RISOLUZIONE PROVA DI ESONERO DEL 15 MARZO 2023

ESERCIZIO N. 1 (TRACCIA A)

$\bar{A} = (+3, +1, +2) \quad \bar{B} = (+3 +1 -2)$

$|\bar{A}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14} \qquad |\bar{B}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$\bar{A} \cdot \bar{B} = (+3)(+3) + (+1)(+1) + (+2)(-2) = +6$

$\bar{A} \times \bar{B} = \bar{C}$

$$\bar{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ +3 & +1 & +2 \\ +3 & +1 & -2 \end{vmatrix} = +\hat{i}(-2-2) + \hat{j}(-6-6) + \hat{k}(+3-3)$$

$$= -4\hat{i} + 12\hat{j} = 4(-\hat{i} + 3\hat{j})$$

GENERICO VETTORE ORTOGONALE A $\bar{C}$ $\Longrightarrow$

$\bar{C}$ GIACE NEL PIANO XY PERTANTO UN QUALSIASI VETTORE CON COMPONENTE NON NULLA SULL'ASSE Z E CON COMPONENTI NULLE SULLE ALTRE DUE DIREZ. RISPONDE ALLA DOMANDA

$\bar{D} = d_z \hat{k} \quad d_z \neq 0 \quad \bar{D} \cdot \bar{C} = 0$

ESERCIZIO n. 1 (TRACCIA B)

$\bar{A} = (2, 1\ 1)$ $\bar{B} = (0, 0, 2)$

$\bar{C} = (1\ -2\ 0)$ $\bar{D} = (1\ 1\ -3)$

DUE VETTORI SONO ORTOGONALI SE HANNO PRODOTTO SCALARE NULLO

$\bar{A} \cdot \bar{B} = +2$

$\bar{A} \cdot \bar{C} = +2 - 2 = 0 \Rightarrow \bar{A} \perp \bar{C}$

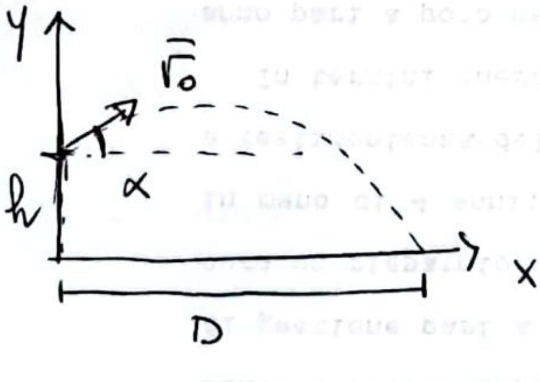
$\bar{A} \cdot \bar{D} = +2 + 1 - 3 = 0 \Rightarrow \bar{A} \perp \bar{D}$

$\bar{B} \cdot \bar{C} = 0 \Rightarrow \bar{B} \perp \bar{C}$

$\bar{B} \cdot \bar{D} = -6$

$\bar{C} \cdot \bar{D} = +1 - 2 = -1$

ESERCIZIO n. 2 (TRACCIA A)



$h = 20$ cm

$|\bar{v}_0| = ?$ $\alpha = 16°$

$D = 17$ m

MOTO UNIF. ACCELERATO SOTTO L'AZIONE DI $\bar{g}$

$$\begin{cases} \bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \bar{v}_0 t + \frac{1}{2}\bar{a}t^2 \\ \bar{v}(t) = \bar{v}_0 + \bar{a}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} + a_x t \\ v_y(t) = v_{0y} + a_y t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{cases} \quad \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \, t \\ y(t) = h + v_0 \sin\alpha \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = v_0 \sin\alpha - g t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t_v) = D \\ y(t_v) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} D = v_0 \cos\alpha \, t_v \\ h + v_0 \sin\alpha \, t_v - \frac{1}{2} g t_v^2 = 0 \end{cases}$$

$$t_v = \frac{D}{v_0 \cos\alpha}$$

$$h + \cancel{v_0} \sin\alpha \frac{D}{\cancel{v_0} \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \frac{D^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = 0$$

$$h + D \tan\alpha = \frac{1}{2} g \frac{D^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

$$v_0^2 = \frac{1}{2} g \frac{D^2}{\cos^2\alpha \, (h + D \tan\alpha)}$$

$v_0 = 17.38$ m/s

$t_v = 1.02$ s

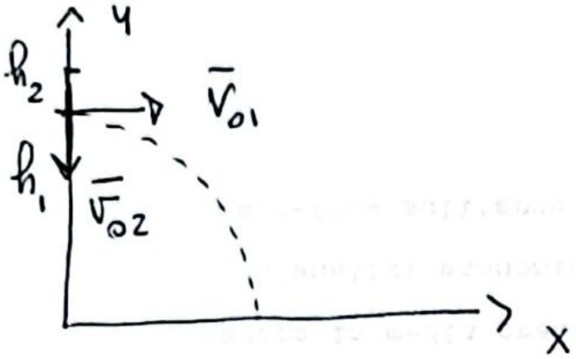
$y = h_{MAX} = y(t_s)$

$v_y(t_s) = 0 \qquad v_y(t_s) = v_0 \sin\alpha - g t_s = 0 \qquad t_s = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

$t_s = 0.49$ s $\qquad y(t_s) = h + v_0 \sin\alpha \, t_s - \frac{1}{2} g t_s^2$

$h_{MAX} = 1.37$ m

ESERCIZIO N. 2 (TRACCIA B)



$h_1 = 1.5\ m$

$|\bar{v}_{01}| = 5\ m/s$

$h_2 = 1.6\ m$

$|\bar{v}_{02}| = 2\ m/s$

PALLINA N. 1 $\quad \bar{r}_1(t) = \bar{r}_{01} + \bar{v}_{01}t + \frac{1}{2}\bar{a}_1 t^2$

$$\bar{v}_1(t) = \bar{v}_{01} + \bar{a}_1 t$$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{01} + v_{01x}t + \frac{1}{2}a_{1x}t^2 \\ y_1(t) = y_{01} + v_{01y}t + \frac{1}{2}a_{1y}t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{01} = 0 \\ y_{01} = h_1 \end{cases} \begin{cases} v_{01x} = v_{01} \\ v_{01y} = 0 \end{cases} \begin{cases} a_{1x} = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = v_{01}t \\ y_1(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$t_v : y_1(t_v) = 0 \qquad t_v = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad 0.55\ s$

$x_1(t_v) = D \qquad D = v_{01}t_v \quad 2.75\ m$

PER LE VELOCITA'

$$\begin{cases} v_{1x}(t) = v_{01x} + a_{1x}t \\ v_{1y}(t) = v_{01y} + a_{1y}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{1x}(t) = v_{01} \\ v_{1y}(t) = -gt \end{cases}$$

VELOCITA' FINALE $\begin{cases} v_{1x}(t_v) = v_{01} = v_{1x}^f \\ v_{1y}(t_v) = -g t_v = v_{1y}^f \end{cases}$

$$\begin{cases} v_{1x}^f = 5\ m/s \\ v_{1y}^f = -5.4\ m/s \end{cases}$$

$$|\bar{v}_f| = 7.36\ m/s$$

PALLINA n. 2 $\bar{r}_2(t) = \bar{r}_{02} + \bar{v}_{02} t + \frac{1}{2}\bar{a}_2 t^2$

$$\begin{cases} x_2(t) = x_{02} + v_{02x} t + \frac{1}{2} a_{2x} t^2 \\ y_2(t) = y_{02} + v_{02y} t + \frac{1}{2} a_{2y} t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{02} = 0 \\ y_{02} = h_2 \end{cases} \begin{cases} v_{02x} = 0 \\ v_{02y} = -2\ m/s \end{cases} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

MOTO CHE AVVIENE SOLO LUNGO LA y

$y_2(t) = h_2 - 2t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad h_2 = 1.6$

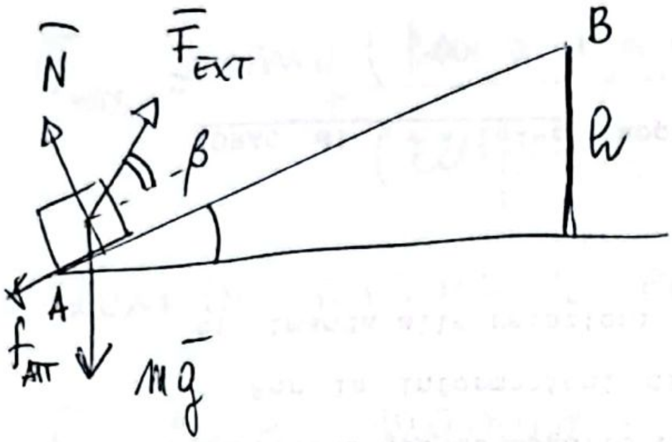
$t_v : \ y_2(t_v) = 0$

$$1.6 - 2t_v - \frac{1}{2} 9.8\, t_v^2 = 0$$

$$t_v = 0.81 s$$

ARRIVA PRIMA AL SUOLO LA PRIMA PALLINA

ESERCIZIO n. 3



$\alpha = 20°$ $\quad \mu_s = 0.5$

$\beta = 30°$ $\quad \mu_k = 0.4$

$m = 1\ kg$

$h = 1\ m$

$$\bar{F} = m\bar{a}$$

$$\bar{F}_{EXT} + \bar{N} + m\bar{g} + \bar{f}_{ATT} = m\bar{a}$$

asse x) $+ F_{EXT}\cos\beta - mg\sin\alpha - f_{ATT} = ma_x$

asse y) $+ F_{EXT}\sin\beta - mg\cos\alpha + N = 0$

$$N = mg\cos\alpha - F_{EXT}\sin\beta$$

$|\bar{f}_{ATT}| \leq \mu N \quad |\bar{f}_{ATT}| \leq \mu(mg\cos\alpha - F_{EXT}\sin\beta)$

SOSTITUENDO NELLA PRIMA

$$F_{EXT}\cos\beta - mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha - F_{EXT}\sin\beta) = ma_x$$

IL VALORE DI $|\bar{F}_{EXT}|$ CORRISPONDE AL VALORE IN CUI $a_x = 0$ $\mu = \mu_s$

$$F_{EXT}\cos\beta - mg\sin\alpha - \mu_s mg\cos\alpha + \mu_s F_{EXT}\sin\beta = 0$$

$$F_{EXT}(\cos\beta + \mu_s \sin\beta) = mg(\sin\alpha + \mu_s \cos\alpha)$$

$$F_{EXT} = mg\frac{(\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha)}{(\cos\beta + \mu_s \sin\beta)} \qquad F_{EXT} = 7.14\ N$$

QUANDO RISALE IL PIANO INCLINATO

$$F_{EXT}\cos\beta - mg\sin\alpha - \mu_c(mg\cos\alpha - F_{EXT}\sin\beta) = ma_x$$

$$F_{EXT}(\cos\beta + \mu_c \sin\beta) - mg(\sin\alpha + \mu_c\cos\alpha) = ma_x$$

$$a_x = \frac{F_{EXT}}{m}(\cos\beta + \mu\sin\alpha) - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

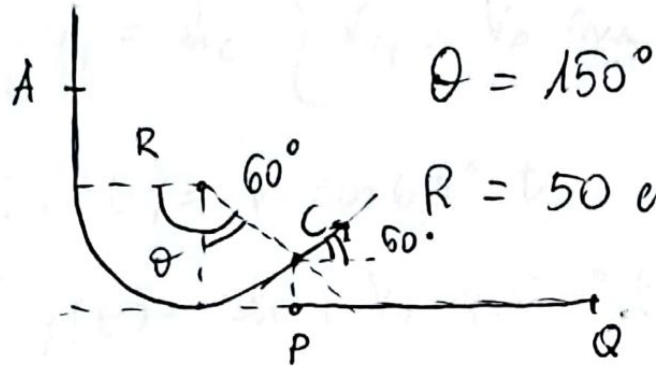
$$a_x = 0.57\ m/s^2$$

$$AB\sin\alpha = h \qquad AB = \frac{h}{\sin\alpha} \qquad AB = 3.6\ m$$

$$x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2$$ LUNGO IL PIANO INCLINATO PARTENDO DA FERMO

$$AB = \frac{1}{2}a_x t_{AB}^2 \qquad t_{AB} = \sqrt{\frac{2AB}{a_x}} \qquad t_{AB} = 3.55\ s$$

ESERCIZIO n. 4



$\theta = 150°$

$R = 50\ cm$

GUIDA PRIVA DI ATTRITO

$PQ = 3R$

A) AFFINCHE' RICADA IN P DEVE USCIRE DALLA GUIDA CON VELOCITA' NULLA $V_c = 0$

$E_{TOT}^{A} = E_{TOT}^{C}$ SE INIZIALMENTE VIENE LASCIATA CADERE $V_A = 0$

$$\cancel{\tfrac{1}{2} m} V_A^2 + mgh_A = \cancel{\tfrac{1}{2} m} V_C^2 + mgh_C$$

$$mgh_A = mgh_C \Rightarrow h_A = h_C$$

$$h_C = R\left[1 - \cos\left(\theta - \tfrac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$h_C = R/2 \qquad h_C = 25\ cm$$

B) AFFINCHE RICADA IN Q $\Rightarrow G = 3R = 1.5\ m$

VELOCITA' INIZIALE ~~DO~~ V_0 E ANGOLO 60°

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + V_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y(t) = y_0 + V_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = h_c \end{cases} \quad \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos 60° \\ v_{0y} = v_0 \sin 60° \end{cases} \quad \begin{matrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos 60° \, t \\ y(t) = h + v_0 \sin 60° \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$t = t_v \quad \begin{cases} x = PQ \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} PQ = v_0 \cos 60° \, t_v \\ 0 = h + v_0 \sin 60° \, t_v - \frac{1}{2} g t_v^2 \end{cases}$$

$V_0 = 3.9 \ m/s \qquad t_v = 0.77 \ s$

APPLICANDO LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$E^A_{TOT} = E^C_{TOT}$$

$$E^A_{TOT} = mgh_A$$

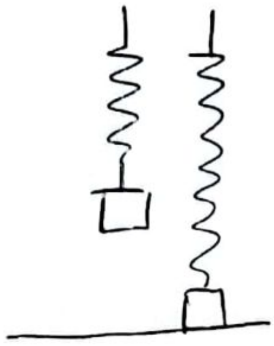
$$E^C_{TOT} = mgh_c + \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$mgh_A = mgh_c + \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$h_A = h_c + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \qquad h_A = 103 \ cm$$

ESERCIZIO BONUS

$d = 20\ cm \qquad m = 1\ Kg$



L'ENERGIA POTENZIALE IMMAGAZZINATA DALLA MOLLA DEFORMATA NON DEVE SUPERARE LA VARIAZIONE DI ENERGIA GRAVITAZIONALE DEL PESETTO

$$\frac{1}{2} K d^2 = mg(h_i - h_f)$$

$$h_i - h_f = d$$

$$\frac{1}{2} K d^{\cancel{2}} = mg\cancel{d} \qquad K = \frac{2mg}{d} \qquad K = 98\ N/m$$