.33) e (10.36) sono sufficienti per dedurre le leggi di resistenza in "forma" corretta.



10.6.2 - Per giustificare la legge di resistenza dei tubi lisci di Blasius - di cui si dirà al cap. 12 - Prandtl suggerì, prima della legge logaritmica, un'espressione esponenziale della distribuzione di velocità del tipo

$$(10.37) \quad \frac{v}{v_m} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^n$$

detta legge di potenze, nella quale n dipende dal n° di Reynolds. Per

$Re \lesssim 10^5$, la concordanza con i risultati sperimentali appare soddisfacente assumendo $n = 1/7$. Per valori più elevati di Re , n ^{aumentare} ~~diminuisce~~ fino ^a ~~al~~ al minimo $1/5$.

10.7 - DEDUZIONE DIRETTA DELLE LEGGI LOGARITMICHE DI VELOCITA'

10.7.1 - Alle leggi logaritmiche (10.33) e (10.36) si può giungere direttamente (senza il ricorso alla teoria della lunghezza di mescolamento) sulla base delle seguenti assunzioni:

a - validità, per bassi valori di y/y_0 , di una legge di parete (suggerita da Prandtl) che consiste nel ritenere la velocità funzione delle proprietà ρ e μ del fluido, della distanza y dalla parete, della tensione τ_0 alla parete, e quindi della velocità di attrito v_* , ed infine della scabrezza ε . Si ha quindi

$$(10.38) \quad v = F(\rho, \mu, y, v_*, \varepsilon)$$

da cui segue, per il teorema Π , assumendo come fondamentali ρ, v_*, y

$$(10.39) \quad \frac{v}{v_*} = \varphi_1 \left(\frac{v_* y}{\nu}, \frac{y}{\varepsilon} \right)$$

b - validità, nel cuore del nucleo turbolento, dove le tensioni di Reynolds sono dominanti rispetto alle tensioni viscosi, della seguente legge di similitudine (suggerita da Kàrmàn)

$$(10.40) \quad \frac{v - v_m}{v_*} = \varphi_2 \left(\frac{y}{y_0} \right)$$

Nella prevedibile fascia di sovrapposizione devono valere entrambe le equazioni (10.39) e (10.40). La più semplice espressione che soddisfa tale condizione è una legge logaritmica: essa assume la forma (10.33) se φ_1 non dipende da y/ε , cioè se la parete si comporta come "liscia", e la forma (10.36) se φ_1 non dipende da $v_* y/\nu$, cioè se la parete è scabra ed il moto "assolutamente turbolento".

10.7.2 - Nel substrato laminare la distribuzione della velocità risulta,

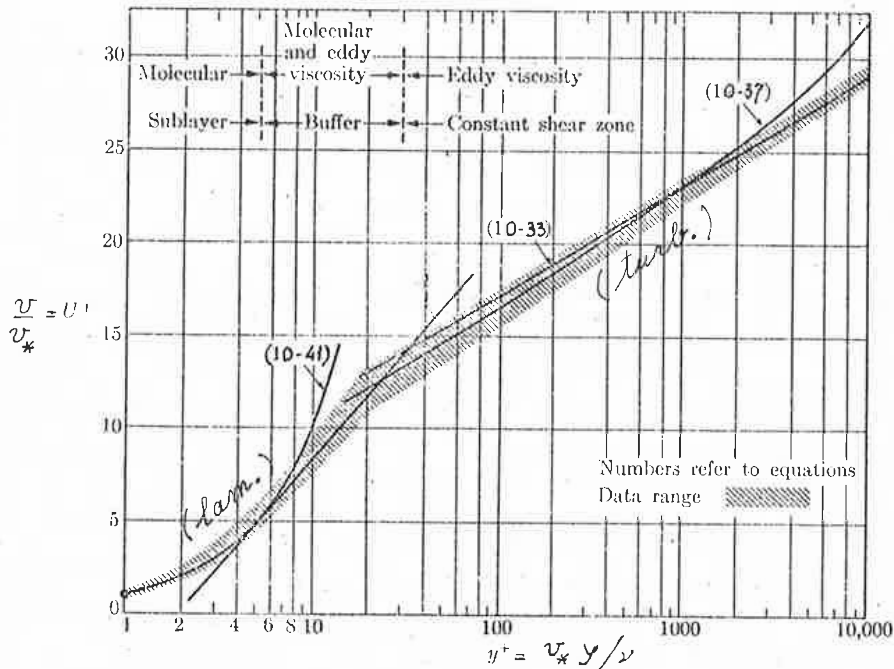


Fig. 10.9

come si è già detto, lineare e può essere espressa in termini adimensionali nella forma

$$(10.41) \quad \frac{v}{v_*} = \frac{v_* y}{\gamma}$$

come si deduce subito dalla (10.31) sostituendo a δ il valore generico y e alla velocità v_p la velocità v alla distanza y .

Nella fig. 10.9 è riportata globalmente la fascia dei risultati sperimentali sui tubi circolari lisci in confronto con le curve rappresentative di:

eq.ne (10.41) nel substrato laminare ,

eq.ne logaritmica (10.33) nel nucleo turbolento ,

eq.ne di potenze $\frac{v}{v_*} = 8,74 \left(\frac{v_* y}{\gamma}\right)^{1/7}$, derivata dalla (10.37), ancora nel nucleo turbolento. (per $Re \leq 10^5$)

(10.42)

Quest'ultima equazione si ottiene scrivendo la (10.37) con $n = 1/7$ (corrispondente a $Re \leq 10^5$):

$$(10.43) \quad \frac{v}{v_m} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1/7}$$

per $y = \delta$ si ha $v = v_p$, per cui si ricava

$$(10.44) \quad v_m = v_p \left(\frac{y_0}{\delta}\right)^{1/7}$$

Sostituendo v_p e δ in funzione di N_* attraverso la condizione di parete liscia (10.31) segue

$$(10.45) \quad v_m = N_* v_* \left(\frac{y_0 \rho v_*}{\mu N_*}\right)^{1/7}$$

Entrando con questa espressione di v_m nella (10.43) si ottiene infine

$$(10.46) \quad \frac{v}{v_*} = N_*^{6/7} \left(\frac{v_* y}{\gamma}\right)^{1/7}$$

che coincide con la (10.42) assumendo $N_* = 11,6$.