UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA BASILICATA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA

Prova di[1]
Analisi Matematica I
(ING0002, ING0276, ING0008, IN0500)

16 settembre 2025

[1] Calcolare il limite delle seguenti successioni:

$$(\mathbf{a}) \quad \left\{ \sum_{k=0}^{n} \left(\cot \frac{2}{3}\pi \right)^{n} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \quad , \quad (\mathbf{b}) \quad \left\{ \sqrt[n]{\binom{7n}{5n}} \right\}_{n\geq 1}$$

$$(\mathbf{c}) \quad \left\{ \frac{\sqrt[3]{1-7n^2+4n^6}+\sqrt[3]{7n^2+4n^5-4n^6}}{\sqrt[6]{4n^6-7n^2}} \right\}_{n\geq 3} .$$

[2] **(i)** Definire la distanza tra due numeri complessi ed enunciarne le sue proprietà.

(ii) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrare che A è chiuso se e solo se $A' \subseteq A$.

(iii) Si può avere una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che trasformi l'intervallo $[-2, 2]$ nell'intervallo (-3, 3]? Giustificare la risposta.

(iv) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile $2n$ volte in un punto $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$ per cui $f^{(k)}(x_0) = 0$ per ogni $1 \leq k \leq 2n-1$. Dimostrare che se $f^{(2n)}(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo locale.

[3] Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali del primo ordine, determinare la soluzione che verifica alla condizione iniziale $y(0) = -1$:

$$(\mathbf{A}) \quad y' + \frac{1}{3}\, y(x^3+3x^2+1) = y^4(x^3+3x^2+1) \ ,$$

$$(\mathbf{B}) \quad y' = \frac{3x-2y-3}{-3x+2y-2} \ .$$

[1] Ogni esercizio ben risolto vale 10 punti. Durata totale della prova: 2 ore. Risposte non attinenti alle lezioni svolte (ad esempio scaricate da internet) non verranno prese in considerazione.