CAPITOLO 5

EQUAZIONI GLOBALI DEL MOTO - CORRENTI (*)

5.1 - Le eq.ni globali che individuano il moto di un fluido derivano:
- dal principio di conservazione della massa: eq.ne di continuità (**);
- dal principio della quantità di moto (Q.d.M.): eq.ne della Q.d.M. (ed eventualmente del momento della Q.d.M.).

Il principio della Q.d.M. si esprime con l'equazione:

Variazione della Q.d.M. di una massa nel tempo dt = Impulso delle forze esterne agenti sulla stessa massa nel tempo dt

In particolare, nel caso di un fluido in moto soggetto a forze definibili senza indeterminazione:

Variazione della Q.d.M., nell'1 di tempo, di una massa fluida in moto = Forze di massa + forze di superficie (agenti sulla massa all'istante t).

Indicando, come in precedenza, con

$\mathcal{V}$ = volume mobile che racchiude la massa considerata
V = volume all'istante t (= volume di controllo, fisso)
A = sup. di contorno all'istante t (= superf. di controllo, fisso)
$\vec{f}$ = forza di campo per 1 di massa
$\vec{p}$ = vettore pressione su dA
$\vec{v}$ = vettore velocità

le eq.ni di continuità (cfr. eq. 4.17 del cap. 4) e della Q.d.M. sono

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}} \rho\, dV = 0 \qquad \text{(V. 4.17 e trasformazioni successive)}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}} \rho\, \vec{v}\, dV = \int_V \rho\, \vec{f}\, dV + \int_A \vec{p}\, dA \tag{5.1}$$

Con riferimento al volume di controllo V, già definito come il volume geometrico (fisso) (+) coincidente con il volume occupato all'istante t dalla massa fluida che si considera, ed applicando al I° membro della (5.1) il teor. di trasporto nella forma (4.26), si ottiene l'equazione globale del moto (o della Q.d.M.) detta anche I^a equazione cardinale del moto.

(*) - Stesura del prof.ing. Enrico Marchi

(**) - Per quanto riguarda questa equazione si rimanda al precedente n. 4.8

(+) - Oppure in moto uniforme, purchè le velocità del fluido siano relative ad esso. Ossia il volume di controllo si muova solidalmente con un riferimento "inerziale".

$$(5.2)\qquad \boxed{\int_V \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t}\,dV - \int_A \rho\,\vec{v}\,\underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{n})}_{v_n}\,dA = \int_V \rho\,\vec{f}\,dV + \int_A \vec{p}\,dA}\;.$$

Il primo termine, detto anche "inerzia locale", rappresenta la variazione, nell'1 di tempo, della Q.d.M. all'<u>interno</u> del volume di controllo.

Il secondo termine esprime la differenza fra la Q.d.M. <u>uscente</u> e quella <u>entrante</u> attraverso la superficie di controllo nell'1 di tempo

$$(5.3)\qquad -\int_A \rho\,\vec{v}\,v_n\,dA = \int_{A_2} \rho\,\vec{v}\,|v_n|\,dA - \int_{A_1} \rho\,\vec{v}\,|v_n|\,dA$$

come mostra la fig. 5.1, dove A_1 e A_2 sono le parti di A attraversate dalla Q.d.M. in entrata e in uscita, ed A_3 è la parte restante non attraversata dal fluido.

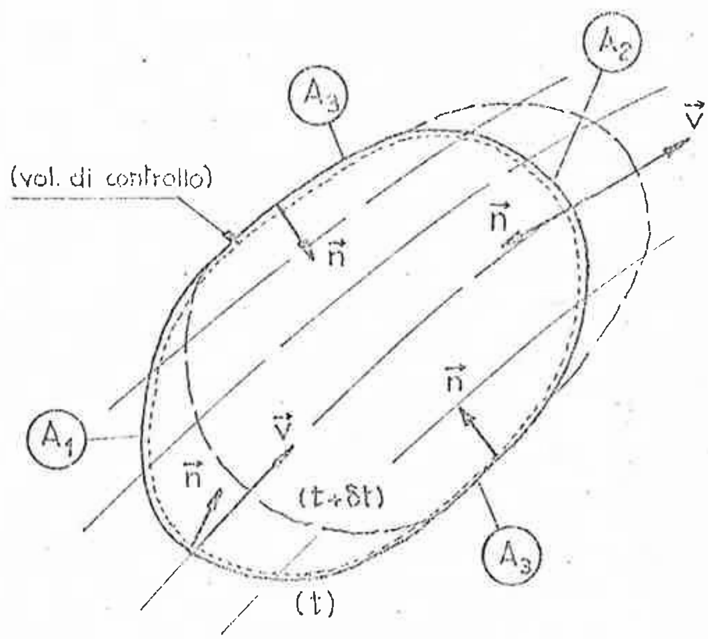


Fig. 5.1

5.2 - L'eq. (5.2) può essere scritta in <u>forma simbolica</u> indicando con

$$\vec{M}_1 = \int_{A_1} \rho\,\vec{v}\,|v_n|\,dA$$ la Q.d.M. della massa entrante nel volume di controllo, nell'1 di tempo,

$$\vec{M}_2 = \int_{A_2} \rho\,\vec{v}\,|v_n|\,dA$$ la Q.d.M. della massa uscente dal volume di controllo, nell'1 di tempo,

$$\vec{I} = \int_V \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t}$$ l'inerzia locale,

$$\vec{G} = \int_V \rho\,\vec{f}\,dV$$ la risultante delle forze di massa,

$$\vec{\Pi} = \int_A \vec{p}\,dA$$ la risultante delle forze di pressione sul contorno

Si ha

$$(5.4)\qquad \boxed{\vec{G} + \vec{\Pi} = \vec{M}_2 - \vec{M}_1 + \vec{I}}$$

<u>EQUAZIONE GLOBALE DELLA Q.d.M.</u>

<u>Da notare</u> che la pressione $\vec{p}$, nel moto di un f. reale, ammette componenti "tangenziali", che spesso si trascurano nel calcolo di $\vec{\Pi}$ supponendo le pressioni sempre normali al contorno. Tale ipotesi <u>non</u> è equivalente a quella di

fluido ideale, perchè l'eq. (5.4) non esclude la possibilità di fenomeni dissipativi interni al volume di controllo, ma ne tiene conto in modo implicito.

5.3 - Il teor. del momento della Q.d.M. si ottiene moltiplicando vettorialmente per il raggio $\bar{r}$ l'eq. (5.2)

$$\int_V \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} \times \bar{r}\, dV - \int_A \rho\, \vec{v}\, v_n \times \vec{r}\, dA = \int_V \rho\, \vec{f} \times \vec{r}\, dV + \int_A \vec{p} \times \vec{r}\, dA \tag{5.5}$$

con l'ovvia estensione ai "momenti" della forma simbolica (5.4).

5.4 - Moti monodimensionali - Correnti

Una massa fluida animata di moto unidimensionale costituisce una corrente (esempio: il moto nelle condotte e il moto nei canali). In tali condizioni la conoscenza dei valori medi delle grandezze caratteristiche del moto nelle sezioni trasversali (dette anche semplicemente "sezioni") della corrente è prevalente sulla conoscenza della loro distribuzione in una sezione. Se il moto è permanente, la superficie di contorno della corrente risulta ovunque tangente alla velocità ed allora essa coincide con un tubo di flusso.

Portata di una corrente è il volume fluido che attraversa una sezione della corrente nell'unità di tempo. Quando nella corrente sono individuabili sezioni piane Ω nelle quali le velocità sono fra loro parallele e normali alla sezione (per lo meno "sensibilmente"), allora la portata Q e la velocità media U sono definite dalle relazioni

$$Q = \int_\Omega v\, d\Omega = U\,\Omega \;. \tag{5.6}$$

L'unità di misura di Q nel sistema tecnico è il m^3/s .
Per fluidi comprimibili conviene fare riferimento alla portata massica

$Q_m = \int_\Omega \rho\, v\, d\Omega$; $Q_m = \rho\, Q$ se il fluido è omogeneo, cioè se ρ = cost nella sezione.

5.5 - Q.d.M. ed Energia Cinetica di una corrente

Sono le grandezze definite in una sezione Ω di un tronco cilindrico di corrente dalle equazioni

$$\text{Q.d.M.} \qquad M = \int_Q \rho\, v\, dQ = \int_\Omega \rho\, v^2\, d\Omega \tag{5.7}$$

$$\text{En.Cin.} \qquad E_c = \int_Q \tfrac{1}{2}\,\rho\, v^2\, dQ = \int_\Omega \tfrac{1}{2}\rho\, v^3\, d\Omega \tag{5.8}$$

Nella situazione molto frequente di correnti omogenee, le stesse grandezze si possono esprimere in funzione della velocità media U con l'introduzione di due coefficienti α e β , detti "riduttori" rispettivamente dell'En. Cin. (coeff.

di Coriolis) e della Q.d.M.:

$$(5.9) \qquad M = \rho \int_{\Omega} v^2 \, d\Omega = \beta \, \rho \, U^2 \Omega = \beta \, \rho \, Q \, U$$

$$(5.10) \qquad E_c = \tfrac{1}{2} \rho \int_{\Omega} v^3 \, d\Omega = \tfrac{1}{2} \alpha \, \rho \, U^3 \Omega = \tfrac{1}{2} \, \alpha \, \rho \, Q \, U^2$$

Indicando con $u = v - U$ gli scarti della velocità locale $\underline{v}$ dalla media ($\int_{\Omega} u \, d\Omega = 0$), i coeff. α e β valgono

$$(5.11') \quad \alpha \cong 1 + 3\delta \qquad ; \qquad (5.11'') \quad \beta = 1 + \delta$$

$$(5.12) \text{ con } \qquad \delta = \int_{\Omega} u^2 \, d\Omega \Big/ U^2 \Omega \quad .$$

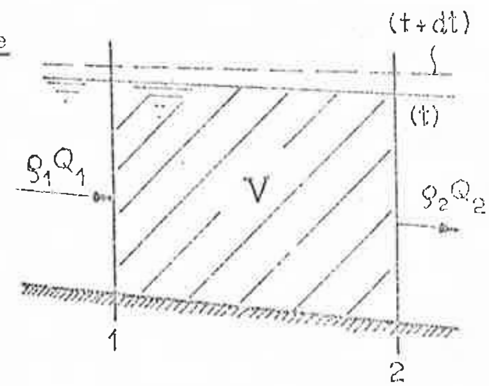
I valori di α e β nelle ordinarie correnti "turbolente" sono molto vicini a 1 ($\beta = 1{,}02 \div 1{,}04$; $\alpha = 1{,}06 \div 1{,}12$) . V. "Moto uniforme".

5.6 - La distribuzione della pressione in una sezione di una corrente cilindrica di fluido "ideale" si dimostra che dev'essere idrostatica.
In una sezione di una corrente cilindrica (o quasi-cilindrica (*)) di fluido "reale" l'esperienza prova che la distribuzione della pressione si mantiene idrostatica; o, in forma equivalente, che il carico piezometrico resta costante.

Quando la corrente è un getto libero nell'aria, essa assume una curvatura tale che l'accelerazione centrifuga equilibra, in ogni sezione, la componente della gravità. La pressione sulla superficie di contorno (normalmente la atmosfera) si mantiene inalterata anche all'interno del getto.

5.7 - Equazione di continuità per una corrente

In una corrente omogenea si considerino due sezioni che limitano un volume V (fig. 5.2). Per il principio di conservazione della massa, la differenza fra la massa entrante e quella uscente nel tempo dt, ($\rho_1 Q_1 - \rho_2 Q_2$)dt, deve uguagliare l'incremento della massa m per variazione di densità, o di volume, o di entrambi nel tronco 1-2 considerato :



$$(5.13) \qquad (\rho_1 Q_1 - \rho_2 Q_2) dt = dm$$

Fig. 5.2

Se il tronco ha lunghezza infinitesima ds , il I° membro diventa $-\left[\partial(\rho Q)/\partial s\right]$. .dsdt , il II membro $\left[\partial(\rho \Omega)/\partial t\right]$. dtds

---

(*) Corrente con filetti fluidi sensibilmente rettilinei e paralleli.

e quindi dall'equazione (5.13) deriva la seguente forma dell'eq.ne di continuità, particolare per le correnti:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho \Omega)}{\partial t} = 0} \tag{5.14}$$

che, per fluido incomprimibile, si riduce a

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0} \, . \tag{5.15}$$

Nella situazione di moto permanente, l'eq.ne di continuità diventa

$$\boxed{\rho Q = \text{cost}} \qquad \text{per fluido comprimibile} \tag{5.16}$$

$$\boxed{Q = \text{cost}} \qquad \text{per fluido incomprimibile} \, . \tag{5.17}$$

5.8 - L'eq.ne della Q.d.M. per una corrente in moto permanente si ottiene dall'eq.ne generale (5.4) tenendo presente che, per la permanenza del moto, è ρQ = cost (eq. 5.16) e

$$\vec{I} = \int_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} \, dV = 0 \; (*) \tag{5.18}$$

Ossia, con riferimento al tronco di corrente della fig. 5.3,

$$\boxed{\vec{G} + \vec{\Pi} = \vec{M}_2 - \vec{M}_1} \tag{5.19}$$

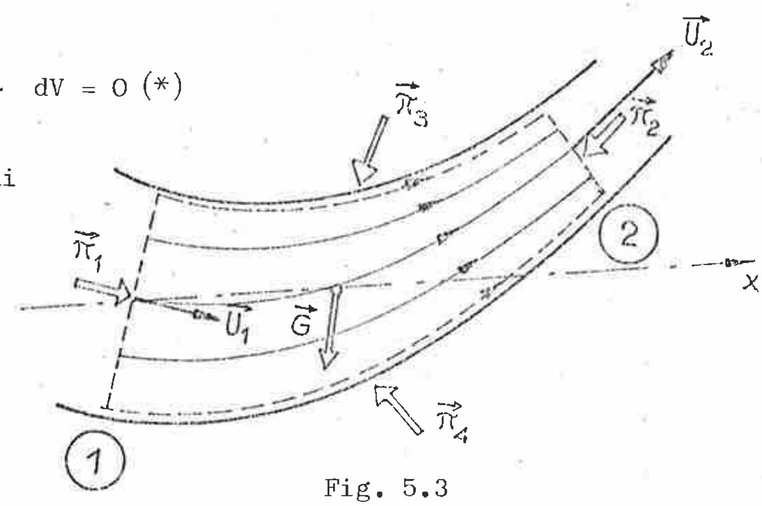


Fig. 5.3

Proiettando la (5.19) in una direzione generica x ed indicando con U_1 ed U_2 le velocità medie nelle sezioni di entrata e di uscita del volume di controllo considerato (vol. punteggiato), segue

$$\boxed{G_x + \sum \Pi_x = \beta \, \rho \, Q \, (U_{2x} - U_{1x})} \tag{5.20}$$

(posto che il coeff. riduttore β abbia lo stesso valore nelle due sezioni). Sul significato della $\sum \Pi_x$, somma delle componenti di tutte le forze di pressione agenti sul contorno del vol. di controllo, si richiama l'osservazione fatta alla fine del n. 5.2 .

(*) - Quando il regime del moto è "turbolento", esso non può essere rigorosamente permanente, ma solo "mediamente permanente". In tal caso anche l'inerzia locale ha soltanto valor medio temporale nullo.