CAPITOLO 2

FLUIDI IN QUIETE (IDROSTATICA) (°)

2.1 - PRESSIONE. Separata una massa fluida in due parti con una superficie tracciata nel suo interno, si ammette (Cauchy) che l'azione di una parte sull'altra sia rappresentabile con una distribuzione di forze $\delta\vec{F}$ agenti sugli elementi di area δA e ad essi associate (nel senso che ciascuna forza dipende dalla posizione e dall'orientamento di δA). Pressione è la forza per unità di superficie definita dalla

$$(2.1) \qquad \vec{p} = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta\vec{F}}{\delta A}$$

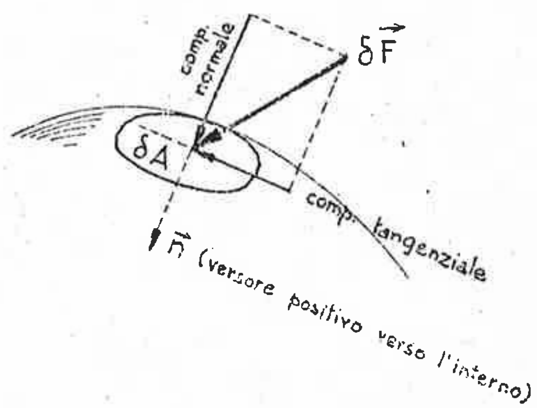

Fig. 2.1

nello schema di mezzo continuo già premesso. In altri termini le pressioni $\vec{p} = \vec{p}(\vec{r},t,\vec{n})$ rappresentano quella distribuzione di forze per unità di superficie il cui integrale $\int_A \vec{p}dA$ è equivalente all'azione esercitata dalla massa esterna attraverso la superficie A.

La pressione è un vettore che agisce in generale in direzione diversa dalla normale $\vec{n}$ all'elemento dA. Essa dipende non solo dal punto considerato ma anche dalla giacitura dell'elemento di superficie che contiene il punto.

La condizione di equilibrio alla traslazione di un tetraedro fluido elementare, con tre facce giacenti sui piani coordinati ortogonali (xy) (yz) (zx) (V. fig. 2.2), definisce la pressione $\vec{p}_{(n)}$ agente sulla generica superficie dA (la cui giacitura è definita dalla normale $\vec{n}$, positiva verso l'interno) quando si conoscono le pressioni $\vec{p}_{(x)}$, $\vec{p}_{(y)}$, $\vec{p}_{(z)}$ agenti sulle facce normali rispettivamente agli assi x, y, z. Per dimostrarlo facciamo tendere a zero i lati del tetraedro ABCO della fig. 2.2: le forze di massa e le forze d'inerzia, proporzionali al volume fluido contenuto nel tetraedro, diventano trascurabili rispetto alle forze di superficie $\vec{p}_{(n)}dA$, $\vec{p}_{(x)}(dA)_x$, $\vec{p}_{(y)}(dA)_y$, $\vec{p}_{(z)}(dA)_z$, essendo $(dA)_x$, $(dA)_y$, ... le aree delle facce normali rispettivamente all'asse x, all'asse y, ... Allora, per l'equilibrio alla traslazione, dev'essere

$$\vec{p}_{(n)}dA + \vec{p}_{(x)}(dA)_x + \vec{p}_{(y)}(dA)_y + \vec{p}_{(z)}(dA)_z = 0$$

ed essendo $(dA)_x = -dA\cos\widehat{nx} = -dA\, n_x$ e analoghe per y e z (per la convenzione fatta sul verso positivo della normale $\vec{n}$, $\cos\widehat{nx}$, $\cos\widehat{ny}$, $\cos\widehat{nz}$, sono negativi ed uguagliano le componenti del vettore unitario $\vec{n}$ sugli assi x,y,z; $(dA)_x$, $(dA)_y$, ... sono invece grandezze essenzialmente positive e di qui deriva il segno meno della relazione soprascritta). Sostituendo nell'equazione di equilibrio, con ovvia semplificazione, si ottiene l'equazione cercata

(°) - Stesura del prof.ing. Enrico Marchi.

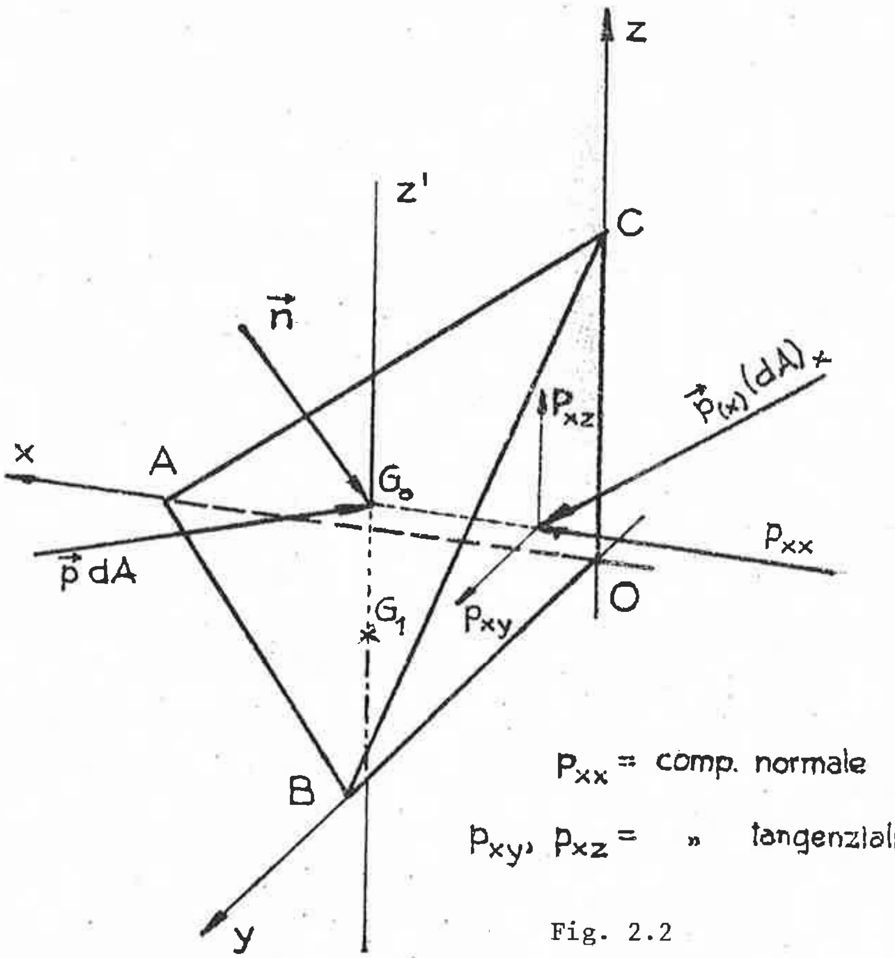

Fig. 2.2

(2.2) $$\boxed{\vec{p}_{(n)} = n_x \vec{p}_{(x)} + n_y \vec{p}_{(y)} + n_z \vec{p}_{(z)}} \; .$$

La (2.2) equivale alle tre eq.ni scalari

$$\begin{aligned} p_{nx} &= n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx} \\ p_{ny} &= n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy} \\ p_{nz} &= n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz} \end{aligned}$$

ossia

(2.3) $$\boxed{p_{ni} = n_j p_{ji}} \qquad (i,j = x,y,z)$$

dove p_{ij} è la componente nella direzione $\underline{j}$ della pressione agente sull'elemento di superficie normale all'asse $\underline{i}$.

Con notazione tensoriale, indicando con $\vec{T}$ il tensore di componenti p_{ji}

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{xy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix}$$

si può scrivere

$$(2.4)\quad \boxed{\vec{p} = \vec{n}\cdot\vec{T}} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx} & \quad n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + \ldots \end{bmatrix}$$

L'equilibrio alla rotazione dell'elemento fluido contenuto nel tetraedro elementare considerato prima dimostra che le componenti rettangole del tensore delle pressioni, con gli stessi indici scambiati fra loro, sono uguali: ossia il tensore delle pressioni è simmetrico. Infatti, basta per questo considerare la condizione di equilibrio alla rotazione rispetto ad assi paralleli agli assi x, y, z e passanti per i baricentri delle facce del tetraedro. Ad esempio considerando l'asse z', parallelo a z e passante per il baricentro G_o di ABC e per il baricentro di G_1 della faccia normale a z, si ha: i momenti di $\vec{p}_{(n)}$ dA e di $\vec{p}_{(z)}(dA)_z$ sono nulli perchè tali forze incontrano l'asse z', i momenti delle componenti normali $\vec{p}_{xx}(dA)_x$ e $\vec{p}_{yy}(dA)_y$ sono nulli per la stessa ragione, i momenti delle componenti tangenziali $\vec{p}_{xz}(dA_x)$ e $\vec{p}_{yz}(dA)_y$ sono nulli perchè dette forze sono parallele a z'; restano quindi solo i momenti delle componenti tangenziali $\vec{p}_{xy}(dA)_x$ e $\vec{p}_{yx}(dA)_y$ che devono essere fra loro uguali. Le aree $(dA)_x$ e $(dA)_y$ sono proporzionali rispettivamente a dydz e dxdz, i corrispondenti momenti hanno braccio proporzionale rispettivamente a dx e dy, sicchè dev'essere $p_{xy}dydzdx = p_{yx}dxdzdy$, e di qui deriva

$$p_{xy} = p_{yx}\ .$$

Procedendo analogamente nei confronti degli altri assi, si conclude che dev'essere

$$\boxed{p_{ij} = p_{ji}} \qquad (\text{per } i \neq j)$$

Se le componenti tangenziali del tensore delle pressioni sono nulle qualunque sia l'orientamento considerato, allora le componenti normali sono tutte uguali fra loro. Infatti, indicando con r la direzione del vettore $\vec{p}_{(n)}$, di modulo p, con le condizioni predette si ha

$$p\cos\widehat{rx} = n_x p_{xx} = p_{xx}\cos\widehat{nx}$$

$$p\cos\widehat{ry} = n_y p_{yy} = p_{yy}\cos\widehat{ny}$$

$$p\cos\widehat{rz} = n_z p_{zz} = p_{zz}\cos\widehat{nz}$$

ma, dovendo essere nulle ovunque le componenti tangenziali, anche $\vec{p}_{(n)}$ agisce lungo la normale, ossia $n \equiv r$ e quindi

$$p = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} .$$

Dalla condizione di pressione sempre normale all'elemento di superficie che si considera deriva che la pressione ha lo stesso valore in tutte le direzioni uscenti da un punto (distribuzione isotropica):

(2.6) $$\boxed{\vec{p} = \vec{n}\, p}$$; il valore scalare p dipende solo dal punto considerato.

Questa situazione si verifica sempre nei fluidi in quiete, fermi o in moto come corpo rigido. Nei fluidi in moto con scorrimento relativo delle particelle le pressioni tangenziali insorgono necessariamente, per effetto della viscosità, in relazione con la velocità di deformazione.

2.2 - FLUIDO PERFETTO (O IDEALE) è un fluido che si muove sempre senza attrito. Mancando per ipotesi le tensioni tangenziali, la pressione in un fluido perfetto, anche nelle predette condizioni dinamiche, è normale all'elemento di superficie considerato ed ha in ogni punto distribuzione isotropica.

Lo schema equivale a ritenere nulla la viscosità e quindi nulle le conseguenti dissipazioni di energia meccanica. Nessun fluido reale è privo di viscosità anche se in effetti quella di molti fluidi, fra i quali l'acqua e l'aria, è piccola. L'ipotesi è accettabile non tanto in relazione alla natura, quando al comportamento del fluido. Nei fenomeni nei quali le perdite sono piccole rispetto alle energie in gioco, le soluzioni ricavate dall'ipotesi di fluido ideale rispecchiano sostanzialmente i risultati sperimentali (ad es.: efflusso da luci, azioni dinamiche di getti, onde nelle correnti in pressione e onde di mare).

2.3 - EQUAZIONI DELL'EQUILIBRIO di un fluido in quiete.

Una massa fluida di volume V, racchiusa da una superficie A, in condizioni statiche è soggetta all'azione del campo esterno (forze $\vec{f}$ per unità di massa) e a quella delle forze di superficie (pressioni normali $\vec{p} = \vec{n}\, p$ per unità di superficie). L'eq.ne integrale dell'equilibrio è quindi

(2.7) $$\int_V \rho \vec{f}\, dV + \int_A p\, \vec{n}\, dA = 0 \qquad \boxed{\vec{G} + \vec{\Pi} = 0}$$

Trasformando l'integrale di sup. in integrale di vol. (°) e tenendo conto

---

(°) - Vedi nota a pagina seguente.

dell'arbitrarietà del volume considerato, si ottiene l'eq.ne differenziale dello equilibrio

(2.8) $\boxed{\vec{\nabla} p = \varrho \vec{f}}$ equivalente alle tre eq.ni scalari

(2.9) $p_{,i} = \varrho f_i \qquad (\partial p/\partial x = \varrho f_x, \text{ ecc...})$

2.4 - CAMPO GRAVITAZIONALE. Assumendo z verticale e positiva verso l'alto: $f_x = f_y = 0$; $f_z = -g$; potenziale delle forze di gravità $\varphi = -g\, z + \text{cost}$. Dalle (2.9) deriva $dp = -\varrho g dz$, da cui:

$dp = -\rho g dz \Rightarrow p = -\rho g z + \text{cost}$

$\forall \; z + p/\gamma = \text{cost}$

a) nei fluidi incomprimibili (ϱ=cost) è cost. in tutta la massa il carico piezometrico h

(2.10) $\boxed{h = z + p/\varrho g = \text{cost}}$

$(\varrho g = \gamma)$

Significato energetico

z = energia di posizione per 1 di peso = quota

p/γ = energia di pressione per 1 di peso = altezza rappresentatrice della pressione p

$z+p/\gamma$ = energia potenziale per 1 di peso = carico piezometrico h

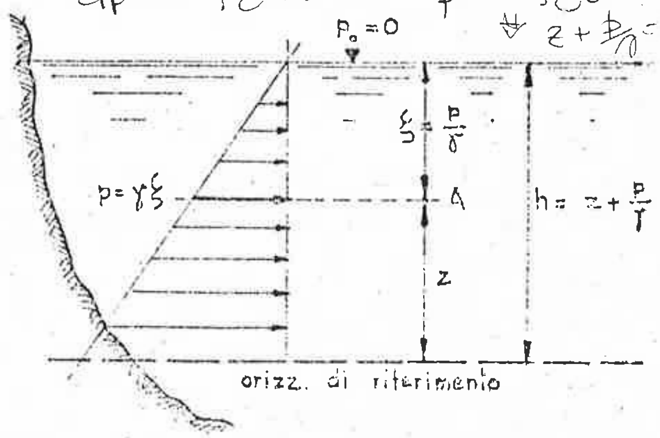

Fig. 2.3

La pressione p varia linearmente con la profondità. Indicando con ζ (= -z+ +cost) la profondità rispetto ad un piano orizzontale dove la pressione è p_o

(2.11) $\boxed{p = p_o + \gamma\zeta}$ legge di distribuzione idrostatica della pressione.

b) nei fluidi comprimibili con comportamento barotropico, $\varrho = \varrho(p)$, vale la

(2.12) $$z + \frac{1}{g}\int \frac{dp}{\varrho} = \text{cost}$$

Definita la legge $\varrho = \varrho(p)$ (trasformazione isoterma, adiabatica, ecc...) si ricava dalla (2.12) la distribuzione di p con la quota. Per l'aria, a temp. a press. ordinarie (e in genere per tutti i gas) si può assumere p = cost per variazioni di quota < 80 m (errore < 1%) e distribuzione idrostatica della pres-

---

(°) - Utilizziamo la seguente espressione del teorema di Green-Gauss

(2.A) $$\int_A F\, \vec{n}\, dA = -\int_V \vec{\nabla} F\, dV$$

dove F può essere una grandezza scalare oppure una grandezza vettoriale o tensoriale ($\vec{\nabla} F$ = gradF se F è scalare; $\vec{\nabla}.\bar{F}$ = div $\bar{F}$ se $\bar{F}$ è un vettore o un tensore).

sione per variazioni di quota < 700 m (sempre con errore < 1%).

2.5 - CAMPI CONSERVATIVI in generale. Detto φ il potenziale delle forze di massa ($\vec{f} = \vec{\nabla}\varphi$) l'eq. (2.8) diventa $(1/\varrho)\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}\varphi = 0$ e si può integrare nelle condizioni di

(2.13) fluido barotropico $\varrho = \varrho(p)$: $\displaystyle\int \frac{dp}{\varrho} - \varphi = \text{cost}$

(2.14) fluido incomprimibile $\varrho = \text{cost}$: $p/\varrho - \varphi = \text{cost}$

Le superficie isobariche (p = cost) coincidono con le superficie equipotenziali del campo delle forze di massa (φ = cost).

2.6 - LEGGE DI PASCAL - La (2.13), scritta per due punti qualsiasi di un fluido incomprimibile, diventa $p_1 - p_2 = \varrho(\varphi_1 - \varphi_2)$. Poichè il secondo membro dipende solo dalle posizioni e quindi non cambia una volta fissati i due punti, segue che anche la differenza $p_1 - p_2$ non può cambiare: ad un aumento di pressione nel primo punto, deve corrispondere un uguale aumento nel secondo.

In generale, in una massa fluida incomprimibile in condizioni statiche, la pressione esercitata in un punto si risente inalterata in tutta la massa (Pascal). Così in un liquido, sulla cui superficie libera agisce la pressione p_o, la pressione assoluta in ogni punto interno è data da quella idrostatica $+p_o$.

Applicazione tecnica: il torchio idraulico (le forze esercitate su due pistoni in cilindri comunicanti sono direttamente proporzionali alle rispettive aree).

2.7 - MISURA DELLE PRESSIONI. Sono spesso utilizzate in campo tecnico altre unità, oltre al pascal = P = $N.m^{-2}$, anche il $kgf.m^{-2} = 9{,}81\ N.m^{-2}$, e:

l'atmosfera fisica	= 760 mm di Hg = 10333 $kgf.m^{-2}$ = 101.367 P
l'atmosfera tecnica (at)	= 10000 $kgf.m^{-2}$ (°)
il bar	= 10^6 $dine.cm^{-2}$ = 10200 $kgf.m^{-2}$ = 10^5 P (1 mbar = = 10^2 P)
il p.s.i. (pounds/sq.inch)	= 703 $kgf.m^{-2}$ = 6896 P

Come misuratori di pressione si impiegano normalmente:

a) Manometri a liquido: sono costituiti da un tubo verticale trasparente contenente o lo stesso liquido del quale si vuole misurare la pressione (piezometri) oppure un liquido manometrico non miscibile con il fluido in esame (si usano, oltre all'acqua: benzolo ϱ = 880 kg m^{-3}, bromoformio ϱ = 2900 kg m^{-3}, mercurio 13600 kg m^{-3}).
   Per la misura della pressione basta ricordare che, nello stesso fluido, su un piano orizzontale la pressione è costante e per una variazione ζ di quota essa aumenta di $\gamma\zeta$ procedendo verso il basso;

(°) - Si usa il simbolo ate (atmosfere effettive) quando si indica il valore della press. al di sopra della p atmosferica, il simbolo ata quando si indica il valore assoluto della pressione (sempre in atmosfere tecniche).

b) Manometri metallici: sono costituiti da elementi metallici (tubo cilindrico curvo nel Bourdon, membrana o soffietto nel sistema Schaeffer) che si deformano sotto l'effetto della pressione da misurare. Le deformazioni sono amplificate meccanicamente e trasmesse ad un indice che si muove su una scala tarata.

c) Trasduttori di pressione: sono manometri a membrana nei quali le deformazioni vengono trasformate o in variazioni di resistenza con strain-gage o in variazioni di induttanza con una bobina a nucleo mobile; tali variazioni influiscono sul lato di un ponte inizialmente in equilibrio. La piccola inerzia di questi manometri li rende particolarmente adatti alla misura di pressioni rapidamente variabili.

2.8 - FORZE IDROSTATICHE sono le risultanti delle pressioni esercitate da un fluido in quiete su data superficie.

2.8.1 - CONTRO SUPERFICIE PIANE. In ogni punto la pressione idrostatica vale $p = \gamma\zeta$, posto $p_o = 0$, ed è normale alla superficie. L'integrale delle forze parallele pdA è l'intensità della forza idrostatica F (fig. 2.4)

$$\boxed{F = \gamma \zeta_G A} \tag{2.15}$$

A = area della superficie piana

ζ_G = prof. del baricentro ($\gamma\zeta_G$ = press. sul baricentro).

La sua retta d'azione (per l'uguaglianza dei momenti rispetto all'asse y, intersezione del piano della sup. A con il p.l.) passa per il centro di spinta C di coordinate

$$x_C = \frac{J_{yy}}{S_y} = x_G + \frac{J_{y_o y_o}}{A x_G} \tag{2.16}$$

$$y_C = \frac{J_{xy}}{S_y} \tag{2.17}$$

J_{yy} = mom.d'inerzia della figura di area A rispetto all'asse y;

$J_{y_o y_o}$ = idem rispetto all'asse baricentrico y_o//ad y;

S_y = momento statico della stessa figura rispetto all'asse y = A x_G.

Volendo tenere conto di una pressione $p_o \neq 0$ sul p.l. basta aggiungere la forza p_oA passante per il baricentro G della superficie.

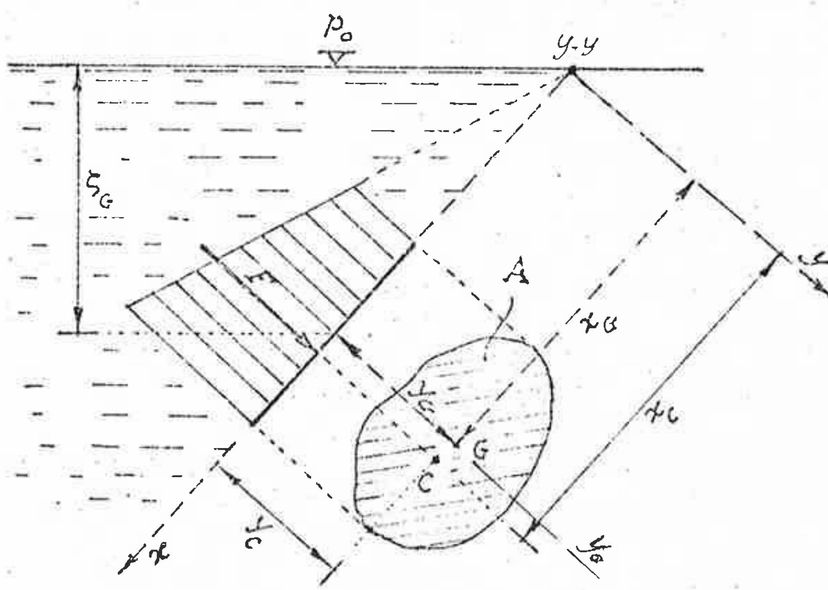

Fig. 2.4 - Forza idrostatica contro una superficie piana

2.8.2 - CONTRO SUPERFICIE GOBBE. Si calcolano le risultanti delle forze pdA (non parallele fra loro) nella direzione verticale (F_V) e in una direzione orizzontale (F_O).

Dall'equilibrio alla traslazione verticale della massa, di volume V, racchiusa dalla superficie data A, da una superficie cilindrica a generatrici verticali appoggiata sul contorno c e dalla sezione Ω_V di questa superficie con il p.l. (fig. 2.5) deriva

(2.18) $F_v = \gamma V (+p_o \Omega_v$ se $p_o \neq 0)$

La retta d'azione passa per il centro di gravità O del volume considerato.

Analogamente, dall'equilibrio alla traslazione orizzontale della massa racchiusa dalla sup. A, dalla sup. cilindrica a generatrici orizzontali appoggiata sul contorno c e dalla sezione retta Ω di tale cilindro, deriva

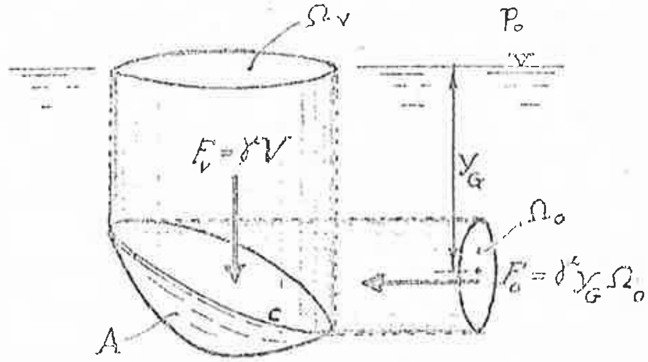

Fig. 2.5 - Forza idrostatica contro una superficie gobba

(2.19) $F_o = \gamma \zeta_G \Omega_o$ $(+p_o \Omega_o$ se $p_o \neq 0)$

La sua retta d'azione passa per il centro di spinta della sezione piana Ω_o.

2.9 - LEGGE DI ARCHIMEDE - CORPI TOTALMENTE IMMERSI

Un corpo, immerso in un fluido in quiete, riceve una spinta verticale, rivolta verso l'alto, pari al peso del fluido spostato (Archimede). Infatti, se una massa fluida occupasse lo stesso volume V del corpo, l'azione F risultante delle forze di superficie dovute alle pressioni (le medesime agenti sul corpo) sarebbe equilibrata dal peso P_f della massa fluida:

$$F = P_f = \int_V \gamma \, dV .$$

In particolare, se γ = cost come si può ritenere normalmente: $F = \gamma V$. La spinta passa per il baricentro C del volume fluido.

Un corpo immerso è in equilibrio se:

a) il suo peso P è uguale alla spinta γV;

b) il suo baricentro G e il centro C sono sulla stessa verticale.

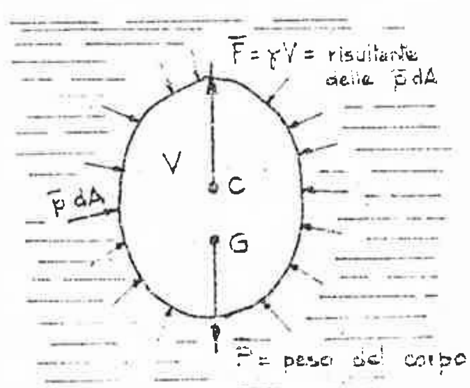

Fig. 2.6 - Corpo immerso in equilibrio stabile se $\bar{P} = \bar{F} = V$

Stabilità: l'equilibrio è indifferente per traslazione orizzontali e per rotazioni attorno ad un asse verticale; ancora indifferente per una traslazione verticale se γ = = cost (stabile se la densità diminuisce dal basso verso l'alto); per una rotazione attorno ad un asse orizzontale è: stabile se G è più basso di C (fig. 2.6), instabile se G è più alto di C, indifferente se G $\equiv$ C .

2.10 - GALLEGGIANTI.

Un piano di galleggiamento divide il corpo in due parti, una delle quali ha un volume V (volume di carena) tale che γV è uguale al peso P del corpo. Centro di carena C è il baricentro del volume omogeneo V .

Condizioni di equilibrio: a) il volume immerso dev'essere pari al volume di carena, ossia $\gamma V = P$; b) C e il baricentro G del galleggiante devono trovarsi sulla stessa verticale.

Stabilità: l'equilibrio è indifferente per traslazioni orizzontale e per rotazioni attorno ad un asse verticale; stabile per una traslazione verticale. Per piccole rotazioni (< 15°) attorno ad un asse orizzontale (giacente sulla sezione di galleggiamento e che si dimostra essere baricentrico), la stabilità dell'equilibrio è verificata anche se G è più alto di C purchè sia

$$\overline{GC} < J_o/V \tag{2.20}$$

con J_o = mom. d'inerzia della sezione di galleggiamento rispetto all'asse di rotazione. La verifica si esegue rispetto all'asse per cui è minimo J_o. Se il galleggiante contiene un liquido di p.spec. γ_1 dev'essere

$$\overline{GC} < \frac{J_o}{V} - \frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{J_1}{V} \tag{2.21}$$

con γ = peso spec. liquido esterno; J_1 = mom. d'inerzia dello specchio libero del liquido interno rispetto ad un asse baricentrico // all'asse di rotazione.