CAPITOLO 4

## CINEMATICA DEI FLUIDI (*)

4.1 - LA VELOCITA' $\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$ della particella fluida che al tempo t occupa la posizione $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ (fig. 4.1) è definita dall'eq.ne

(4.1) $\vec{v} = \vec{v}\,(\vec{r}, t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

e presenta le componenti

$$v_x = v_x\,(\vec{r}, t) = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = v_y\,(\vec{r}, t) = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = v_z\,(\vec{r}, t) = \frac{dz}{dt}$$

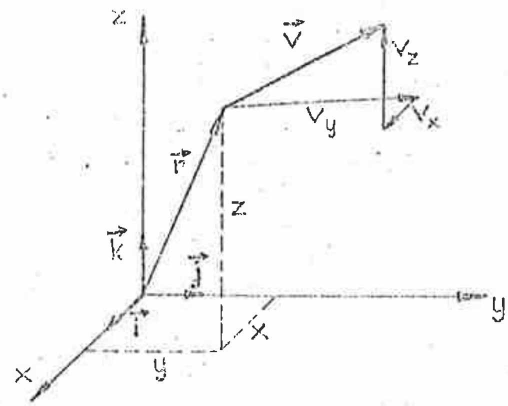


Fig. 4.1 - Vettore posizione e vettore velocità

4.2 - LE LINEE DI CORRENTE, LE TRAIETTORIE, LE LINEE DI FUMO. Le linee di corrente sono le linee che, ad un istante fissato, hanno in ogni punto la direzione della velocità. Esse forniscono una rappresentazione istantanea del campo delle velocità e sono definite dalle eq.ni

(4.2)
$$\vec{v} \times \vec{ds} = 0$$
$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ V_x & V_y & V_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = (V_y dz - dy V_z)i + (V_z dx - V_x dz)j + (V_x dy - V_y dx)k = 0$

$\dfrac{V_y}{dy} = \dfrac{V_z}{dz} \Leftarrow$

nelle quali il tempo interviene come parametro. Le eq.ni (4.2) esprimono la condizione di tangenza di ogni elemento ds di linea di corrente con la relativa velocità locale.

Le traiettorie sono le linee percorse da ciascuna particella fluida al trascorrere del tempo. Esse indicano la direzione della velocità di una stessa particella in istanti successivi e sono definite dalle eq.ni

(4.3)
$$\vec{dr} = \vec{v}\,dt$$
$$dx = v_x dt; \quad dy = v_y dt; \quad dz = v_z dt$$

(*) Stesura del prof.ing. Giulio Scarsi

nelle quali il tempo interviene come variabile.

Le linee di fumo sono le linee individuate, ad un istante fissato, dalle posizioni occupate da tutte le particelle fluide che sono transitate, in precedenza, per un dato punto del campo di moto. Per le linee di fumo il tempo interviene come parametro.

4.3 - MOTO VARIO E MOTO PERMANENTE. Il moto è vario quando le proprietà del fluido e le caratteristiche del moto dipendono dalla posizione e dal tempo; il moto è permanente quando tali proprietà e caratteristiche sono invarianti rispetto al tempo.

In condizioni di moto vario le linee di corrente, le traiettorie e le linee di fumo sono distinte; in condizioni di moto permanente esse coincidono e sono fisse nello spazio.

4.4 - LA RAPPRESENTAZIONE DEL MOTO. L'indagine sullo stato di moto di un continuo fluido, cioè la descrizione cinematica e l'analisi dinamica del moto, può essere condotta secondo due metodi di rappresentazione: il metodo di Lagrange (1736-1813) e il metodo di Eulero (1707-1783).

Nel metodo di Lagrange (in effetti già proposto da Eulero) si fissa l'attenzione su ciascuna particella fluida contenuta nel continuo in moto e individuata dalla posizione $\vec{r}_o$ al tempo $t_o$ (fig. 4.2) e si esamina lo stato di moto di tale particella al passare del tempo mentre percorre la sua traiettoria.

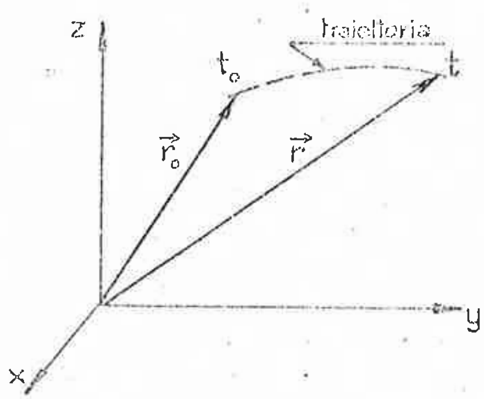



Fig. 4.2 - Traiettoria e vettori posizione. Moto tridimensionale

La posizione $\vec{r}$ che essa assume al tempo t ($> t_o$) è determinata come funzione di $\vec{r}_o$ e t (variabili indipendenti) e la descrizione cinematica del moto può essere effettuata a partire dalla trasformazione

$$(4.4) \qquad \vec{r} = \vec{r}\ (\bar{r}_o, t) \qquad \begin{cases} x = x(x_o, y_o, z_o, t) \\ y = y(x_o, y_o, z_o, t) \\ z = z(x_o, y_o, z_o, t) \end{cases}$$

che, associata alle eq.ni che rappresentano la pressione p e la densità $\rho$

$$(4.5)\qquad \begin{aligned} p &= p\,(\vec{r}_o, t) \\ \rho &= \rho\,(\vec{r}_o, t) \end{aligned}$$

consente di caratterizzare completamente lo stato di moto.

Nel metodo di Eulero si fissa l'attenzione su ciascuna posizione $\vec{r}$ del campo di moto e si esamina lo stato di moto nella posizione considerata al passare del tempo; esso è rappresentato, al tempo t, dallo stato di moto della particella fluida che, a tale tempo, occupa la posizione $\vec{r}$, indipendentemente dalla situazione passata. La descrizione cinematica del moto è qui effettuata a partire dalla eq.ne

$$(4.6)\qquad \vec{v} = \vec{v}\,(\vec{r}, t)$$

che definisce la velocità come funzione di $\vec{r}$ e t (variabili indipendenti) e lo stato di moto è individuato associando alla eq.ne (4.6) le eq.ni

$$(4.7)\qquad \begin{aligned} p &= p\,(\vec{r}, t) \\ \rho &= \rho\,(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Il metodo di Eulero è matematicamente più conveniente di quello di Lagrange e lo studio della meccanica dei fluidi viene condotto, in generale, facendo riferimento ad esso.
Sebbene i due metodi siano diversi, nella rappresentazione euleriana è tuttavia necessario introdurre il concetto lagrangiano di seguire, almeno nell'intorno della posizione considerata, particelle fluide di fissata identità: un esempio è la derivata sostanziale.

4.5 - LA DERIVATA SOSTANZIALE DF/Dt di una funzione F = F $(\vec{r}, t)$ (scalare o vettoriale) associata al fluido in moto è la variazione, riferita all'unità di tempo, che presenta la F muovendosi "materialmente" con il fluido. Essa è definita dall'eq.ne

$$(4.8)\qquad \frac{DF}{Dt} = F_{,t} + v_x F_{,x} + v_y F_{,y} + v_z F_{,z} = F_{,t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\,F$$

che si ottiene costruendo il differenziale totale della F

$$dF = F_{,t}dt + F_{,x}dx + F_{,y}dy + F_{,z}dz$$

ed esprimendo dx, dy, dz in funzione di dt attraverso le equazioni (4.3) dell'elemento di traiettoria che al tempo t passa per la posizione $\vec{r}$

$$dF = F_{,t}dt + v_x F_{,x}dt + v_y F_{,y}dt + v_z F_{,z}dt$$

La derivata sostanziale è indicata con D/Dt anzichè con d/dt per evidenziare che essa è effettuata seguendo il moto del fluido (concetto lagrangiano) pur essendo scritta con riferimento a grandezze osservate in una posizione fissata (rappresentazione euleriana).

Nella eq.ne (4.8) il termine $F_{,t}$ rappresenta la derivata locale (nulla in condizioni di moto permanente) mentre il termine $(\vec{v}\,.\vec{\nabla})F$ è la derivata convettiva.

4.6 - LA ACCELERAZIONE $\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$ della particella fluida che al tempo t occupa la posizione $\vec{r}$ è la derivata sostanziale della velocità $\vec{v}$

$$\vec{a} = \vec{a}\,(\vec{r},t) = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{v}_{,t} + (\vec{v}\,.\,\vec{\nabla}\,)\,\vec{v} \tag{4.9}$$

e presenta le componenti

$$a_x = a_x\,(\vec{r},t) = \frac{Dv_x}{Dt} = v_{x,t} + (\vec{v}\,.\,\vec{\nabla}\,)\,v_x$$

$$a_y = a_y\,(\vec{r},t) = \frac{Dv_y}{Dt} = v_{y,t} + (\vec{v}\,.\,\vec{\nabla}\,)\,v_y$$

$$a_z = a_z\,(\vec{r},t) = \frac{Dv_z}{Dt} = v_{z,t} + (\vec{v}\,.\,\vec{\nabla}\,)\,v_z$$

4.7 - CINEMATICA DEL MOTO DI UN FLUIDO. LA DEFORMAZIONE. Si consideri un fluido in moto piano e siano: $\vec{v}_0 = \vec{v}_0\,(\vec{r}_0,t)$ la velocità all'istante t nel punto $P_0\,(\vec{r}_0)$ del campo di moto e $\vec{v} = \vec{v}\,(\vec{r},t)$ la velocità allo stesso istante nel punto $P\,(\vec{r})$ (fig. 4.3).

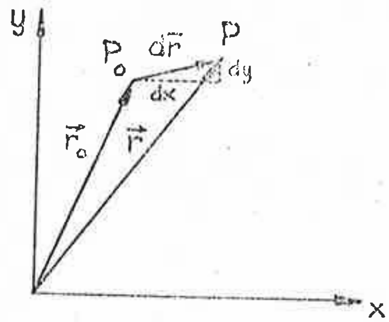



Fig. 4.3 - Vettori posizione. Moto piano

Per piccoli valori di $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy$ , cioè per P situato nelle immediate vicinanze di $P_o$, la velocità $\bar{v}$ può essere espressa da uno sviluppo in serie di Taylor limitato al termine lineare in $d\bar{r}$

$$(4.10) \quad \vec{v} = \vec{v}_o + \left[ (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \, \vec{v} \right]_o + \dots$$

L'eq.ne vettoriale (4.10) è equivalente alle due eq.ni scalari (*)

$$(4.11) \quad \begin{aligned} v_x &= v_{o_x} + v_{x,x} dx + v_{x,y} dy \\ v_y &= v_{o_y} + v_{y,x} dx + v_{y,y} dy \end{aligned}$$

che possono essere riscritte nella forma

$$(4.12) \quad \begin{aligned} v_x &= v_{o_x} + \alpha_{xx} dx + \alpha_{xy} dy - \Omega_z dy \\ v_y &= v_{o_y} + \alpha_{xy} dx + \alpha_{yy} dy + \Omega_z dx \end{aligned}$$

avendo introdotto le seguenti notazioni:

$$\alpha_{xx} = v_{x,x}; \; \alpha_{yy} = v_{y,y}; \; \alpha_{xy} = \tfrac{1}{2}(v_{y,x} + v_{x,y}); \; \Omega_z = \tfrac{1}{2}(v_{y,x} - v_{x,y})$$

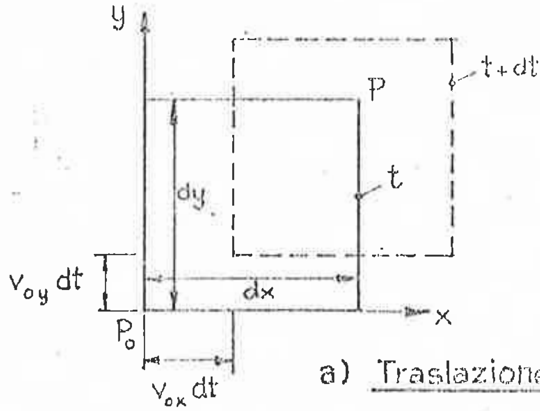
L'analisi dei termini che compaiono nelle eq.ni (4.12) consente di stabilire che l'atto di moto di una particella fluida piana può essere scomposto nelle quattro parti (fig. 4.4)

una traslazione, con velocità di componenti $v_{o_x}$, $v_{o_y}$

una rotazione , con velocità angolare media $\Omega_z$

una dilatazione, dovuta ai termini $\alpha_{xx}$ e $\alpha_{yy}$ che danno luogo alle due velocità di deformazione lineare $\alpha_{xx} dx$ e $\alpha_{yy} dy$

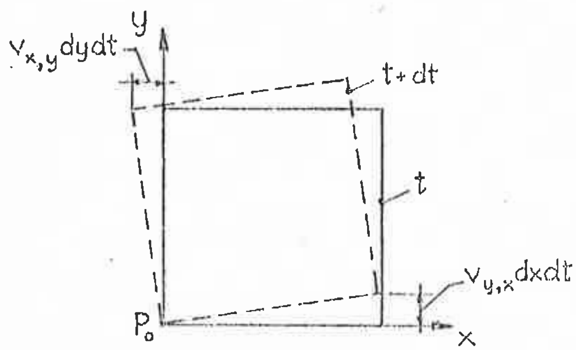
(*) - I gradienti di velocità che compaiono in tali eq.ni devono, ovviamente, essere calcolati nel punto $P_o(\vec{r}_o)$.




a) Traslazione

$$\text{vel.trasl.lungo } x = v_{o_x} dt/dt = v_{o_x}$$

$$\text{vel.trasl.lungo } y = v_{o_y} dt/dt = v_{o_y}$$

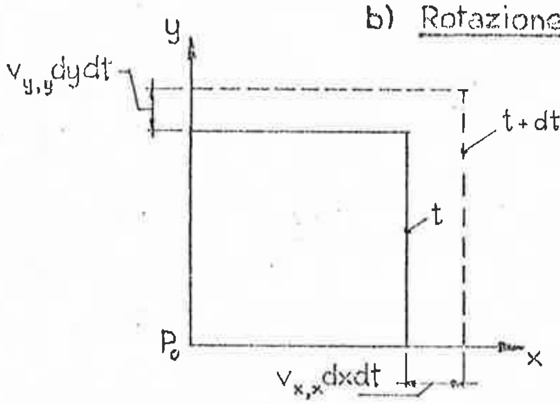



b) Rotazione

$$\text{vel.ang.lato } dx = v_{y,x}\, dxdt/dxdt = v_{y,x}$$

$$\text{vel.ang.lato } dy = -v_{x,y}\, dydt/dydt = -v_{x,y}$$

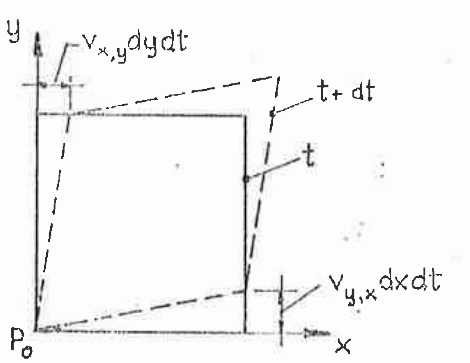
$$\text{vel.ang.media di rotazione} = \tfrac{1}{2}(v_{y,x} - v_{x,y}) = \Omega_z$$




c) Dilatazione

$$\text{vel.def.lineare lungo } x = v_{x,x}\, dxdt/dt = \alpha_{xx}\, dx$$

$$\text{vel.def.lineare lungo } y = v_{y,y}\, dydt/dt = \alpha_{yy}\, dy$$




d) Deformazione angolare

$$\text{vel.ang.lato } dx = v_{y,x}\, dxdt/dxdt = v_{y,x}$$

$$\text{vel.ang.lato } dy = v_{x,y}\, dydt/dydt = v_{x,y}$$

$$\text{vel.di deform.angolare} = v_{y,x} + v_{x,y} = 2\alpha_{xy}$$

Fig. 4.4 - Atto di moto totale di una particella fluida piana

una deformazione angolare, dovuta al termine $\alpha_{xy}$ che dà luogo alla velocità di deformazione angolare $2\alpha_{xy}$ .

La traslazione e la rotazione rappresentano moti "strettamente" cinematici (caratteristici dei corpi rigidi) che non provocano variazioni di forma della particella fluida; tali variazioni sono dovute esclusivamente alla dilatazione e alla deformazione angolare.

Nel caso di moto tridimensionale le eq.ni (4.12) vengono sostituite dalle

$$\begin{aligned} v_x &= v_{o_x} + \alpha_{xx}dx + \alpha_{xy}dy + \alpha_{xz}dz + \Omega_y dz - \Omega_z dy \\ v_y &= v_{o_y} + \alpha_{xy}dx + \alpha_{yy}dy + \alpha_{yz}dz + \Omega_z dx - \Omega_x dz \qquad (4.13) \\ v_z &= v_{o_z} + \alpha_{xz}dx + \alpha_{yz}dy + \alpha_{zz}dz + \Omega_x dy - \Omega_y dx \end{aligned}$$

che sono le componenti dell'eq.ne vettoriale

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{\Omega} \times d\vec{r} + d\vec{r} \cdot \vec{D} \qquad (4.14)$$

nella quale $\vec{\Omega}$ è il vettore velocità angolare di rotazione e $\vec{D}$ il tensore (simmetrico) velocità di deformazione, definiti dalle relazioni

$$\vec{\Omega} = \vec{i}\Omega_x + \vec{j}\Omega_y + \vec{k}\Omega_z;\ \Omega_x = \tfrac{1}{2}(v_{z,y} - v_{y,z});\ \Omega_y = \tfrac{1}{2}(v_{x,z} - v_{z,x});\ \Omega_z = \tfrac{1}{2}(v_{y,x} - v_{x,y}) \qquad (4.15)$$

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{xy} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{yz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x,x} & \tfrac{1}{2}(v_{x,y}+v_{y,x}) & \tfrac{1}{2}(v_{x,z}+v_{z,x}) \\ \tfrac{1}{2}(v_{x,y}+v_{y,x}) & v_{y,y} & \tfrac{1}{2}(v_{y,z}+v_{z,y}) \\ \tfrac{1}{2}(v_{x,z}+v_{z,x}) & \tfrac{1}{2}(v_{y,z}+v_{z,y}) & v_{z,z} \end{bmatrix} \qquad (4.16)$$

che forniscono, inoltre, il significato delle notazioni introdotto nelle eq.ni (4.13).

L'atto di moto della particella fluida può ancora essere scomposto nelle quattro parti già considerate per il moto piano osservando che, nel caso tridimen sionale, la velocità di traslazione e la velocità angolare di rotazione presentano tre componenti ($v_{o_x}$, $v_{o_y}$, $v_{o_z}$ e $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$) e la dilatazione e la deformazione angolare avvengono, ciascuna, con tre velocità ( $\alpha_{xx}dx$, $\alpha_{yy}dy$, $\alpha_{zz}dz$ e $2\alpha_{xy}$, $2\alpha_{xz}$, $2\alpha_{yz}$).

4.8 - L'EQUAZIONE DI CONTINUITA' esprime il principio di conservazione della massa di fluido contenuto in un volume V che si muove, in generale deformandosi. Essa può essere rappresentata, in forma globale, in due modi equivalenti:

a) con riferimento al volume mobile $\mathcal{V}$, mediante l'eq.ne

$$(4.17) \qquad \frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}} \rho \, dV = 0$$

b) con riferimento al volume di controllo V, che è un volume geometrico (fisso)coincidente con il volume occupato dal fluido in un dato istante (fig. 4.5), mediante l'eq.ne

$$(4.18) \qquad -\int_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA + \int_V \rho_{,t} \, dV = 0$$

nella quale

$$-\int_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA = -\int_{A_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA - \int_{A_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA$$

è la differenza tra la massa uscente e la massa entrante, nell'unità di tempo, attraverso la superficie di controllo A (superficie di contorno di V con versore normale positivo verso l'interno di V); e

$$\int_V \rho_{,t} \, dV$$

è la variazione di massa, nell'unità di tempo, conseguente a variazioni locali di densità in V.

L'eq.ne (4.17) esprime la conservazione della massa seguendo "materialmente" il volume di fluido nel suo moto, mentre l'eq.ne (4.18) esprime tale conservazione attraverso un bilancio di massa riferito ad un volume fisso (volume di controllo):

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}} \rho \, dV = \dot{m}_2 - \dot{m}_1 + \frac{\partial m}{\partial t}$$

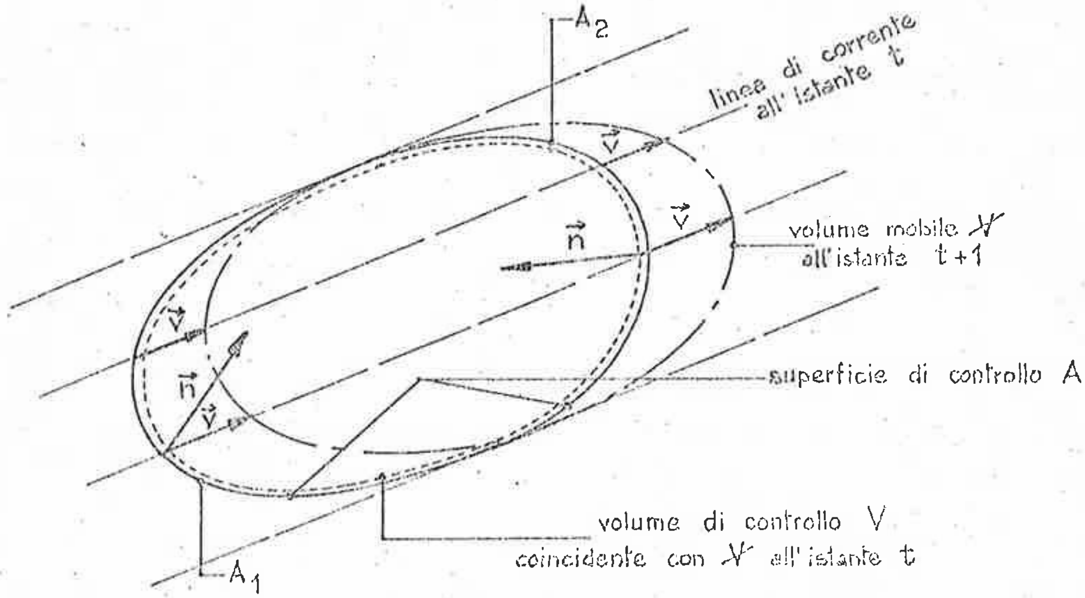



Fig. 4.5 - Volume mobile e volume di controllo.
Conservazione della massa

Applicando il teorema della divergenza, l'eq.ne (4.18) si trasforma nella

$$\int_V \left[ \rho_{,t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0 \qquad (4.19)$$

$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{v}\ \mathrm{grad}\, \rho$

dalla quale deriva, per l'arbitrarietà di V,

$$\rho_{,t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \qquad (4.20)$$

$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\, \mathrm{div}\, \bar{v} + \bar{v} \cdot \mathrm{grad}\, \rho = \frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \mathrm{div}\, \bar{v} =$

L'eq.ne (4.20) è l'eq.ne di continuità in forma indefinita, che può essere riscritta secondo la

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \qquad (4.21)$$

ricordando che: $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho$ e $\rho_{,t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho = D\rho/Dt$.

$\mathrm{div}(\rho \bar{v}) = \rho\, \mathrm{div}\, \bar{v} + \bar{v} \cdot \mathrm{grad}\, \rho$

Nelle condizioni di moto permanente ($\rho_{,t} = 0$), l'eq.ne (4.20) si riduce alla

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \qquad (4.22)$$

che esprime l'eguaglianza tra la massa entrante e quella uscente, nello stesso intervallo di tempo, attraverso la superficie di controllo A .

Per fluido incomprimibile ($\rho$ = costante), l'eq.ne (4.21) si semplifica nella

div v = 0

(4.23) $$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

che esprime l'eguaglianza tra il volume di fluido entrante e quello uscente, nello stesso intervallo di tempo, attraverso la superficie di controllo A .

4.9 - <u>IL TEOREMA DEL TRASPORTO</u>. Se le variazioni di massa (riferite all'unità di tempo) espresse dalle eq.ni (4.17), (4.18), (4.19)sono calcolate a partire dallo stesso istante t in cui il volume mobile $\mathcal{V}$ coincide con il volume di controllo V (fig. 4.5), valgono ovviamente le eq.ni

(4.24) $$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}} \rho \, dV = \int_V \rho_{,t} \, dV - \int_A \rho \, \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA$$

(4.25) $$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}} \rho \, dV = \int_V \left[\rho_{,t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})\right] dV = \int_V \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right] dV$$

che, esprimendo una condizione cinematica non strettamente legata al significato della $\rho$ possono essere riscritte sostituendo alla $\rho$ una qualunque funzione $F = F(\bar{r}, t)$ (scalare o vettoriale) associata al fluido in moto. Si ha quindi

(4.26) $$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}} F \, dV = \int_V F_{,t} \, dV - \int_A F \, \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA$$

(4.27) $$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}} F \, dV = \int_V \left[F_{,t} + \vec{\nabla}(F \vec{v})\right] dV = \int_V \left[\frac{DF}{Dt} + F \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right] dV$$

Le eq.ni (4.26), (4.27) rappresentano forme equivalenti del <u>teorema di trasporto</u>.

Un'altra forma, che tiene conto dell'eq.ne di continuità (4.21), può essere dedotta dall'eq.ne (4.27) quando la funzione F è del tipo $F = \rho F^*$. Risulta

(4.28) $$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}} \rho F^* dV = \int_V \rho \frac{DF^*}{Dt} dV$$

l'eq.ne (4.28) è particolarmente utile per dedurre le eq.ni indefinite del moto di un fluido.