Appunti dalle Lezioni di

Analisi Matematica I

(12 C.F.U.)

Elisabetta Barletta

Indice

I - Richiami sull'insieme dei numeri reali

In questo capitolo si introducono i concetti di minimo, di massimo, di estremo inferiore e superiore di un sottoinsieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Si richiama brevemente la topologia euclidea di $\mathbb{R}$ e si espongono alcuni risultati per lo più elementari utili per gli argomenti dei Capitoli successivi.

1. Estremi di un insieme

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto.

Definizione 1.1. Un elemento $m_0 \in A$ si dice *minimo* di A se per ogni $a \in A$ è $m_0 \leq a$; analogamente, un elemento $M_0 \in A$ si dice *massimo* di A se per ogni $a \in A$ è $a \leq M_0$.

Indicheremo con $\min A$ e $\max A$ rispettivamente il minimo e il massimo di un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dimostra (vedi Appendice) che il minimo ed il massimo di A sono nozioni ben definite, i.e. se A ammette un minimo (un massimo) allora esso è unico.
Dalla definizione segue che $\mathbb{R}$ non ha né minimo né massimo.

Osservazione 1.1. Non è detto che un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$ abbia il minimo e il massimo.
Ad esempio se si fissano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e si considera l'intervallo $A = (a\,, b)$, esso non ha né minimo né massimo, sebbene sia vero che $a < x$ e $x < b$ per ogni elemento x di A. Infatti a e b non appartengono ad A, dunque non possono essere il minimo e il massimo di A.

Definizione 1.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto. Un elemento $m \in \mathbb{R}$ si dice un *minorante* di A se per ogni $a \in A$ è $m \leq a$; in modo analogo, un elemento $M \in \mathbb{R}$ si dice un *maggiorante* di A se per ogni $a \in A$ è $a \leq M$.

È ovvio che $\mathbb{R}$ non ha né minoranti né maggioranti; invece per $A = (a\,, b)$, a e b sono rispettivamente un minorante e un maggiorante di A. Si noti che in questo esempio ogni elemento $x \in \mathbb{R}$ con $x \leq a$ è un minorante di A, così come ogni elemento $x \in \mathbb{R}$ con $x \geq b$ è un maggiorante di A.

Definizione 1.3. Un sottoinsieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ si dice *limitato inferiormente* se esso ammette almeno un minorante; A si dice *limitato superiormente* se esso ammette almeno un maggiorante.

Definizione 1.4. Un sottoinsieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ limitato inferiormente e superiormente si dice *limitato*.
Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ privo o di minoranti o di maggioranti si dice *illimitato*.

Dalla definizione $\mathbb{R}$ è *illimitato*.
Se $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, allora gli intervalli (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ e $[a, b]$ sono sottoinsiemi limitati. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, gli intervalli $A_1 = (a, +\infty)$ e $A_2 = [a, +\infty)$ sono sottoinsiemi limitati inferiormente ma non superiormente: notare che l'insieme dei minoranti sia di A_1 che di A_2 è $\mathcal{M}_n = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} = (-\infty, a]$; A_1 non ha minimo mentre A_2 ha minimo (che è a). In ogni caso A_1 e A_2 sono insiemi *illimitati*. Analogamente, per ogni $a \in \mathbb{R}$, gli insiemi $B_1 = (-\infty, a)$ e $B_2 = (-\infty, a]$ sono limitati superiormente ma non inferiormente:

l'insieme dei loro maggioranti è $\mathcal{M}_g = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} = [a, +\infty)$; B_1 non ha massimo, mentre B_2 ha massimo (che è a). Anche in questo caso B_1 e B_2 sono insiemi *illimitati*.

Proposizione 1.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto. Se A è limitato inferiormente allora l'insieme dei minoranti di A ha massimo.*
Se A è limitato superiormente allora l'insieme dei maggioranti di A ha minimo.

Dimostrazione. Poiché A è limitato inferiormente, l'insieme $\mathcal{M}_n$ dei minoranti di A è non vuoto; indichiamo con $\mathcal{M}_n^C$ il suo complementare. È chiaro che $\mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_n^C = \mathbb{R}$ e $\mathcal{M}_n \cap \mathcal{M}_n^C = \emptyset$. Siano $m \in \mathcal{M}_n$ e $\widehat{m} \in \mathcal{M}_n^C$, allora $\widehat{m}$ non è un minorante di A, dunque esiste un elemento $\widehat{a} \in A$ tale che $\widehat{a} < \widehat{m}$; inoltre essendo m un minorante di A è anche $m \leq \widehat{a}$ e perciò $m < \widehat{m}$. Poiché questo vale per ogni $m \in \mathcal{M}_n$ e ogni $\widehat{m} \in \mathcal{M}_n^C$, ne segue che $(\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_n^C)$ è una sezione[1] di $\mathbb{R}$ di cui ne indichiamo con ℓ l'elemento separatore. Proviamo che ℓ appartiene a $\mathcal{M}_n$. Infatti se per assurdo $\ell \notin \mathcal{M}_n$, ℓ non sarebbe un minorante di A. Dunque esisterebbe $a_\ell \in A$ tale che $a_\ell < \ell$ e si avrebbe

$$a_\ell = \frac{a_\ell + a_\ell}{2} < \frac{\ell + a_\ell}{2} < \frac{\ell + \ell}{2} = \ell \ .$$

Questo implica che $\dfrac{\ell + a_\ell}{2}$ non è un minorante di A e quindi è un elemento di $\mathcal{M}_n^C$. Tuttavia ogni elemento di $\mathcal{M}_n^C$ è maggiore o uguale a ℓ mentre questo non accadrebbe per l'elemento $\dfrac{\ell + a_\ell}{2}$. Avendo dunque un assurdo, è $\ell \in \mathcal{M}_n$. Siccome poi per ogni $m \in \mathcal{M}_n$ è $m \leq \ell$, ℓ è il massimo di $\mathcal{M}_n$.
In modo analogo si dimostra che l'insieme dei maggioranti di un sottoinsieme limitato superiormente ha minimo. □

In virtù della proposizione precedente si dà allora la seguente

Definizione 1.5. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto. Se A è limitato inferiormente si chiama *estremo inferiore di* A il massimo dei minoranti di A e si indica con $\inf A$.
Se A è limitato superiormente si chiama *estremo superiore di* A il minimo dei maggioranti di A e si indica con $\sup A$.

Proposizione 1.2. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto. Se A è limitato inferiormente allora l'estremo inferiore gode delle seguenti proprietà:*

(i) *per ogni $a \in A$ è $\inf A \leq a$,*
(ii) *per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $\inf A < x$ esiste $a_x \in A$ tale che*

$$\inf A \leq a_x < x \ .$$

In modo analogo, se A è limitato superiormente allora l'estremo superiore gode delle seguenti proprietà:

(i') *per ogni $a \in A$ è $a \leq \sup A$,*
(ii') *per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x < \sup A$ esiste $a_x \in A$ tale che*

$$x < a_x \leq \sup A \ .$$

[1] Si chiama *sezione* di $\mathbb{R}$ una coppia (X, Y) di sottoinsiemi non vuoti $X, Y \subset \mathbb{R}$ tali che 1) $X \cup Y = \mathbb{R}$, 2) $X \cap Y = \emptyset$, 3) per ogni $x \in X$ e per ogni $y \in Y$ è $x < y$. Si dimostra che esiste unico un elemento $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq \ell \leq y$ per ogni $x \in X$ e per ogni $y \in Y$. L'elemento ℓ è detto *elemento separatore* della sezione (X, Y). È ovvio che è o $\ell \in X$ o $\ell \in Y$ (di cui ne vale una sola).

Dimostrazione. La (i) e la (i') rispettivamente equivalgono a dire che $\inf A$ è un minorante di A e $\sup A$ è un maggiorante di A. La (ii) e la (ii') affermano rispettivamente che nessun numero reale maggiore dell'estremo inferiore può essere un minorante di A e nessun numero reale minore dell'estremo superiore può essere un maggiorante di A. $\square$

Un modo equivalente di enunciare le (ii) e (ii') della Proposizione 1.2 è il seguente:

(ii_1) per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, esiste $a_\varepsilon \in A$ tale che
$$\inf A \leq a_\varepsilon < \inf A + \varepsilon \, .$$

e

(ii'_1) per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, esiste $a_\varepsilon \in A$ tale che
$$\sup A - \varepsilon < a_\varepsilon \leq \sup A \, .$$

Se A non è limitato inferiormente, si pone
$$\inf A := -\infty$$
mentre se A non è limitato superiormente si pone
$$\sup A := +\infty \, .$$
È ovvio allora che $\inf \mathbb{R} = -\infty$ e $\sup \mathbb{R} = +\infty$. Per convenzione si pone $\inf \emptyset = +\infty$ e $\sup \emptyset = -\infty$.

2. Lo spazio topologico $\mathbb{R}$

Definizione 2.1. In $\mathbb{R}$ si chiama *distanza euclidea* la funzione $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$d(x, y) := |x - y| \quad , \quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \, .$$
Dalle proprietà del valore assoluto segue che

(1) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$,

(2) per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) = d(y, x)$,

(3) per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

L'ultima disuguaglianza si chiama *disuguaglianza triangolare*.

Definizione 2.2. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si chiama *intorno* (*sferico*) di centro x_0 e raggio r l'insieme
$$I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\}$$
ovvero l'insieme
$$I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} \, .$$
Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è un sottoinsieme non vuoto,

Definizione 2.3. Un punto $x_0 \in A$ si dice un *punto interno di* A se esiste un intorno $I(x_0, r)$ per cui sia $I(x_0, r) \subset A$.

L'insieme dei punti interni di un sottoinsieme A si chiama *interno* di A e si indica con $\overset{\circ}{A}$. Dalla definizione è chiaro che $\overset{\circ}{A} \subseteq A$.

Definizione 2.4. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice *aperto* se $A = \emptyset$ oppure se ogni punto $x_0 \in A$ è un punto interno di A.

È ovvio quindi che un sottoinsieme $A \neq \emptyset$ è aperto se e solo se per ogni $x_0 \in A$ esiste un intorno $I(x_0, r)$ per cui sia $I(x_0, r) \subset A$ e dunque se e solo se $\overset{\circ}{A} = A$.

Proposizione 2.1. *Valgono i seguenti fatti:*

(a) *L'insieme vuoto e $\mathbb{R}$ sono aperti.*

(b) *L'unione di sottoinsiemi aperti è un sottoinsieme aperto.*

(c) *L'intersezione di un numero finito di sottoinsiemi aperti è un sottoinsieme aperto.*

Dimostrazione. La (a) segue immediatamente dalla definizione e dal fatto che, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, è $I(x_0, r) \subset \mathbb{R}$.

Per la (b) sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi aperti. Se $x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$ allora esiste $i_0 \in I$ tale che $x_0 \in A_{i_0}$. Poiché A_{i_0} è aperto, esiste un intorno $I(x_0, r_{i_0})$ tale che $I(x_0, r_{i_0}) \subset A_{i_0}$. Allora è anche $I(x_0, r_{i_0}) \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, da cui segue l'asserto.

Per la (c) siano $A_1, \cdots, A_m$ un numero finito m di aperti e sia $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i$. Allora $x_0 \in A_i$ per ogni $i = 1, \cdots, m$ e poichè questi sono aperti si ha che per ogni $i = 1, \cdots, m$ esiste un intorno $I(x_0, r_i)$ tale che $I(x_0, r_i) \subset A_i$. Si ponga $r_0 = \min\{r_1, \cdots, r_m\}$. È allora chiaro che $I(x, r_0) \subset I(x_0, r_i) \subset A_i$, per ogni $i = 1, \cdots, m$, e pertanto $I(x_0, r_0) \subset \bigcap_{i=1}^{m} A_i$.

□

Osservazione 2.1. La (c) della proposizione precedente è falsa se si considera l'intersezione di infiniti sottoinsiemi aperti. Infatti se ad esempio $A_n = (-\frac{1}{n}, 1)$, per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, allora $\bigcap_{n \geq 1} A_n = [0, 1)$ che non è aperto: infatti 0 non è un punto interno a $[0, 1)$.

La famiglia di sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}$ così definiti determina una *topologia di* $\mathbb{R}$ detta la *topologia euclidea di* $\mathbb{R}$.

Definizione 2.5. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$; un *ricoprimento aperto di* A è una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ di sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}$ tale che

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \,.$$

Definizione 2.6. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice *chiuso* se il suo complementare è aperto.

Proposizione 2.2. *Valgono i seguenti fatti:*

(a) *L'insieme vuoto e $\mathbb{R}$ sono chiusi.*

(b) *L'intersezione di sottoinsiemi chiusi è un sottoinsieme chiuso.*

(c) *L'unione di un numero finito di sottoinsiemi chiusi è un sottoinsieme chiuso.*

Dimostrazione. Poiché $\emptyset = \mathbb{R}^C$, $\mathbb{R} = \emptyset^C$, la (a) è ovvia dalla proprietà degli aperti.

Per la (b) se $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di sottoinsiemi chiusi allora $(\bigcap_{i \in I} A_i)^C = \bigcup_{i \in I} A_i^C$, dove A_i^C è un sottoinsieme aperto (perché A_i è un sottoinsieme chiuso) e l'asserto segue dalla (b) della Proposizione 2.1.

Per la (c) se $A_1, \cdots, A_m$ sono sottoinsiemi chiusi allora $(\bigcup_{i=1}^{m} A_i)^C = \bigcap_{i=1}^{m} A_i^C$, dove A_i^C è un insieme aperto e dunque dalla (c) della Proposizione 2.1 segue l'asserto. □

Osservazione 2.2. La (c) della proposizione precedente è falsa se si considera l'unione di infiniti sottoinsiemi chiusi. Infatti se $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$, per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, allora $\bigcup_{n\geq 1} A_n = (0, 1]$ che non è chiuso (il suo complementare $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ non è aperto).

Definizione 2.7. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto. Un punto $x_0 \in A$ si dice *isolato* se esiste un intorno $I(x_0, r)$ per cui sia $I(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$.

Ad esempio $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono costituiti solo da punti isolati.

Definizione 2.8. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice un *punto di accumulazione* per A se per ogni intorno $I(x_0, r)$ si ha $(I(x_0, r) \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

Osservazione 2.3. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione per A allora ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di A distinti da x_0.
Infatti se per assurdo si assume che esista un intorno $I(x_0, r)$ per cui $(I(x_0, r) \cap A) \setminus \{x_0\}$ contenga solo un numero finito $\{a_1, \cdots, a_m\}$ di punti di A allora, posto $r_0 = \min\{|a_1 - x_0|, \cdots, |a_m - x_0|\}$, si ha che $I(x_0, r_0) \cap A = \{x_0\}$ se $x_0 \in A$, mentre $I(x_0, r_0) \cap A = \emptyset$ se $x_0 \notin A$. In ogni caso $(I(x_0, r_0) \cap A) \setminus \{x_0\} = \emptyset$ che contraddice il fatto che x_0 sia un punto di accumulazione per A.

L'insieme dei punti di accumulazione di A si chiama il *derivato* di A e si indica con A'.

Proposizione 2.3. *Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso se e solo se $A' \subseteq A$.*

Dimostrazione. Sia A chiuso e sia $x_0 \in A'$. Si supponga per assurdo che $x_0 \notin A$, allora è $x_0 \in A^C$ che è aperto, dunque esiste un intorno $I(x_0, r)$ tale che $I(x_0, r) \subset A^C$. Allora $I(x_0, r) \cap A = \emptyset$ e quindi a maggior ragione $(I(x_0, r) \cap A) \setminus \{x_0\} = \emptyset$. Questo è assurdo perché x_0 è un punto di accumulazione.
Viceversa sia $A' \subseteq A$ e sia $x_0 \in A^C$. Allora $x_0 \notin A$ e dunque è anche $x_0 \notin A'$. Pertanto esiste un intorno $I(x_0, r)$ per cui $(I(x_0, r) \cap A) \setminus \{x_0\} = \emptyset$; siccome $x_0 \notin A$, è $I(x_0, r) \cap A = (I(x_0, r) \cap A) \setminus \{x_0\} = \emptyset$. Da questo segue che $I(x_0, r) \subset A^C$. Dall'arbitrarietà della scelta di $x_0 \in A^C$ si ha che A^C è aperto, ovvero che A è chiuso. □

Definizione 2.9. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si chiama *chiusura* di A l'intersezione di tutti i chiusi di $\mathbb{R}$ contenenti A; essa si indica con $\overline{A}$.

Quindi

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso} \\ C \supseteq A}} C$$

Dalle proprietà dei chiusi segue che $\overline{A}$ è un insieme chiuso ed è quindi il più piccolo insieme chiuso contenente A. È facile inoltre verificare che A è chiuso se e solo se $A = \overline{A}$.

Proposizione 2.4. $\overline{A} = A \cup A'$.

Dimostrazione. Proviamo dapprima che $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. Poiché $A \subset A \cup A'$, basta dimostrare che $A \cup A'$ è chiuso ovvero che $(A \cup A')^C = A^C \cap A'^C$ è aperto. Sia $x_0 \in A^C \cap A'^C$, allora $x_0 \in A^C$ e $x_0 \in {A'}^C$. Dunque $x_0 \notin A$ e $x_0 \notin A'$. Questo implica che esiste un intorno $I(x_0, r_0)$ tale che $\big(I(x_0, r_0) \cap A\big) \setminus \{x_0\} = \emptyset$ ed essendo $x_0 \notin A$, è $I(x_0, r_0) \cap A = \emptyset$. Allora $I(x_0, r_0) \subset A^C$. Dimostriamo che tale intorno è contenuto anche in ${A'}^C$. Per assurdo supponiamo che ciò non sia vero e sia $y_0 \in I(x_0, r_0)$ con $y_0 \notin {A'}^C$. Allora $y_0 \in A'$. Prendiamo $d = r_0 - |y_0 - x_0|$: deve essere $\big(I(y_0, d) \cap A\big) \setminus \{y_0\} \neq \emptyset$. Tuttavia se $x \in I(y_0, d)$ si ha

$$|x - x_0| \leq |x - y_0| + |y_0 - x_0| = d + |y_0 - x_0| = r_0 - |y_0 - x_0| + |y_0 - x_0| = r_0$$

i.e. $x \in I(x_0, r_0)$. Perciò $I(y_0, d) \subset I(x_0, r_0)$ da cui $\big(I(y_0, d) \cap A\big) \setminus \{y_0\} \subset \big(I(x_0, r_0) \cap A\big) \setminus \{y_0\} \subset I(x_0, r_0) \cap A = \emptyset$. Assurdo. Dunque $I(x_0, r_0) \subset {A'}^C$. In conclusione $I(x_0, r_0) \subset A^C \cap {A'}^C$ e questo prova che tale intersezione è un insieme aperto.
Proviamo adesso che $A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Infatti se $x_0 \in A \cup A'$ allora o $x_0 \in A$ o $x_0 \in A'$; nel primo caso è ovvio che $x_0 \in \overline{A}$, nel secondo caso se $x_0 \in A'$, allora per ogni intorno $I(x_0, r)$ è $\big(I(x_0, r) \cap A\big) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. Quindi se C è un chiuso contenente A, allora per ogni intorno $I(x_0, r)$ è $\emptyset \neq \big(I(x_0, r) \cap A\big) \setminus \{x_0\} \subset \big(I(x_0, r) \cap C\big) \setminus \{x_0\}$, cioè $x_0 \in C'$. Essendo C chiuso, $C' \subseteq C$. Ne segue che $x_0 \in C$ per ogni chiuso C contenente A ovvero $x_0 \in \overline{A}$.
In ogni caso abbiamo provato che se $x_0 \in A \cup A'$ allora $x_0 \in \overline{A}$. $\square$

Definizione 2.10. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto. Si dice che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un *punto frontiera* di A (o *punto di bordo* di A) se per ogni intorno $I(x_0, r)$ è $I(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$, $I(x_0, r) \cap A^C \neq \emptyset$.

L'insieme dei punti frontiera di A si chiama *frontiera* o *bordo di* A e si indica con ∂A. Dalla definizione segue che

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^C} \ .$$

Ad esempio per gli intervalli $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) i punti a, b sono punti frontiera. Per $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ i punti frontiera sono 0 e tutti i punti di A.

Definizione 2.11. Un sottoinsieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice *infinito* se contiene infiniti punti.

Si ha il seguente:

Teorema 2.1 (di Bolzano-Weierstrass). *Ogni insieme limitato e infinito ha almeno un punto di accumulazione.*

Definizione 2.12. Un sottoinsieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ si dice *compatto* se da ogni ricoprimento aperto di A si può estrarre un sottoricoprimento finito.

Cioè se per ogni famiglia di aperti $\{A_i\}_{i \in I}$ per cui $A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ esiste un numero finito $A_1, \cdots, A_m$ scelti tra gli A_i tali che $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} A_k$.

Esempio 2.1. Per ogni a, $b \in \mathbb{R}$, l'intervallo (a, b) non è compatto.
Infatti la famiglia di aperti

$$A_n = (a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}) \ \ , \ \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ ,$$

costituisce un ricoprimento aperto di (a, b). Tuttavia nessuna scelta di un numero finito di essi basta a ricoprire (a, b).
Questo non accade per il chiuso $[a, b]$ perché la famiglia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ sopra descritta non è un ricoprimento di $[a, b]$.

Vale il seguente

Teorema 2.2 (di Heine-Borel). *I sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli i sottoinsiemi limitati e chiusi.*

Sia $A \subset \mathbb{R}$. Un sottoinsieme $B \subseteq A$ si dice *aperto relativamente ad* A se esiste un aperto $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}$ tale che $B = \mathcal{B} \cap A$.
• Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice *connesso* se è vuoto oppure, se $A \neq \emptyset$, non esistono due sottoinsiemi B e C non vuoti, aperti relativamente ad A tali che $A = B \cup C$ e $B \cap C = \emptyset$.
• Un sottoinsieme che sia connesso ed aperto si chiama *regione* o *dominio* (di $\mathbb{R}$).
Si dimostra che

Teorema 2.3. *I sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ connessi sono tutti e soli gli intervalli.*

Osservazione 2.4. Se un sottoinsieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$ è connesso allora l'intervallo $(\inf A, \sup A)$ è contenuto in A.
Infatti se $\inf A = a > -\infty$ e $\sup A = b < +\infty$, dalle proprietà degli estremi di un insieme, per ogni $x \in (a, b)$ esistono $a'_x, a''_x \in A$ tali che $a \leq a'_x < x < a''_x \leq b$, cioè $x \in (a'_x, a''_x) \subset [a'_x, a''_x]$. Poiché A è connesso (i.e. A è un intervallo), è $[a'_x, a''_x] \subseteq A$ e dunque $x \in A$. Se invece $\inf A = -\infty$ e $\sup A = b < +\infty$, allora per ogni $x \in (-\infty, b)$ esistono $a'_x, a''_x \in A$ tali che $a'_x < x$ e $x < a''_x \leq b$. Ancora è $x \in [a'_x, a''_x] \subset A$. In modo analogo si procede se $\inf A > -\infty$ e $\sup A = +\infty$, oppure se $\inf A = -\infty$ e $\sup A = +\infty$.

II - Successioni e serie di numeri reali

Il concetto di successione è tra i più importanti nell'analisi matematica. Esso aiuta ad introdurre e meglio capire il concetto di limite di una funzione (del quale tratteremo più avanti). Qui si studiano soltanto le successioni di numeri reali e si espongono i risultati più elementari. Inoltre si accenna brevemente alle serie numeriche reali (ovvero particolari successioni di numeri reali i cui termini sono somme finite di numeri reali) e se ne danno i criteri di convergenza più semplici ed usati.

3. Successioni convergenti

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.

• Si chiama *successione a valori in* A, o più semplicemente *successione di* A, una funzione $a : \mathbb{N} \to A$, dove si indica $a_n := a(n) \in A$.

Brevemente una successione si indica elencando le sue immagini cioè con

$$\{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$$

oppure più semplicemente con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Esempio 3.1. Sono successioni quelle definite ad esempio da

$$a_n = n \ , \ a_n = (-1)^n \ , \ a_n = \frac{n^2}{n^2+1} \ , \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

$$a_n = \frac{1}{n} \ , \ a_n = \log n \ , \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ .$$

Definizione 3.1. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in A. Si dice che il *limite* della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, per n tendente all'infinito, è $\ell \in \mathbb{R}$ e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$

se per ogni intorno $I(\ell, \varepsilon)$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, sia $a_n \in I(\ell, \varepsilon)$.

Questo equivale ad avere che:

$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tale che* $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, $\Longrightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$.

La definizione ci dice anche che per ogni $\varepsilon > 0$ solo un numero finito di a_n non appartiene a $I(\ell, \varepsilon)$.

Esempio 3.2. Ad esempio per le successioni

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \ , \ \left\{\frac{n^2}{n^2+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ , \ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \ .$$

Infatti per la prima successione, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad se \;\; n > \frac{1}{\varepsilon}\,;$$

basterà allora prendere $n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, dove $[\cdot]$ indica la *parte intera* di un numero reale[2].
Analogamente per la seconda successione si ha

$$\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \quad se \;\; n^2+1 > \frac{1}{\varepsilon}\,,$$

cioè per $n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Se $\varepsilon \geq 1$ allora $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \leq 0$ e dunque $n^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ è soddisfatta per ogni $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$; se $\varepsilon < 1$ allora $\frac{1}{\varepsilon} - 1 > 0$ e basterà prendere $n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon} - 1] + 1$.

Osservazione 3.1. Ci sono successioni che non hanno limite. Ad esempio la successione

$$\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

non ha limite in $\mathbb{R}$.
Infatti se n è pari, a_n (che vale 1) appartiene banalmente ad un qualsiasi intorno di 1, mentre se n è dispari, a_n (che vale -1) appartiene banalmente ad un qualsiasi intorno di -1.

Proposizione 3.1 (dell'unicità del limite). *Se il limite di una successione esiste allora esso è unico.*

Dimostrazione. Si supponga per assurdo che esistano due limiti distinti ℓ_1 e ℓ_2: in un qualsiasi intorno di ciascuno di essi ci sono infiniti a_n.
Si prenda $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2} > 0$. Allora $I(\ell_1, \varepsilon) \cap I(\ell_2, \varepsilon) = \emptyset$ e quindi $I(\ell_2, \varepsilon) \subset I(\ell_1, \varepsilon)^C$.
In $I(\ell_1, \varepsilon)^C$ c'è soltanto un numero finito di a_n, quindi in $I(\ell_2, \varepsilon)$ ci sarebbe solo un numero finito di a_n: questo contraddirebbe quanto detto all'inizio della dimostrazione. □

Proposizione 3.2. *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ *allora* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\ell|$.

Dimostrazione. Dalla definizione di $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$ si abbia $|a_n - \ell| < \varepsilon$. L'asserto allora segue da $||a_n| - |\ell|| \leq |a_n - \ell|$. □

Definizione 3.2. Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *limitata inferiormente* se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \geq M$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *limitata superiormente* se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \leq M$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *limitata* se è limitata inferiormente e superiormente.

Se una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata inferiormente allora

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\} > -\infty\,,$$

[2] Sia $x \in \mathbb{R}$. Si chiama *parte intera* di x il più grande $m \in \mathbb{Z}$ per cui $m \leq x$; si indica $m =: [x]$.

mentre se è limitata superiormente allora

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\} < +\infty \ .$$

Se una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata esiste $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$, tale che

$$|a_n| \leq L \ ,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 3.3. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto. Una successione *convergente in* A è una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in A per cui esiste finito il limite ℓ ed esso appartiene ad A.

È ovvio che se una successione ha limite (finito) $\ell \in \mathbb{R}$ allora essa è una successione convergente in $\mathbb{R}$.

Proposizione 3.3. *Una successione convergente in un sottoinsieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitata.*

Dimostrazione. Sia $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in A$; per $\varepsilon = 1$ esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$, si abbia $||a_n| - |\ell|| \leq |a_n - \ell| < 1$ da cui segue $|a_n| < 1 + |\ell|$. Si prenda $L = \max\{|a_0|, \cdots, |a_{n_1}|, 1 + |\ell|\}$, allora $|a_n| \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Si osservi che il viceversa di tale proposizione è falso: ad esempio la successione $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata ma non è convergente (in $\mathbb{R}$).

Proposizione 3.4. *Se $a_n \neq 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$, $\ell \neq 0$, allora $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata.*

Dimostrazione. Dalla definizione di limite segue che per $\varepsilon = \dfrac{|\ell|}{2}$ esiste $n_\ell \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\ell$, si abbia

$$||a_n| - |\ell|| \leq |a_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$$

da cui segue $|a_n| > \dfrac{|\ell|}{2}$ che dà $\dfrac{1}{|a_n|} < \dfrac{2}{|\ell|}$ per $n > n_\ell$.

Si prenda allora $L = \max\{\dfrac{1}{|a_0|}, \cdots, \dfrac{1}{|a_{n_\ell}|}, \dfrac{2}{|\ell|}\}$ per avere

$$\frac{1}{|a_n|} \leq L \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \ .$$

□

Teorema 3.1 (della permanenza del segno). *Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$, $\ell > 0$ (rispettivamente $\ell < 0$), allora $a_n > 0$ (rispettivamente $a_n < 0$) per infiniti $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Si prenda $\varepsilon = |\ell|$: esisterà $n_\ell \in \mathbb{N}$ tale che per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\ell$, sia $|a_n - \ell| < |\ell|$. Se $\ell > 0$ allora $|\ell| = \ell$ e da $|a_n - \ell| < \ell$ segue $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\ell$. Se invece $\ell < 0$ allora $|\ell| = -\ell$ e da $|a_n - \ell| < -\ell$ segue $a_n < 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\ell$. □

Osservazione 3.2. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, $\ell > L$ (rispettivamente $\ell < L$) allora $a_n > L$ (rispettivamente $a_n < L$) per infiniti $n \in \mathbb{N}$.
Infatti se è $\ell > L$, scelto $\varepsilon = \ell - L$ esiste $n_{\ell,L} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_{\ell,L}$, sia $|a_n - \ell| < \ell - L$; da questa segue $a_n > L$ per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_{\ell,L}$. Se invece $\ell < L$ si ripete il ragionamento per $\varepsilon = L - \ell$.

Teorema 3.2 (dei due carabinieri). *Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tre successioni a valori in un sottoinsieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$ per cui esista $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \le b_n \le c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$ allora anche $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$.*

Dimostrazione. Sia $I(\ell, \varepsilon)$ un qualsiasi intorno di ℓ: allora esistono n'_ε, $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tali che per $n \in \mathbb{N}$, $n > n'_\varepsilon$, si abbia $|a_n - \ell| < \varepsilon$ e per $n \in \mathbb{N}$, $n > n''_\varepsilon$, si abbia $|c_n - \ell| < \varepsilon$. Per $n > n_\varepsilon$, con $n_\varepsilon = \max\{n_0, n'_\varepsilon,\ n''_\varepsilon\}$, valgono tutte le disuguaglianze scritte e perciò si avrà:

$$\ell - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < \ell + \varepsilon\ .$$

Questo implica $|b_n - \ell| < \varepsilon$, per $n > n_\varepsilon$, cioè che $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$. □

Rispetto alle operazioni tra successioni convergenti si hanno le seguenti relazioni:

Proposizione 3.5. *Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni convergenti. Allora*

(a) *Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$;*

(b) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$*;*

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$.

(d) *Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ è $b_n \neq 0$ allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} & , \quad \textit{se} \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0\ , \\ \infty & , \quad \textit{se} \ \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0\ , \\ \textit{si presenta nella forma} & \\ \textit{indeterminata} \ \text{“}\dfrac{0}{0}\text{”} & , \quad \textit{se} \ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0\ . \end{cases}$$

Dimostrazione. Nel caso $\lambda = 0$ la (a) è banalmente verificata perché se $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$ allora $\lambda \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \cdot \ell = 0$, mentre la successione $\{\lambda a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è la successione nulla, dunque il suo limite è 0. Sia dunque $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$; allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tale che, per $n > n_\varepsilon$, si abbia $|a_n - \ell| < \varepsilon/|\lambda|$. Ne segue che, per $n > n_\varepsilon$, è:

$$|\lambda a_n - \lambda \ell| = |\lambda||a_n - \ell| < \varepsilon$$

e questo prova (a).
Sia $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell'$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per $n \in \mathbb{N}$, $n > n'_\varepsilon$, si abbia $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Allo stesso modo esiste $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per $n \in \mathbb{N}$, $n > n''_\varepsilon$, si abbia $|b_n - \ell'| < \varepsilon$. Dunque se $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon,\ n''_\varepsilon\}$ allora per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, si ha:

$$|a_n + b_n - (\ell + \ell')| \le |a_n - \ell| + |b_n - \ell'| < \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon\ ,$$

e dall'arbitrarietà di ε si ha l'asserto (b). Si ha anche:

$$|a_n b_n - \ell\ell'| = |a_n b_n - a_n\ell' + a_n\ell' - \ell\ell'| \leq |a_n b_n - a_n\ell'| + |a_n\ell' - \ell\ell'| =$$

$$= |a_n|\,|b_n - \ell'| + |\ell'|\,|a_n - \ell| < (L + |\ell'|)\varepsilon$$

dove, essendo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata, è $|a_n| \leq L$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per qualche costante $L \geq 0$. Dall'arbitrarietà di ε segue l'asserto (c).

Proviamo ora il primo asserto di (d). Poiché $\{\frac{1}{b_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata, esiste una costante non negativa $M \in \mathbb{R}$ per cui sia $\left|\frac{1}{b_n}\right| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; allora

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{\ell}{\ell'}\right| = \left|\frac{a_n\ell' - \ell b_n}{b_n\ell'}\right| = \left|\frac{a_n\ell' - \ell\ell' + \ell\ell' - \ell b_n}{b_n\ell'}\right| \leq \frac{|\ell'|\,|a_n - \ell|}{|b_n|\,|\ell'|} + \frac{|\ell|\,|b_n - \ell'|}{|b_n|\,|\ell'|} \leq$$

$$\leq M\left(|a_n - \ell| + \frac{|\ell|}{|\ell'|}\,|b_n - \ell'|\right) < M\left(1 + \frac{|\ell|}{|\ell'|}\right)\varepsilon\ .$$

Dall'arbitrarietà di ε si ha l'asserto. □

4. Successioni divergenti

Definizione 4.1. Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge a* $+\infty$ o ha *limite* $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

se per ogni $K > 0$ esiste $n_K \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_K$, si abbia $a_n > K$.
Una successione *diverge a* $-\infty$ o ha *limite* $-\infty$ e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

se per ogni $K > 0$ esiste $n_K \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_K$, si abbia $a_n < -K$.
Una successione *diverge* o ha *limite* ∞ e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

se per ogni $K > 0$ esiste $n_K \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_K$, si abbia $|a_n| > K$.

Esempio 4.1. Ad esempio sono successioni divergenti (a $+\infty$) le successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ per $a_n = n$ e $a_n = a^n$ per $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.
Infatti $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ perché $\forall\ K > 0$ si ha $n > K$ per $n > n_K$ con $n_K = [K] + 1$.
Analogamente $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ perché $\forall\ K > 0$ si ha $a^n > K$ per $n > \log_a K$: dunque basta scegliere $n_K = [\log_a K] + 1$.

Per quanto riguarda le operazioni tra successioni divergenti e convergenti si ha la seguente

Proposizione 4.1. *Siano* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *due successioni.*

(a) *Se* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge a* $\pm\infty$ *allora*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \begin{cases} \mp\infty & , \quad se\ \ \lambda < 0 \\ \pm\infty & , \quad se\ \ \lambda > 0\ . \end{cases}$$

(b) *Se le due successioni sono divergenti a* $+\infty$ *allora*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty\\
&\lim_{n\to\infty}a_nb_n=+\infty\\
&\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\quad \textit{si presenta nella forma indeterminata } \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\,.
\end{aligned}$$

(c) *Se le due successioni sono divergenti a* $-\infty$ *allora*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=-\infty\\
&\lim_{n\to\infty}a_nb_n=+\infty\\
&\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\quad \textit{si presenta nella forma indeterminata } \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\,.
\end{aligned}$$

(d) *Se* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge a* $\pm\infty$ *e* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ad* ℓ *allora*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\pm\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\begin{cases}+\infty & \textit{se}\quad \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty & e\ \ \ell>0\\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty & e\ \ \ell<0\end{cases}\\[2ex] -\infty & \textit{se}\quad \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty & e\ \ \ell<0\\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty & e\ \ \ell>0\end{cases}\end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n$ *si presenta nella forma indeterminata “*$\infty\cdot 0$*” se* $\ell=0$.

Se $b_n\neq 0$ *allora*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases}+\infty & \textit{se}\quad \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty & e\ \ \ell>0\\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty & e\ \ \ell<0\end{cases}\\[2ex] -\infty & \textit{se}\quad \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty & e\ \ \ell<0\\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty & e\ \ \ell>0\end{cases}\\[2ex] \infty & \textit{se}\quad \ell=0\,.\end{cases}$$

(e) *Se* $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$ *e* $\lim_{n\to\infty}b_n=-\infty$ *allora*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\qquad \textit{si presenta nella forma indeterminata } \text{“}\infty-\infty\text{”}\\
&\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-\infty\\
&\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\qquad \textit{si presenta nella forma indeterminata } \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\,.
\end{aligned}$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio al lettore.

5. Successioni monotòne

Definizione 5.1. Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *monotòna decrescente* (rispettivamente *monotòna strettamente decrescente*) se per ogni $n \in \mathbb{N}$ è $a_{n+1} \leq a_n$ (rispettivamente $a_{n+1} < a_n$).
Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *monotòna crescente* (rispettivamente *monotòna strettamente crescente*) se per ogni $n \in \mathbb{N}$ è $a_n \leq a_{n+1}$ (rispettivamente $a_n < a_{n+1}$).

Esempio 5.1. La successione definita da $a_n = \dfrac{1}{n}$ è (monotòna) strettamente decrescente, mentre la successione definita da $a_n = n$ è (monotòna) strettamente crescente. Fissato $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}$ definita da

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{m} & \text{se } \ m \leq n \leq 2m \\ \dfrac{1}{n} & \text{se } \ 1 \leq n < m \ \text{ o } \ n > 2m \end{cases}$$

è (monotòna) decrescente. Analogamente, fissato $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ data da

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \ n = 0 \\ m & \text{se } \ m \leq n \leq 2m \\ n & \text{se } \ 1 \leq n < m \ \text{ o } \ n > 2m \end{cases}$$

è (monotòna) crescente.

Proposizione 5.1. *Per ogni successione monotòna esiste il limite e si ha:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\} \ \textit{se } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ è decrescente o strettamente decrescente},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\} \ \textit{se } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ è crescente o strettamente crescente}\,.$$

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente. Si supponga dapprima che $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\} = -\infty$; allora la successione non è limitata inferiormente e quindi per ogni $K > 0$ esiste $n_K \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_K} < -K$. Pertanto per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_K$, è $a_n \leq a_{n_K} < -K$, dunque $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
Si supponga ora che $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\} = \ell > -\infty$; dalla definizione di estremo inferiore, comunque si scelga $n \in \mathbb{N}$ è $a_n \geq \ell$ da cui $a_n > \ell - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Siccome poi $\ell + \varepsilon$ non è un minorante, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_\varepsilon} < \ell + \varepsilon$ e per ogni $n > n_\varepsilon$ si ha $a_n \leq a_{n_\varepsilon} < \ell + \varepsilon$. Quindi per ogni $n > n_\varepsilon$ è $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$: questo implica che $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.
La dimostrazione è analoga se la successione è strettamente decrescente, tenuto conto del fatto che stavolta $a_n < a_m$ se $n > m$.
Allo stesso modo si procede se la successione è crescente o strettamente crescente.

□

6. Sottosuccessioni

Definizione 6.1. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Una successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una *sottosuccessione* estratta dalla successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se esiste una successione strettamente crescente $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tale che $b_n = a_{k_n}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 6.1. Le successioni $\{\frac{1}{2n}\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ e $\{\frac{1}{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono sottosuccessioni della successione $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.

Infatti la prima corrisponde alla scelta della successione strettamente crescente di naturali $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, $k_n = 2n$, (i.e. posto $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{2n}$ si ha $a_{k_n} = \frac{1}{k_n} = \frac{1}{2n} =$ b_n) mentre la seconda corrisponde alla scelta di $k_n = 2n + 1$.

Invece la successione $\{\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \cdots\}$ non è una sottosuccessione di $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$. Infatti si avrebbe

$$\begin{array}{lcl}
b_0 = \frac{1}{2} = a_{k_0} = a_2 & \Longrightarrow & k_0 = 2\ , \\
b_1 = \frac{1}{2} = a_{k_1} = a_2 & \Longrightarrow & k_1 = 2\ , \\
b_2 = \frac{1}{2} = a_{k_2} = a_2 & \Longrightarrow & k_2 =\ , \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
b_n = \frac{1}{2} = a_{k_n} = a_2 & \Longrightarrow & k_n = 2\ .
\end{array}$$

Pertanto la successione $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sarebbe la successione stazionaria $\{2,\ 2,\ 2,\ \cdots\}$.

Osservazione 6.1.

$$\lim_{n\to\infty} k_n = +\infty\ .$$

Infatti se per assurdo esistesse un numero reale (non negativo) ℓ per cui $\lim_{n\to\infty} k_n = \ell$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esisterebbe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, si avrebbe $\ell-\varepsilon < k_n < \ell+\varepsilon$. Inoltre sarebbe $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{k_n\} < +\infty$ e poiché $k_{n+1} \geq k_n+1$ (i k_n sono naturali e $k_{n+1} > k_n$), si avrebbe

$\ell - \varepsilon < k_n < k_n + 1 \leq k_{n+1} < \ell + \varepsilon$ per $n > n_\varepsilon$. Quindi

$$(\ell - 1) - \varepsilon < k_n < (\ell - 1) + \varepsilon$$

cioè $\lim_{n\to\infty} k_n = \ell - 1$: questo è assurdo per l'unicità del limite.

Si dimostra che

Proposizione 6.1. *Per ogni sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ estratta da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si ha:*

(1) *se $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ allora $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \ell$,*

(2) *se $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ allora $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \pm\infty$.*

Inoltre vale il seguente importante risultato:

Teorema 6.1 (di Weierstrass). *In $\mathbb{R}$ da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente.*

Il significato di questo teorema è che in generale se abbiamo una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in un sottoinsieme (non vuoto) $A \subset \mathbb{R}$, limitata, non è detto che sia possibile estrarre da essa una sottosuccessione convergente in A, mentre di sicuro dalla medesima successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, considerata come successione in $\mathbb{R}$, è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in $\mathbb{R}$.

7. Successioni di Cauchy

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ una successione di numeri reali; si dice che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica alla *condizione di Cauchy* se

(7.1) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \in \mathbb{N},\ n, m > n_\varepsilon$, *si abbia:*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \ .$$

Una successione che verifica la (7.1) si dice una *successione di Cauchy* (in A). Questo equivale anche a dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m \in \mathbb{N}$ e ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, si abbia

$$|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon \ .$$

Proposizione 7.1. *Ogni successione di Cauchy è una successione limitata.*

Dimostrazione. Dalla condizione di Cauchy (7.1) per $\varepsilon = 1$, si ha che esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che per $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > n_1$, si abbia $|a_n - a_m| < 1$. In particolare questo vale per $m = n_1 + 1$. Ne segue che $|a_n| < 1 + |a_{n_1+1}|$ per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$. Se allora si prende $L = \max\{|a_0|, \cdots, |a_{n_1}|, 1 + |a_{n_1+1}|\}$ è $|a_n| \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

□

Ci sono molte successioni di Cauchy: infatti

Proposizione 7.2. *Ogni successione convergente è una successione di Cauchy.*

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in un sottoinsieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$. Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \in A$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n,\ m \in \mathbb{N}$, $n,\ m > n_\varepsilon$, si abbia $|a_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $|a_m - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Allora

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \varepsilon \ .$$

□

Il viceversa in generale non è vero, cioè non è detto che *una successione di Cauchy* (*in un sottoinsieme non vuoto* $A \subset \mathbb{R}$) *sia una successione convergente* (*in* A). Ad esempio, per ogni $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ si scelga $q_n \in \mathbb{Q}$, $q_n > 0$, tale che $|q_n - \sqrt{2}| < \dfrac{1}{n}$. La successione $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}$ così costruita è una successione in $\mathbb{Q}$ di Cauchy perché se per $\varepsilon > 0$ è $n_\varepsilon = [\dfrac{2}{\varepsilon}] + 1$, allora per $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > n_\varepsilon$ si ha

$$|q_n - q_m| \leq |q_n - \sqrt{2}| + |q_m - \sqrt{2}| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

Tuttavia $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *non converge in* $\mathbb{Q}$. Si noti invece che *essa converge in* $\mathbb{R}$ *a* $\sqrt{2}$ (e ovviamente è una successione di Cauchy).

Proposizione 7.3. *In* $\mathbb{R}$ *ogni successione di Cauchy è una successione convergente.*

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di Cauchy: essa è limitata. Dal Teorema di Weierstrass 6.1, da essa si può estrarre una sottosuccessione convergente: sia questa $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$. Dalla condizione di Cauchy (7.1), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > n'_\varepsilon$ si abbia $|a_n - a_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Inoltre in corrispondenza a n'_ε esiste $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per $n \in \mathbb{N}$, $n > n''_\varepsilon$, si abbia $k_n > n'_\varepsilon$. Dunque per $n > \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ si ha $|a_n - a_{k_n}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. D'altra parte se $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = \ell$, allora in corrispondenza allo stesso ε esiste $n'''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per $n \in \mathbb{N}$, $n > n'''_\varepsilon$, si abbia $|a_{k_n} - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Si prenda $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon, n'''_\varepsilon\} \in \mathbb{N}$; allora per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, si ha

$$|a_n - \ell| \le |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

Questo implica che la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ. □

Il fatto che in $\mathbb{R}$ ogni successione di Cauchy sia una successione convergente si esprime dicendo che lo spazio $\mathbb{R}$ è *completo* ovvero, ricorrendo alla funzione *distanza* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dicendo che lo spazio $(\mathbb{R}, d)$ è uno *spazio metrico completo.* Si osservi che in $\mathbb{R}$ le Proposizioni 7.2 e 7.3 si riassumono in un'unica proposizione nota con il nome di *criterio di Cauchy*, e precisamente

Proposizione 7.4 (Criterio di Cauchy). *Condizione necessaria e sufficiente affinché una succesione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente in $\mathbb{R}$ è che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$ e per ogni $m \in \mathbb{N}$, si abbia*

$$|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon \ .$$

Osservazione 7.1. Le successioni permettono di:

- Caratterizzare la chiusura di un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$.
  Infatti un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ appartiene alla chiusura $\overline{A}$ di A se e solo se esiste una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tale che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$.
  Come conseguenza si ottiene che un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso se e solo se ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ convergente (in $\mathbb{R}$), è convergente in A.
- Definire le potenze di base (solo positiva!) ed esponente reali.
  Infatti siano $a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$; poiché $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, si prova che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $q_n \in \mathbb{Q}$ tale che $|q_n - \alpha| < \dfrac{1}{n}$, inoltre si può sempre fare in modo che la successione $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ così costruita sia strettamente crescente ed allora $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} q_n$. Dalle proprietà delle potenze, la successione $\{a^{q_n}\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ è strettamente crescente e se $m \in \mathbb{N}$ è tale che $\alpha < m$ allora $a^{q_n} < a^m$ per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, dunque esiste finito il $\lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n}$. Se $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una qualunque altra successione di razionali (distinta da $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$) convergente ad α si prova che

$$\lim_{n\to\infty} a^{p_n} = \lim_{n\to\infty} a^{q_n} \ .$$

Dunque questo limite non dipende dalla scelta della successione di razionali convergente ad α. Pertanto si pone

$$a^\alpha := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a^{p_n} \ , & \text{se } \ a > 1 \\ \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-\alpha} \ , & \text{se } \ 0 < a < 1 \end{cases} \tag{7.2}$$

dove $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una qualunque successione di razionali convergente ad α. Si dimostra che per le potenze di base ed esponente reale valgono le stesse proprietà che valgono per le potenze di base reale ed esponente razionale.

Definizione 7.1. Un sottoinsieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice *compatto per successioni* se da ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ si può estrarre una sottosuccessione convergente in A.

Si dimostra che in $\mathbb{R}$ *i sottoinsiemi compatti per successioni sono tutti e soli i sottoinsiemi compatti.*

8. Serie numeriche

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ponga

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \ \text{ ovvero } \ s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \ . \tag{8.1}$$

Definizione 8.1. Si chiama *serie numerica* la coppia $(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ e si indica con una delle seguenti notazioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ , \ \sum_{n\geq 0} a_n \ .$$

I numeri a_n si chiamano i *termini della serie*, mentre i numeri s_n si chiamano le *somme parziali* o *ridotte n-esime della serie.*

Definizione 8.2. Si dice che la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ è *convergente* se è convergente la successione delle somme parziali $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Il numero reale $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ è detto somma della serie e si scrive $\sum_{n\geq 0} a_n = s$.

Se la successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge allora si dice che la serie *diverge*; in tal caso se la successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge allora si dice che la somma della serie è ∞ , se invece non esiste il limite della successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ allora si dice che la somma della serie è *indeterminata*. Si osservi che la notazione "$\sum_{n\geq 0} a_n$" denota sia la serie che la sua somma.

Osservazione 8.1.

(a) Sia $a \in \mathbb{R}$. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

detta *serie geometrica di ragione a*, converge per $|a| < 1$ e la sua somma è $\dfrac{1}{1-a}$, mentre diverge per $a \leq -1$ e $a \geq 1$.

Infatti per $a = 1$ è $s_n = n + 1$, per $a \neq 1$ è

$$s_n = 1 + a + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \ ,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a} & \text{se } \ |a| < 1 \\ +\infty & \text{se } \ a \geq 1 \ , \\ \text{non esiste} & \text{se } \ a \leq -1 \ . \end{cases}$$

(b) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

detta *serie armonica*, diverge.
Infatti si può dimostrare che

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

e di conseguenza $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Proposizione 8.1 (criterio di Cauchy). *Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie* $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n$ *converga è che per ogni* $\varepsilon > 0$ *esista* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tale che per ogni* $m \in \mathbb{N}$ *e per ogni* $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$ *si abbia*

$$|s_{n+m} - s_n| < \varepsilon \ .$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dal criterio di Cauchy per le successioni (cfr. Proposizione 7.4) applicato alla successione delle somme parziali $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Da esso segue immediatamente la seguente

Proposizione 8.2. *Se la serie* $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n$ *converge allora* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$; applicando il criterio di Cauchy per $m = 1$, si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$,

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon \ ,$$

dunque $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Si osservi che questa proposizione (molto utile!) ci dice che se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ allora di sicuro la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge.

9. Criteri di convergenza per le serie

Una serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ si dice a *termini non negativi* (rispettivamente *non positivi*) se $a_n \geq 0$ (rispettivamente $a_n \leq 0$); si dice a *termini positivi* (rispettivamente *negativi*) se $a_n > 0$ (rispettivamente $a_n < 0$).
Per una serie a termini non negativi si ha che $s_{n+1} = s_n + a_n \geq s_n$, dunque $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e perciò $\lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{s_n\}$. Pertanto il problema della convergenza per una serie a termini non negativi si riconduce a cercare un maggiorante per la successione delle somme parziali. Stessa cosa per le serie a termini positivi. In modo analogo la successione delle somme parziali di una serie a termini non positivi (o negativi) è decrescente e perciò $\lim_{n\to\infty} s_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{s_n\}$, dunque in tali casi si è ricondotti a cercare un minorante per la successione delle somme parziali.

Si danno ora alcuni criteri per la convergenza delle serie a termini non negativi.

Proposizione 9.1 (criterio del confronto). *Siano $\sum_{n\geq 0} a_n$ e $\sum_{n\geq 0} b_n$ due serie a termini non negativi. Si supponga che esista $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, si abbia $a_n \leq b_n$. Se la serie $\sum_{n\geq 0} b_n$ converge allora converge anche la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$; se la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge allora diverge anche la serie $\sum_{n\geq 0} b_n$.*

Dimostrazione. Siano $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ le successioni delle somme parziali rispettivamente di $\sum_{n\geq 0} a_n$ e $\sum_{n\geq 0} b_n$. Allora, per $n \geq n_0$, si ha:

$$s_n = s_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \leq s_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k = s_{n_0} + \sigma_n - \sigma_{n_0} \ .$$

Indicata con σ la somma della serie $\sum_{n\geq 0} b_n$, essendo $\sigma = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\sigma_n\}$, si ha che

$$s_n \leq s_{n_0} + \sigma - \sigma_{n_0} \ .$$

Dunque $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e poiché $\lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{s_n\}$, la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.
In modo analogo se la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge, allora per $n \geq n_0$ si ha:

$$\sigma_n = \sigma_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k \geq \sigma_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k = \sigma_{n_0} + s_n - s_{n_0} \ .$$

La tesi allora segue dal fatto che $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$. □

Esempio 9.1. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

detta serie esponenziale, è convergente e la sua somma, indicata con la lettera "e", si chiama *numero di Nepero* , i.e.

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \; .$$

Infatti essa è una serie a termini positivi; inoltre dal fatto che $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ per ogni $a > 0$, segue che per qualsiasi $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, si abbia $\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$, da cui si ha $\frac{1}{n!} < \frac{\varepsilon}{a^n}$. Per $a > 1$ la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{a^n} = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n$ converge e l'asserto segue dal criterio del confronto.
Si noti che $e > 1$.

Osservazione 9.1. L'esempio ora descritto permette di calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \; .$$

Infatti usando lo sviluppo del binomio di Newton

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

si mostra che la successione $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ è crescente e pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} \; ;$$

si prova poi che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} = e \; .$$

Proposizione 9.2 (criterio della radice n-ma). *Sia $\sum_{n\ge 0} a_n$ una serie a termini non negativi. Se esistono $k \in \mathbb{R}$ con $0 < k < 1$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, si abbia*

$$\sqrt[n]{a_n} \le k$$

allora la serie $\sum_{n\ge 0} a_n$ converge.

Dimostrazione. Per $n \ge n_0$ si ha $a_n \le k^n$ dove $|k| < 1$. Poiché la serie geometrica $\sum_{n\ge 0} k^n$ converge, dal criterio del confronto converge anche $\sum_{n\ge 0} a_n$. $\square$

Questo criterio vale anche nella seguente versione

Proposizione 9.3. *Sia* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *una serie a termini non negativi. Se*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \quad \begin{cases} < 1 & \text{allora la serie converge ,} \\ > 1 & \text{allora la serie diverge.} \end{cases}$$

Per le serie a termini positivi si hanno i seguenti due criteri.

Proposizione 9.4 (criterio del rapporto). *Sia* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *una serie a termini positivi. Se esistono* $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$, *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tali che per ogni* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *si abbia*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$$

allora la serie converge.
Se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ *tale che per* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *si abbia*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

allora la serie diverge.

Dimostrazione. Se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$ per $n \geq n_0$, si ha:

$$a_{n+1} \leq k a_n \leq k^2 a_{n-1} \leq \cdots \leq k^{n-n_0+1} a_{n_0} = \frac{a_{n_0}}{k^{n_0}} k^{n+1}$$

dove $\dfrac{a_{n_0}}{k^{n_0}}$ è una costante. Poiché $|k| < 1$, la serie $\sum_{n\geq 0} k^n$ converge e dal criterio del confronto segue la prima parte della proposizione.
Se per $n \geq n_0$ è $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ allora $a_{n+1} \geq a_{n_0}$ e se fosse $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ allora per $\varepsilon = a_{n_0} > 0$, esisterebbe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per $n > n_\varepsilon$, sarebbe $a_{n+1} = |a_{n+1}| < a_{n_0}$. Sia $n_0' = \max\{n_0, n_\varepsilon\}$, allora per $n > n_0'$ sarebbe $a_{n+1} < a_{n_0}$ mentre è $a_{n+1} \geq a_{n_0}$. Quindi non può essere $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dunque la serie diverge. □

Anche in questo caso si ha la seguente versione del criterio sopra enunciato:

Proposizione 9.5. *Sia* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *una serie a termini positivi. Se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \begin{cases} < 1 & \text{allora la serie converge,} \\ > 1 & \text{allora la serie diverge.} \end{cases}$$

Osservazione 9.2. Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ non si può dire niente sul comportamento della serie $\sum_{n\geq 0} a_n$.

Un altro criterio utile è espresso dalla seguente

Proposizione 9.6. *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione positiva decrescente. Allora le serie* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *e* $\sum_{n\geq 0} 2^n a_{2^n}$ *hanno lo stesso comportamento.*

Osservazione 9.3. La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$
converge se $p > 1$ e diverge per $0 < p < 1$.
Infatti applicando la Proposizione 9.6 per $a_n = \dfrac{1}{n^p}$ si ha che
$$2^n a_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \frac{1}{(2^{p-1})^n}$$
dunque la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ è la serie geometrica
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$
che converge se $p - 1 > 0$ e diverge se $0 < p \leq 1$.

Una *serie a segni alterni* è una serie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ dove $a_n = (-1)^n b_n$ per $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione assegnata a termini non negativi o non positivi.
Un criterio per la convergenza di una serie a segni alterni è il seguente

Proposizione 9.7 (criterio di Leibniz). *Sia* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n b_n$ *una serie a segni alterni. Se la successione* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è decrescente e* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *allora la serie* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n b_n$ *converge.*

Esempio 9.2. La serie
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$
converge.
Infatti in tal caso $b_n = \dfrac{1}{n}$, dunque $b_{n+1} \leq b_n$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Si applica quindi il criterio di Leibniz.

10. Serie assolutamente convergenti

Una serie si dice *assolutamente convergente* se converge la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |a_n|$.

Proposizione 10.1. *Una serie assolutamente convergente è convergente. Inoltre se* $S = \displaystyle\sum_{n\geq 0} |a_n|$ *e* $s = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ *allora* $|s| \leq S$.

Dimostrazione. Siano $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rispettivamente la successione delle somme parziali di $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |a_n|$. Dal criterio di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m \in \mathbb{N}$ e per ogni $n > n_\varepsilon$ si abbia
$$|S_{n+m} - S_n| = \big|\, |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+m}| \,\big| = |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon \,.$$

D'altra parte

$$|s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + \cdots |a_{n+m}| < \varepsilon$$

per $n > n_\varepsilon$ e $m \in \mathbb{N}$. Dal criterio di Cauchy la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. Inoltre se $s = \sum\limits_{n\geq 0} a_n$ e $S = \sum\limits_{n\geq 0} |a_n|$ allora

$$|s| = |\lim_{n\to\infty} s_n| = \lim_{n\to\infty} |s_n|$$

dove $|s_n| \leq |a_0| + \cdots + |a_n| = S_n$ e dunque $|s| \leq \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ cioè

$$|s| \leq S\ .$$

$\square$

Si noti che possiamo applicare i criteri di convergenza esposti nel paragrafo precedente alla serie $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|$ e quindi, dalla Proposizione 10.1 appena dimostrata, questi ci forniranno dei criteri di convergenza per le serie assolutamente convergenti.

Osservazione 10.1. Se una serie converge allora non è detto che essa converga assolutamente.
Infatti la serie dell'Esempio 9.2 converge, ma la serie dei valori assoluti è la serie armonica $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ che, come noto, diverge.

11. Riordinamento di una serie

Definizione 11.1. Una serie $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n$ è un *riordinamento* della serie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ se esiste una biiezione $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\alpha_n = a_{r(n)}$.

Se $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n$ è un riordinamento della serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ allora anche $\sum_{n\geq 0} a_n$ è un riordinamento della serie $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$. Si dimostra il seguente

Teorema 11.1. *Se una serie* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *converge assolutamente allora converge ogni suo riordinamento* $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n$*. Inoltre le somme delle due serie sono uguali.*

Osservazione 11.1. (a) Una serie convergente ma non assolutamente convergente ed un suo riordinamento possono avere somme diverse.
Si consideri infatti la serie convergente

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots$$

con somme parziali s_n e sia s la sua somma. Si ha[3]

$$s_{2n+1} = s_3 + \sum_{k=2}^{n}(a_{2k} + a_{2k+1}) = s_3 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k(2k+1)} < s_3 - \frac{1}{20} \ .$$

Poiché $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ allora è anche $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = s$, ma $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} \leq s_3 - 1/20 < s_3$, da cui $s < s_3$. Si prenda ora il riordinamento

$$\sum_{n\geq 1} \alpha_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \ .$$

Allora se $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ è la successione delle somme parziali di questo riordinamento, si ha che

$$\sigma_{3n} = s_3 + \sum_{k=2}^{n}(a_{4k-3} + a_{4k-1} + a_{2k}) =$$

$$= s_3 + \sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}) = s_3 + \sum_{k=2}^{n} \frac{8k-3}{2k(4k-3)(4k-1)} > s_3 \ .$$

Ne segue che se $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ allora $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{3n} \geq s_3 > s$.

(b) In generale $\sum\limits_{n\geq 0}(a_n + b_n) \neq \sum\limits_{n\geq 0} a_n + \sum\limits_{n\geq 0} b_n$.

Infatti le serie $\sum\limits_{n\geq 0}\left(-\frac{1}{2n+1}\right)$, $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{2n}$ divergono[4] e la somma delle due serie è una serie divergente la cui somma è indeterminata. Tuttavia la serie $\sum\limits_{n\geq 1}(a_n+b_n) = \sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{2n(2n+1)}$ converge (usando il criterio del confronto, tenuto conto del fatto che $2n(2n+1) \geq 4n^2 > n^2$).

12. Prodotto di Cauchy di due serie

Siano $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ e $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ due serie. Si chiama *serie prodotto secondo Cauchy* la serie $\sum\limits_{n\geq 0} c_n$ dove

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \ .$$

Si osservi che se s'_n, s''_n e s_n sono le somme parziali n-esime rispettivamente delle serie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ e $\sum\limits_{n\geq 0} c_n$ allora

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} c_m = \sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}\right) =$$

---

[3] $a_{2k} + a_{2k+1} = \frac{(-1)^{2k+1}}{2k} + \frac{(-1)^{2k+2}}{2k+1} = \frac{-(2k+1)+2k}{2k(2k+1)} = -\frac{1}{2k(2k+1)}$

[4] $\sum\limits_{n\geq 0} -\frac{1}{2n+1} = -\infty$, $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{2n} = +\infty$

$$= a_0 s''_n + a_1 s''_{n-1} + \cdots + a_{n-1} s''_1 + a_n s''_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k s''_{n-k}$$

ma anche (posto $h = m - k$)

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{h=0}^{m} b_h a_{m-h} \right) = b_0 s'_n + b_1 s'_{n-1} + \cdots + b_{n-1} s'_1 + b_n s'_0 = \sum_{k=0}^{n} b_k s'_{n-k} \; .$$

Teorema 12.1 (di Mertens). *Siano* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *e* $\sum_{n\geq 0} b_n$ *due serie convergenti. Se almeno una delle due serie converge assolutamente allora la serie prodotto secondo Cauchy converge e la sua somma è il prodotto delle somme di* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *e* $\sum_{n\geq 0} b_n$*.*

Osservazione 12.1. Se le serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ e $\sum_{n\geq 0} b_n$ convergono (ma nessuna delle due converge assolutamente) allora la serie prodotto può anche divergere.
Ad esempio, se $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $n \geq 0$, allora le serie $\sum_{n\geq 0} a_n$, $\sum_{n\geq 0} b_n$ convergono (dal criterio di Leibniz) e

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}} \; .$$

Ora

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}} &= \frac{1}{\sqrt{n+1+kn-k^2}} \geq \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}} \geq 1 \; .$$

Se $n = 2m$ allora $c_{2m} \geq 1$ e dunque non può mai essere $\lim_{m\to\infty} c_{2m} = 0$. Se la serie $\sum_{n\geq 0} c_n$ convergesse, dovrebbe essere $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ e quindi anche $\lim_{m\to\infty} c_{2m} = 0$. Pertanto $\sum_{n\geq 0} c_n$ diverge.

III - Generalità di una funzione scalare di una variabile reale

In questo capitolo si danno le definizioni di dominio, codominio e di estremi di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e il concetto di funzione monotòna (funzioni decrescenti e crescenti). Si danno poi le varie definizioni di limite (infinito e finito per la variabile che tende ad un punto assegnato e infinito e finito per la variabile che tende all'infinito): si dimostrano i risultati fondamentali (criterio di Cauchy, operazioni con i limiti, teorema della permanenza del segno) e si determinano alcuni limiti notevoli. Si studiano poi i limiti laterali e gli asintoti di una funzione. Nel penultimo paragrafo sono riportati i concetti di infinitesimo e di infinito e il confronto tra due di essi.

13. Dominio, codominio e grafico di una funzione

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Si chiama *dominio* della funzione f il sottoinsieme

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$$

mentre si chiama *codominio* della funzione f il sottoinsieme $\mathcal{R}(f)$ di $\mathbb{R}$ costituito dalle *immagini* di f, cioè

$$\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x),\ \text{per } x \in \mathcal{D}(f)\} =: f(\mathcal{D}(f)) \ .$$

Per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$ il numero reale $f(x) \in \mathcal{R}(f)$ si chiama anche *immagine di x mediante f* o *valore di f in x*.
Si chiama *grafico di f* il sottoinsieme $G_f \subset \mathbb{R}^2$,

$$G_f := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = f(x), \text{per qualche } x \in \mathcal{D}(f)\} \ .$$

Fissato un sistema cartesiano $(O; x, y)$ del piano, si può disegnare il grafico di una funzione f.

Esempio 13.1. Sono funzioni:

(i) L'*identità* $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cioè la funzione che ad ogni $x \in \mathbb{R}$ associa sé stesso, i.e. $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$.
Il suo dominio e il suo codominio sono $\mathbb{R}$; il grafico è la retta di equazione $y = x$, bisettrice del I e del III quadrante del piano cartesiano $(O; x, y)$.

(ii) L'*inclusione canonica* $\iota_A : A \to \mathbb{R}$ di un sottoinsieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$, cioè la funzione $\iota_A(x) = x$ per ogni $x \in A$.
Il suo dominio e il suo codominio sono A. Essa è un'applicazione biunivoca rispetto al suo codominio. Il suo grafico è la parte della retta $y = x$ relativo ai punti $x \in A$.

(iii) La *funzione caratteristica* di un sottoinsieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$, cioè la funzione $\chi_A : A \to \mathbb{R}$ definita da

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \ x \in A \\ 0 & , \text{ se } \ x \notin A. \end{cases} \ .$$

Il suo dominio è $\mathbb{R}$ e il suo codominio è $\{0, 1\} \subset \mathbb{R}$. Essa è una funzione suriettiva sul suo codominio. Il suo grafico è la parte della retta $y = 1$ relativo ai punti $x \in A$ e la parte della retta $y = 0$ (asse delle ascisse) relativo ai punti $x \notin A$.

(iv) La *funzione parte intera* cioè la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(x) = [x]$.
Il suo dominio è $\mathbb{R}$ e il suo codominio è $\mathbb{Z}$ ed è una funzione suriettiva. Il suo grafico (a gradini) è costituito dalla parte di retta $y = m$, $m \in \mathbb{Z}$, relativi ai punti $x \in \mathbb{R}$ per cui $[x] = m$.

(v) Ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Essa per definizione è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Il suo dominio è $\mathbb{N}$ e il suo codominio è $a(\mathbb{N}) = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Il grafico è un sottoinsieme discreto di $\mathbb{R}^2$ costituito dalle coppie di punti (n, a_n).

(vi) $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ fissato, per $x \in \mathbb{R}$.
Una tale funzione si chiama *funzione costante*. Il dominio è $\mathbb{R}$, il codominio è $\{c\}$ ed il suo grafico è la retta di equazione $y = c$. Ovviamente è una funzione suriettiva ma non iniettiva.

(vii) $f(x) = x^2$ per $x \in \mathbb{R}$.
Il suo dominio è $\mathbb{R}$ mentre il suo codominio è il sottoinsieme $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali non negativi. Si noti che questa funzione è suriettiva perché se $y \in \mathbb{R}^+$ allora $x_1 = -\sqrt{y}$ e $x_2 = +\sqrt{y}$ sono tali che $f(x_1) = f(x_2) = y$. Il suo grafico è la parabola di equazione $y = x^2$.

(viii) $f(x) = \sqrt{x}$, (dove, affinché questa legge sia una funzione, si intende la radice positiva).
Questa funzione ha per dominio e per codominio $\mathbb{R}^+$ ed è biunivoca. Si noti che il suo grafico coincide con il ramo superiore della parabola $x = y^2$.

14. Estremi di una funzione

Una funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ è *limitata inferiormente* se il codominio $\mathcal{R}(f)$ è limitato inferiormente; si pone allora

$$\inf f := \inf \mathcal{R}(f)$$

che si chiama *estremo inferiore di* f. Analogamente, una funzione è *limitata superiormente* se il codominio $\mathcal{R}(f)$ è limitato superiormente; si pone allora

$$\sup f := \sup \mathcal{R}(f)$$

che si chiama *estremo superiore di* f.
Se $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ allora si dice che f è *limitata inferiormente in* A se $f(A)$ è limitato inferiormente. In tal caso si pone

$$\inf_A f := \inf f(A)$$

che si chiama *estremo inferiore di* f *in* A. Analogamente f è *limitata superiormente in* A se $f(A)$ è limitato superiormente e si pone

$$\sup_A f := \sup f(A)$$

che si chiama *estremo superiore di* f *in* A.
Se $\mathcal{R}(f)$ non è limitato inferiormente allora f è *illimitata inferiormente* e si pone

$$\inf f = -\infty\ ;$$

analogamente se $f(A)$ non è limitato inferiormente allora f è *illimitata inferiormente in* A e si pone

$$\inf_A f = -\infty\ .$$

Similmente se $\mathcal{R}(f)$ non è limitato superiormente allora f è *illimitata superiormente* e si pone

$$\sup f = +\infty$$

e se $f(A)$ non è limitato superiormente allora f è *illimitata superiormente in* A e si pone

$$\sup_A f = +\infty \ .$$

Infine una funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ è *limitata* se è limitata sia inferiormente che superiormente, mentre se $A \subseteq \mathcal{D}(f)$, allora f è *limitata in* A se è limitata sia inferiormente che superiormente in A.

Dalle definizioni, è ovvio che per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$ è

$$\inf f \leq f(x) \leq \sup f$$

e valgono le uguaglianze se f è costante. Analogamente, per ogni $x \in A$ è

$$\inf_A f \leq f(x) \leq \sup_A f$$

e valgono le uguaglianze se f è costante in A.

Valgono le seguenti proprietà:

i) Se $B \subseteq \mathcal{D}(f)$ o rispettivamente $B \subseteq A \subseteq \mathcal{D}(f)$ allora

$$\inf f \leq \inf_B f \quad , \quad \inf_A f \leq \inf_B f$$
$$\sup f \geq \inf_B f \quad , \quad \sup_A f \geq \sup_B f \ .$$

ii) Se g è una funzione che ha lo stesso dominio di f e $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$ allora

$$\inf f \leq \inf g \ , \ \sup f \leq \sup g \ ,$$

oppure, se per ogni $x \in A \subseteq \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ è $f(x) \leq g(x)$, allora

$$\inf_A f \leq \inf_A g \ , \ \sup_A f \leq \sup_A g \ .$$

iii) Se g è una funzione che ha lo stesso dominio di f allora

$$\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g \quad , \quad \sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$$

oppure se $A \subseteq \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ allora

$$\inf_A (f+g) \geq \inf_A f + \inf_A g \ , \ \sup_A (f+g) \leq \sup_A f + \sup_A g \ .$$

iv) Se $f, g \geq 0$ allora

$$\inf(fg) \geq (\inf f)(\inf g) \ , \ \sup(fg) \leq (\sup f)(\sup g)$$

e per $A \subseteq \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ è

$$\inf_A (fg) \geq (\inf_A f)(\inf_A g) \ , \ \sup_A (fg) \leq (\sup_A f)(\sup_A g) \ .$$

Se $\mathcal{R}(f)$ ha minimo, i.e. $\inf f \in \mathcal{R}(f)$, allora si dice che f ha *minimo assoluto* e si pone

$$\min f := \min \mathcal{R}(f) \ .$$

In questo caso esiste $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ tale che

$$f(x_0) = \min f$$

e il punto x_0 si dice *punto di minimo assoluto di* f. Analogamente, se $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ e $f(A)$ ha minimo, i.e. $\inf_A f \in f(A)$, allora si dice che f ha *minimo in* A e si pone

$$\min_A f := \min f(A) .$$

In questo caso esiste $x_0 \in A$ tale che

$$f(x_0) = \min_A f$$

e il punto x_0 si dice *punto di minimo di* f *in* A.
In modo simile, se $\mathcal{R}(f)$ ha massimo, i.e. $\sup f \in \mathcal{R}(f)$, allora si dice che f ha *massimo assoluto* e si pone

$$\max f := \max \mathcal{R}(f) .$$

In questo caso esiste $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ tale che

$$f(x_0) = \max f ;$$

il punto x_0 si dice *punto di massimo assoluto* di f.
In modo simile, se $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ e $f(A)$ ha massimo, i.e. $\sup_A f \in f(A)$, allora si dice che f ha *massimo in* A e si pone

$$\max_A f := \max f(A) .$$

In questo caso esiste $x_0 \in A$ tale che

$$f(x_0) = \max_A f ;$$

il punto x_0 si dice *punto di massimo di* f *in* A.

15. Funzioni monotòne

Definizione 15.1. Una funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ si dice *decrescente* (rispettivamente *strettamente decrescente*) se per ogni $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$ (rispettivamente $f(x_1) > f(x_2)$).
Si dice che f è *crescente*(rispettivamente *strettamente crescente* se per ogni $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$ (rispettivamente $f(x_1) < f(x_2)$).

Le funzioni decrescenti, strettamente decrescenti, crescenti e strettamente crescenti si chiamano *funzioni monotòne*.

Esempio 15.1.

(i) Le funzioni lineari affini sono funzioni monotòne.
Infatti una tale funzione è della forma $f(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a > 0$ allora f è strettamente crescente, se $a < 0$ allora f è strettamente decrescente. Se $a = 0$ allora la funzione è costante e perciò è sia crescente che decrescente.

(ii) $f(x) = x^3$ è una funzione strettamente crescente.

(iii) $f(x) = a^x$ e la sua inversa $g(x) = \log_a x$ sono funzioni strettamente decrescenti per $0 < a < 1$ e sono strettamente crescenti per $a > 1$.

• Si osservi che *una funzione strettamente monotòna è invertibile*. Infatti se non lo fosse, f non sarebbe iniettiva (una funzione è sempre suriettiva sulla sua immagine). Dunque esisterebbero due punti distinti di $\mathcal{D}(f)$, $x_1 \neq x_2$, tali che $f(x_1) = f(x_2)$; senza perdere di generalità si potrebbe assumere $x_1 < x_2$. Se ad esempio f fosse strettamente decrescente allora sarebbe $f(x_1) > f(x_2)$ che contraddirebbe il fatto $f(x_1) = f(x_2)$. In modo analogo si otterrebbe una contraddizione se f fosse strettamente crescente. Ne segue allora che f è invertibile.

• Viceversa *è falso che una funzione invertibile sia strettamente monotòna.* Infatti

Esempio 15.2. Sia

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{per } x \in [0,1] \\ x & \text{per } x \in (1,2] \end{cases}$$

Questa funzione è invertibile (la sua inversa è sé stessa), ma (come si osserva anche se si disegna il suo grafico) non è monotòna.

• Tuttavia *se una funzione è invertibile e monotòna allora essa è strettamente monotòna.* Infatti se la funzione invertibile f è ad esempio decrescente, da $x_1 < x_2$ segue che $f(x_1) \geq f(x_2)$. Se fosse $f(x_1) = f(x_2)$, dall'iniettività di f, si dovrebbe avere $x_1 = x_2$ che non accade. Dunque è $f(x_1) > f(x_2)$. La medesima conclusione si ottiene se si assume f crescente.

Proposizione 15.1. *Una funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ è decrescente se e solo se per ogni $x_1,\ x_2 \in \mathcal{D}(f)$, $x_1 \neq x_2$, è*

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0\ . \tag{15.1}$$

Dimostrazione. Senza perdere di generalità si può assumere che sia $x_1 < x_2$. Se f è decrescente allora $f(x_1) \geq f(x_2)$ da cui segue che

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0\ .$$

Viceversa se vale la (15.1) allora può essere:

$$\begin{cases} f(x_1) - f(x_2) \geq 0 \\ x_1 - x_2 < 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} f(x_1) - f(x_2) \leq 0 \\ x_1 - x_2 > 0 \end{cases}$$

cioè

$$f(x_1) \geq f(x_2) \qquad \text{per } x_1 < x_2$$

oppure

$$f(x_1) \leq f(x_2) \qquad \text{per } x_1 > x_2\ .$$

In ogni caso questo significa che f è decrescente. □

Risultato analogo a questo si ottiene rispettivamente anche per le funzioni strettamente decrescenti, per le funzioni crescenti e per quelle strettamente crescenti dove, nella (15.1), si ponga rispettivamente "$<$" , "$\geq$" e "$>$".

16. Limite di una funzione

16.1. Limite del tipo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Definizione 16.1. Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ illimitata e sia $x_0 \in \mathcal{D}(f)'$ un punto di accumulazione del dominio. Si dice che il *limite di $f(x)$ per x tendente a x_0 è ∞* e si scrive

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \tag{16.1}$$

se per ogni $M > 0$ esiste un intorno $I(x_0, \delta_M)$, con δ_M dipendente da M, tale che, per ogni $x \in \big(\mathcal{D}(f) \cap I(x_0, \delta_M)\big) \setminus \{x_0\}$, si abbia $|f(x)| > M$.

• Questo equivale ad avere che per ogni $M > 0$ esista $\delta_M > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $0 < |x - x_0| < \delta_M$, sia $|f(x)| > M$.
In modo analogo

Definizione 16.2. Se f è illimitata inferiormente e $x_0 \in \mathcal{D}(f)'$ è un punto di accumulazione del dominio, allora si dice che il *limite di $f(x)$ per x tendente a x_0 è $-\infty$* e si scrive

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \tag{16.2}$$

se per ogni $M > 0$ esiste un intorno $I(x_0, \delta_M)$ tale che, per ogni $x \in \big(\mathcal{D}(f) \cap I(x_0, \delta_M)\big) \setminus \{x_0\}$, si abbia $f(x) < -M$.
Se f è illimitata superiormente e $x_0 \in \mathcal{D}(f)'$ è un punto di accumulazione del dominio, allora si dice che il *limite di $f(x)$ per x tendente a x_0 è $+\infty$* e si scrive

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \tag{16.3}$$

se per ogni $M > 0$ esiste un intorno $I(x_0, \delta_M)$ tale che, per ogni $x \in \big(\mathcal{D}(f) \cap I(x_0, \delta_M)\big) \setminus \{x_0\}$, si abbia $f(x) > M$.

• Questo equivale ad avere che per ogni $M > 0$ esiste $\delta_M > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $0 < |x - x_0| < \delta_M$, sia nel primo caso $f(x) < -M$, mentre nel secondo sia $f(x) > M$.

Esempio 16.1. Sia $f(x) = \dfrac{1}{x}$ per $x \in (-\infty, 0)$. Allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = -\infty\ .$$

Infatti per $M > 0$ è $\dfrac{1}{x} < -M$ per $-x = |x| < \dfrac{1}{M}$, perciò $\delta_M = \dfrac{1}{M}$.

In modo analogo per $f(x) = \dfrac{1}{x}$ per $x \in (0, +\infty)$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty\ .$$

Definizione 16.3. Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ limitata e sia $x_0 \in \mathcal{D}(f)'$ un punto di accumulazione del dominio. Si dice che il *limite di $f(x)$ per x tendente a x_0 è $\ell \in \mathbb{R}$* e si scrive

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \tag{16.4}$$

se per ogni intorno $I(\ell, \varepsilon)$ esiste un intorno $I(x_0, \delta_\varepsilon)$, con δ_ε dipendente da ε, tale che, per ogni $x \in \big(\mathcal{D}(f) \cap I(x_0, \delta_\varepsilon)\big) \setminus \{x_0\}$, si abbia $f(x) \in I(\ell, \varepsilon)$.

• Questo equivale ad avere che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, sia $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Ad esempio se $f(x) = x^2$ allora $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$: infatti per ogni $\varepsilon > 0$ da $|x^2 - 1| < \varepsilon$ basta prendere $\delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

• Se vale la (16.1) o una delle (16.2), (16.3) allora si dice che il limite della f, per x tendente a x_0, esiste infinito, mentre se vale la (16.4) si dice che il limite esiste finito.

Si vedrà adesso il collegamento tra il limite di una funzione e le successioni o meglio come si esprime il concetto di limite per una funzione mediante le successioni.

Teorema 16.1. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in \mathcal{D}(f)'$. Allora*

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ *se e solo se per ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(f)\backslash\{x_0\}$ convergente a x_0 si ha $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$;*

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ *se e solo se per ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(f)\backslash\{x_0\}$ convergente a x_0 si ha $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \pm\infty$;*

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *se e solo se per ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(f)\backslash\{x_0\}$ convergente a x_0 si ha $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$.*

Dimostrazione. Si supponga che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$; allora per ogni $M > 0$ esiste $\delta_M > 0$ tale che per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $0 < |x - x_0| < \delta_M$, si abbia $|f(x)| > M$. Poiché $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, in corrispondenza a δ_M esiste $n_M \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n_M$ sia $0 < |a_n - x_0| < \delta_M$ e dunque $|f(a_n)| > M$ per $n > n_M$. Questo implica $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$.

Viceversa, si assuma che $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$ per ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(f)\setminus\{x_0\}$ convergente a x_0 e per assurdo si supponga che il limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ non sia ∞. Allora esiste $\widetilde{M} > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esista un $a_\delta \in \mathcal{D}(f)$, con $0 < |a_\delta - x_0| < \delta$, per cui $|f(a_\delta)| \leq \widetilde{M}$. In particolare questo accade per $\delta = \dfrac{1}{n}$, per ogni $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, e dunque si ottiene una successione $\{\widetilde{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}} \subseteq \mathcal{D}(f)$ con $0 < |\widetilde{a}_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$.

È ovvio che questa successione converge a x_0 ma tuttavia $|f(\widetilde{a}_n)| \leq \widetilde{M}$, per ogni $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, e questo nega che sia $\lim\limits_{n\to\infty} f(\widetilde{a}_n) = \infty$. Pertanto deve essere $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

In modo analogo si prova la (ii).

Per la (iii) se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, si abbia $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(f)\backslash\{x_0\}$ una successione convergente a x_0. In corrispondenza a δ_ε esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per $n > n_\varepsilon$, sia $0 < |a_n - x_0| < \delta_\varepsilon$ e quindi per $n > n_\varepsilon$ sia $|f(a_n) - \ell| < \varepsilon$ da cui segue $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$.

Viceversa se vale $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$ per ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(f)\backslash\{x_0\}$ convergente a x_0 e per assurdo si assume che non sia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, allora esisterebbe $\widetilde{\varepsilon} > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$, esisterebbe un $a_\delta \in \mathcal{D}(f)$, con $0 < |a_\delta - x_0| < \delta$, per cui $|f(a_\delta) - \ell| \geq \widetilde{\varepsilon}$. In particolare questo varrebbe per $\delta = \dfrac{1}{n}$. Procedendo come nella dimostrazione fatta sopra, si avrebbe una successione $\{\widetilde{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ tale che $|f(\widetilde{a}_n) - \ell| \geq \widetilde{\varepsilon}$ che nega il fatto che debba essere $\lim_{n\to\infty} f(\widetilde{a}_n) = \ell$. Pertanto è $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. □

Il teorema appena enunciato è utile soprattutto per dimostrare la *non esistenza di un limite* come si osserva dal seguente

Esempio 16.2. $\lim_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ e $\lim_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ non esistono.

Infatti posto $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$, basta considerare le successioni convergenti a 0 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $a_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, $b_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$ per avere

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \cos 2n\pi = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n+1)\pi = -1 \ .$$

Dal Teorema 16.1 precedente dunque non può esistere il $\lim_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$.

In modo analogo posto $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, se si considerano le successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $a_n = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$, $b_n = \dfrac{2}{(4n-1)\pi}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi\right) = 1 \ , \ \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{4n-1}{2}\pi\right) = -1 \ .$$

Proposizione 16.1 (criterio di Cauchy). *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista finito*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

è che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x_1,\ x_2 \in \big(\mathcal{D}(f) \cap I(x_0, \delta_\varepsilon)\big)\setminus\{x_0\}$, si abbia

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \ . \tag{16.5}$$

Dimostrazione. La condizione è necessaria: infatti se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x_1, x_2 \in \big(\mathcal{D}(f) \cap I(x_0, \delta_\varepsilon)\big)\setminus\{x_0\}$, si abbia $|f(x_1) - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $|f(x_2) - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Dunque

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - \ell| + |f(x_2) - \ell| < \varepsilon \ .$$

La condizione è sufficiente: infatti supponiamo che valga la condizione di Cauchy (16.5) ma che non esista finito il limite di $f(x)$ per x tendente a x_0. Dal Teorema 16.1 esiste una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(f)$ convergente a x_0 tale che $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ non esista finito. Questo significa che la successione $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è di Cauchy e dunque esiste $\widetilde{\varepsilon} > 0$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, esistono $m, p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, con $m, p > n$, tali che $|f(a_m) - f(a_p)| \geq \widetilde{\varepsilon}$. Questo nega la condizione di Cauchy (16.5).

□

Esercizio 16.1. Usando la definizione provare che:

(i) $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ e da essi ricavare che
$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \quad , \quad \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0 \ ;$$

(ii) $\lim_{x\to 0} a^x = 1$, per $a > 0$, $a \neq 1$, e ricavare che
$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \quad , \quad a > 0,\ a \neq 1 \ ;$$

(iii) $\lim_{x\to 1} \log_a x = 0$, per $a > 0$, $a \neq 1$, e ricavare che
$$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \quad , \quad a > 0,\ a \neq 1 \ ;$$

(iv) $\lim_{x\to 1} x^a = 1$, per ogni $a \in \mathbb{R}$, e ricavare che
$$\lim_{x\to x_0} x^a = x_0^a \quad , \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \ .$$

16.2. **Limiti del tipo $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.**

Definizione 16.4. Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione per cui $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

(i) Se $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$ si dice che il *limite di $f(x)$ per x tendente a ∞ è ∞* e si scrive
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
se per ogni $M > 0$ esiste $x_M > 0$ tale che, per ogni$x \in \mathcal{D}(f)$, con $|x| > x_M$, si abbia $|f(x)| > M$.

(ii) Se il codominio non è limitato inferiormente si dice che il *limite di $f(x)$ per x tendente a ∞ è $-\infty$* e si scrive
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$
se per ogni $M > 0$ esiste $x_M > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$ con $|x| > x_M$, si abbia $f(x) < -M$.

(iii) Se il codominio non è limitato superiormente si dice che il *limite di $f(x)$ per x tendente a ∞ è $+\infty$* e si scrive
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$
se per ogni $M > 0$ esiste $x_M > 0$ tale che per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $|x| > x_M$, si abbia $f(x) > M$.

(iv) Se il codominio è limitato si dice che il *limite di $f(x)$ per x tendente a ∞ è ℓ* e si scrive
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$$
se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$ con $|x| > x_\varepsilon$, si abbia $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

In modo analogo

Definizione 16.5. Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione il cui dominio $\mathcal{D}(f)$ sia illimitato inferiormente.

(i) Se $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$ si dice che il *limite di $f(x)$ per x tendente a $-\infty$ è ∞* e si scrive

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste $x_M > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $x < -x_M$, si abbia $|f(x)| > M$.

(ii) Se il codominio non è limitato inferiormente si dice che il *limite di $f(x)$ per x tendente a $-\infty$ è $-\infty$* e si scrive

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste $x_M > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $x < -x_M$, si abbia $f(x) < -M$.

(iii) Se il codominio non è limitato superiormente si dice che il *limite di $f(x)$ per x tendente a $-\infty$ è $+\infty$* e si scrive

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste $x_M > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $x < -x_M$, si abbia $f(x) > M$.

(iv) Se il codominio è limitato si dice che il *limite di $f(x)$ per x tendente a $-\infty$ è ℓ* e si scrive

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $x < -x_\varepsilon$, si abbia $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

In modo del tutto simile

Definizione 16.6. Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione il cui dominio $\mathcal{D}(f)$ sia illimitato superiormente.

(i) Se $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$ si dice che il *limite di $f(x)$ per x tendente a $+\infty$ è ∞* e si scrive

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste $x_M > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $x > x_M$, si abbia $|f(x)| > M$.

(ii) Se il codominio non è limitato inferiormente si dice che il *limite di $f(x)$ per x tendente a $+\infty$ è $-\infty$* e si scrive

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste $x_M > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $x > x_M$, si abbia $f(x) < -M$.

(iii) Se il codominio non è limitato superiormente si dice che il *limite di $f(x)$ per x tendente a $+\infty$ è $+\infty$* e si scrive

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste $x_M > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $x > x_M$, si abbia $f(x) > M$.

(iv) Se il codominio è limitato si dice che il *limite di* $f(x)$ *per* x *tendente a* $+\infty$ *è* ℓ e si scrive
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$
se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $x > x_\varepsilon$, si abbia $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Per i limiti $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ valgono gli analoghi del Teorema 16.1, Cap. III, e cioè

Teorema 16.2. *Sia* $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ *una funzione. Allora*

I. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *se e solo se per ogni successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(f)$ *divergente a* ∞ *si ha che* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$.

II. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ *se e solo se per ogni successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(f)$ *divergente a* ∞ *si ha che* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \pm\infty$.

III. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ *se e solo se per ogni successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(f)$ *divergente a* ∞ *si ha che* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$.

Teorema 16.3. *Sia* $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ *una funzione. Allora*

I. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ *se e solo se per ogni successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(f)$ *divergente a* $\pm\infty$ *si ha che* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$.

II. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ *se e solo se per ogni successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(f)$ *divergente a* $\pm\infty$ *si ha che* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \pm\infty$.

III. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$ *se e solo se per ogni successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(f)$ *divergente a* $\pm\infty$ *si ha che* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$.

Inoltre si hanno, similmente alla Proposizione 16.1, Cap. III, i criteri di Cauchy

Proposizione 16.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista finito*
$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$
è che per ogni $\varepsilon > 0$ *esista* $x_\varepsilon > 0$ *tale che, per ogni* $x_1,\ x_2 \in \mathcal{D}(f)$, *con* $|x_1| > x_\varepsilon$, $|x_2| > x_\varepsilon$, *si abbia*
$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\ .$$

Proposizione 16.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista finito*
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$
è che per ogni $\varepsilon > 0$ *esista* $x_\varepsilon > 0$ *tale che, per ogni* $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$, *con* $x_1, x_2 < -x_\varepsilon$, *si abbia*
$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\ .$$

Proposizione 16.4. *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista finito*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

è che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $x_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$, con $x_1, x_2 > x_\varepsilon$, si abbia

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \ .$$

Esercizio 16.2. Usando la definizione provare che

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & , \quad \text{se } \ 0 < a < 1 \\ 0 & , \quad \text{se } \ a > 1 \ , \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } \ 0 < a < 1 \\ +\infty & , \quad \text{se } \ a > 1 \ . \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty & , \quad \text{se } \ 0 < a < 1 \\ +\infty & , \quad \text{se } \ a > 1 \ . \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & , \quad \text{se } \ \alpha > 0 \\ 0 & , \quad \text{se } \ \alpha < 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 16.3. Usando il Teorema 16.3, provare che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \ ; \tag{16.6}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1 \ . \tag{16.7}$$

16.3. **Operazioni con i limiti.** Rispetto alle operazioni di prodotto per scalari, somma, prodotto e quoziente di funzioni, l'operazione di limite si comporta nel modo seguente:

Proposizione 16.5. *Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D}(g) \to \mathbb{R}$ due funzioni con $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = D$; sia $x_0 \in D'$.*

Se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)$ esistono finiti allora

$$\lim_{x\to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x\to x_0} f(x) \ ;$$

$$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \ ;$$

$$\lim_{x\to x_0} (fg)(x) = (\lim_{x\to x_0} f(x))(\lim_{x\to x_0} g(x)) \ .$$

Se $g(x) \neq 0$ *e* $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ *esistono finiti e non nulli allora*

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} .$$

Analoghe proposizioni valgono anche per i limiti $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. Per la loro dimostrazione basta usare le definizioni.
Se uno almeno dei due limiti $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ è nullo oppure esiste infinito (ugualmente anche nei casi $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$) allora valgono, per le operazioni con i limiti di funzioni, risultati simili a quelli visti per le operazioni con i limiti di successioni nelle Proposizioni 3.5 e 4.1.
Quindi anche per i limiti di funzioni si hanno le forme indeterminate "$\infty - \infty$", $0 \cdot \infty$", "$\frac{\infty}{\infty}$" e "$\frac{0}{0}$".

16.4. **Alcune proprietà dei limiti.**

Teorema 16.4 (della permanenza del segno). *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell < 0$ *oppure se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *allora esiste un intorno* $I(x_0, r)$ *tale che, per ogni* $x \in \big(\mathcal{D}(f) \cap I(x_0, r)\big) \setminus \{x_0\}$, *sia* $f(x) < 0$.

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell > 0$ *oppure se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *allora esiste un intorno* $I(x_0, r)$ *tale che, per ogni* $x \in \big(\mathcal{D}(f) \cap I(x_0, r)\big) \setminus \{x_0\}$, *sia* $f(x) > 0$.

Dimostrazione. Sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\ell < 0$; dalla definizione di limite, per $\varepsilon = |\ell|$, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in \big(\mathcal{D}(f) \cap I(x_0, \delta_\varepsilon)\big) \setminus \{x_0\}$, si abbia $f(x) \in I(\ell, |\ell|)$ e perciò $\ell - |\ell| < f(x) < \ell + |\ell| = \ell - \ell = 0$.
In modo analogo si procede se $\ell > 0$.
Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ allora $f(x) < -M$ per ogni $M > 0$ e $x \in \big(\mathcal{D}(f) \cap I(x_0, \delta_M)\big) \setminus \{x_0\}$, per un certo $\delta_M > 0$, ed è ovvio che $f(x) < 0$.
Similmente si procede se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. □

In modo analogo si dimostra che:

- *Se* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell < 0$ *oppure se* $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ *allora esiste* $r > 0$ *tale che, per ogni* $x \in \mathcal{D}(f)$, *con* $|x| > r$, *sia* $f(x) < 0$.
  Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell > 0$ *oppure se* $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ *allora esiste* $r > 0$ *tale che, per ogni* $x \in \mathcal{D}(f)$, *con* $|x| > r$, *sia* $f(x) > 0$.
- *Se* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell < 0$ *oppure se* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *allora esiste* $r > 0$ *tale che, per ogni* $x \in \mathcal{D}(f)$, *con* $x < -r$, *sia* $f(x) < 0$.
  Se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell > 0$ *oppure se* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *allora esiste* $r > 0$ *tale che, per ogni* $x \in \mathcal{D}(f)$, *con* $x < -r$, *sia* $f(x) > 0$.

- *Se* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell < 0$ *oppure se* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *allora esiste* $r > 0$ *tale che, per ogni* $x \in \mathcal{D}(f)$*, con* $x > r$*, sia* $f(x) < 0$.
  Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell > 0$ *oppure se* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *allora esiste* $r > 0$ *tale che, per ogni* $x \in \mathcal{D}(f)$*, con* $x > r$*, sia* $f(x) > 0$.

Proposizione 16.6. *Siano* $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D}(g) \to \mathbb{R}$ *con* $\mathcal{R}(f) = \mathcal{D}(g)$ *e sia*
I. $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in \mathcal{D}(g)'$ *oppure* II. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$. *Allora*

$$\text{I. } \lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = \lim_{y\to y_0} g(y) \quad , \quad \text{II. } \lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = \lim_{y\to\infty} g(y)\ .$$

Dimostrazione. Caso I. Sia $y_0 \in \mathcal{D}(g)'$, allora per ogni $\sigma > 0$ esiste $\delta_\sigma > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $0 < |x - x_0| < \delta_\sigma$, si abbia $|f(x) - y_0| < \sigma$. Si supponga che $\lim_{y\to y_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$; per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\eta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $y \in \mathcal{D}(g)$, con $0 < |y - y_0| < \eta_\varepsilon$, si abbia $|g(y) - \ell| < \varepsilon$. In corrispondenza a η_ε esiste allora $\delta_{\eta_\varepsilon} = \delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, si abbia $|f(x) - y_0| < \eta_\varepsilon$, e poiché $f(x) \in \mathcal{D}(g)$, se $f(x) \neq y_0$, questa implica $|(g \circ f)(x) - \ell| = |g(f(x)) - \ell| < \varepsilon$ per ogni $x \in \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g \circ f)$, con $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, i.e. $\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = \ell$.

Se invece $\lim_{y\to y_0} g(x) = \infty$ allora per ogni $M > 0$ esiste $\eta_M > 0$ tale che, per ogni $y \in \mathcal{D}(g)$, con $0 < |y - y_0| < \eta_M$, si abbia $|g(y)| > M$. Ripetendo il ragionamento fatto sopra, in corrispondenza a η_M si ha che esiste $\delta_M > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $0 < |x - x_0| < \delta_M$, si abbia $|(g \circ f)(x)| > M$, i.e. $\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = \infty$.

Caso II. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ allora $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R} = \mathcal{D}(g)$. Inoltre per ogni $M > 0$ esiste $\delta_M > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $0 < |x - x_0| < \delta_M$, sia $|f(x)| > M$. Se $\lim_{y\to\infty} g(x) = \ell$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $y \in \mathcal{D}(g)$, con $|y| > y_\varepsilon$, si abbia $|g(y) - \ell| < \varepsilon$. In corrispondenza a y_ε esiste dunque $\delta_{y_\varepsilon} = \delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g \circ f)$, con $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, sia $|f(x)| > y_\varepsilon$ da cui segue $|(g \circ f)(x) - \ell| = |g(f(x)) - \ell| < \varepsilon$, i.e. $\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = \ell$.

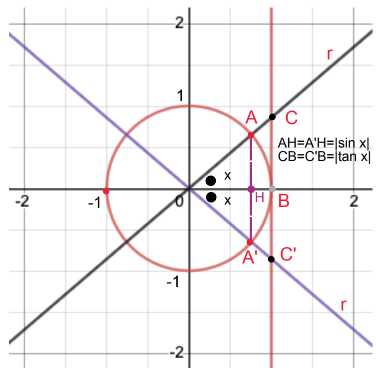
In modo analogo si procede se $\lim_{y\to\infty} g(x) = \infty$. $\square$

16.5. **Alcuni limiti notevoli.**

Proposizione 16.7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,. \tag{16.8}$$

Dimostrazione.



Poiché $x\neq 0$ è in un intorno di $x_0=0$, si può assumere, senza perdere di generalità, che sia $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$. In un sistema di riferimento cartesiano $\{O,x,y\}$,
sia r la semiretta uscente da O che forma con l'asse delle ascisse l'angolo x: essa incontra la circonferenza di centro O e raggio 1 in un punto A. Sia B il punto dell'asse delle ascisse dove la circonferenza incontra tale asse. Allora l'area del triangolo OBA
è $\dfrac{|\sin x|}{2}$ ed è minore dell'area del settore circolare OBA che è $\dfrac{|x|}{2}$, cioè $|\sin x|\leq |x|$.
L'area del triangolo OBC, per C punto d'intersezione della semiretta r con la retta tangente in B alla circonferenza unitaria, è $\dfrac{|\tan x|}{2}$ ed è maggiore dell'area del settore circolare OBA; dunque si ha:

$$|\sin x|\leq |x|\leq |\tan x|$$

da cui

$$\frac{1}{|\tan x|}\leq\frac{1}{|x|}\leq\frac{1}{|\sin x|}\,.$$

Moltiplicando per $|\sin x|$ si ha

$$|\cos x|\leq\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq 1\,.$$

Poiché $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ allora $\cos x>0$ e $\dfrac{\sin x}{x}>0$, dunque

$$\cos x-1\leq\frac{\sin x}{x}-1\leq 0$$

da cui

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|\leq|1-\cos x|=2\left|\sin^2\frac{x}{2}\right|\leq\frac{|x|^2}{2}\,.$$

Se per $\varepsilon > 0$ si prende $\delta_\varepsilon = \sqrt{2\varepsilon}$ allora per $|x| < \delta_\varepsilon$ si ha

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon \; .$$

$\square$

• Come conseguenza di questa proposizione si ottiene che

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \; .$$

Infatti $1 - \cos x = 2 \sin^2 \dfrac{x}{2}$ da cui

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 \dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{y \to 0} \frac{\sin^2 y}{y^2} = \frac{1}{2}$$

(dove si è posto $y = \dfrac{x}{2}$).

Si dimostrano inoltre le seguenti proposizioni.

Proposizione 16.8. *Siano* $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $x_0 \in \mathcal{D}(f)'$ *e* $a > 0$, $a \neq 1$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *esiste finito e positivo allora*

$$\lim_{x \to x_0} \log_a f(x) = \log_a \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) \; .$$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *allora*

$$\lim_{x \to x_0} \log_a f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } \; 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } \; a > 1 \; . \end{cases}$$

Proposizione 16.9. *Siano* $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$ *e* $a > 0$, $a \neq 1$.

Se $\lim_{x \to \infty} f(x)$ *esiste finito e positivo allora*

$$\lim_{x \to \infty} \log_a f(x) = \log_a \left(\lim_{x \to \infty} f(x) \right) \; .$$

Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ *allora*

$$\lim_{x \to \infty} \log_a f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } \; 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } \; a > 1 \; . \end{cases}$$

I risultati delle Proposizioni 16.8 e 16.9 si esprimono informalmente dicendo che "il limite del logaritmo è il logaritmo del limite".

Proposizione 16.10. *Siano* $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(f)'$ *e* $a > 0$, $a \neq 1$.

Se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *esiste finito allora*

$$\lim_{x\to x_0} a^{f(x)} = a^{\lim_{x\to x_0} f(x)} .$$

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *allora*

$$\lim_{x\to x_0} a^{f(x)} = \begin{cases} +\infty & se\ \ 0 < a < 1 \\ 0 & se\ \ a > 1 . \end{cases}$$

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *allora*

$$\lim_{x\to x_0} a^{f(x)} = \begin{cases} 0 & se\ \ 0 < a < 1 \\ +\infty & se\ \ a > 1 . \end{cases}$$

Proposizione 16.11. *Siano* $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$ *e* $a > 0$, $a \neq 1$.

Se $\lim_{x\to \infty} f(x)$ *esiste finito allora*

$$\lim_{x\to \infty} a^{f(x)} = a^{\lim_{x\to \infty} f(x)} .$$

Se $\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty$ *allora*

$$\lim_{x\to \infty} a^{f(x)} = \begin{cases} +\infty & se\ \ 0 < a < 1 \\ 0 & se\ \ a > 1 . \end{cases}$$

Se $\lim_{x\to \infty} f(x) = +\infty$ *allora*

$$\lim_{x\to \infty} a^{f(x)} = \begin{cases} 0 & se\ \ 0 < a < 1 \\ +\infty & se\ \ a > 1 . \end{cases}$$

16.6. **Limiti laterali.** Siano $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ e $A \subseteq \mathcal{D}(f)$; indichiamo con $f_A : A \to \mathbb{R}$ la *restrizione di* f *ad* A, i.e. $f_A(x) = f(x)$ se $x \in A$. Se $x_0 \in A'$ allora $x_0 \in \mathcal{D}(f)'$ e si verifica facilmente che se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ allora è anche $\lim_{x\to x_0} f_A(x) = \ell$.

Il viceversa è falso. Ad esempio per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad \text{per } \ x < 0 \\ 1 & , \quad \text{per } \ x > 0 , \end{cases}$$

si consideri $A = (-\infty, 0) \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathcal{D}(f)$. Si ha che $f_A(x) = -1$ e quindi $\lim_{x\to 0} f_A(x) = -1$, mentre $\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste perché considerate le successioni

$\{-\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}$ e $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}$, si avrebbe $f(-\frac{1}{n}) = -1$ e $f(\frac{1}{n}) = 1$ per cui la successione $\{f(-\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}$ sarebbe convergente a -1, mentre la successione $\{f(\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ sarebbe convergente a 1.

Sia $x_0 \in \mathcal{D}(f)'$; si ponga

$$\mathcal{D}(f)_{x_0^-} := \mathcal{D}(f) \cap (-\infty, x_0] \quad , \quad \mathcal{D}(f)_{x_0^+} := \mathcal{D}(f) \cap [x_0, +\infty) \ .$$

Definizione 16.7. Si chiama *limite laterale sinistro* di $f(x)$ per x tendente a x_0 e si scrive

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

il limite

$$\lim_{x \to x_0} f_{\mathcal{D}(f)_{x_0^-}}(x) \ .$$

Si chiama *limite laterale destro* di $f(x)$ per x tendente a x_0 e si scrive

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

il limite

$$\lim_{x \to x_0} f_{\mathcal{D}(f)_{x_0^+}}(x) \ .$$

Proposizione 16.12. *Sia $x_0 \in \mathcal{D}(f)'$. Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.*

Dimostrazione. La parte necessaria della proposizione è vera per quanto osservato all'inizio di questo Paragrafo.
Per la parte sufficiente se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta'_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)_{x_0^-}$, con $0 < |x - x_0| < \delta'_\varepsilon$, si abbia $|f_{\mathcal{D}(f)_{x_0^-}}(x) - \ell| < \varepsilon$, cioè, per $x_0 - \delta'_\varepsilon < x < x_0$, si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
In modo simile se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$, per lo stesso $\varepsilon > 0$ esiste $\delta''_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)_{x_0^+}$, con $0 < |x - x_0| < \delta''_\varepsilon$, si abbia $|f_{\mathcal{D}(f)_{x_0^+}}(x) - \ell| < \varepsilon$, cioè, per $x_0 < x < x_0 + \delta''_\varepsilon$, si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Si prenda allora $\delta_\varepsilon = \min\{\delta'_\varepsilon,\ \delta''_\varepsilon\}$: per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ e cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. □

Esercizio 16.4. (i) Usando la definizione, provare che

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ 0 < a < 1 \\ -\infty & \text{se } \ a > 1 \ . \end{cases}$$

ii) Usando la Proposizione 16.12 precedente e l'Esercizio 16.3 provare che

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e \ .$$

Osservazione 16.1. (a) Una semplice applicazione della Proposizione 16.8 e dell'Esercizio 16.4 danno

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e \quad , \quad \forall\, a > 0,\ a \neq 1 \ . \tag{16.9}$$

(b) Dalla (16.9) segue che

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad , \quad \forall\, a > 0,\ a \neq 1\ . \tag{16.10}$$

Infatti per la (a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log_a(1+x)^{1/x} = \log_a(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}) = \log_a e\ .$$

Per la (b) si consideri la funzione

$$g(y) = \frac{y}{\log_a (y+1)}$$

definita per $y > -1$. Allora

$$\lim_{y\to 0} g(y) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\log_a(1+y)^{1/y}} = \frac{1}{\log_a e} = \log a\ .$$

Per $f(x) = a^x - 1$ si ottiene

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{\log_a \big(f(x)+1\big)} = \frac{a^x - 1}{x}\ ,$$

dunque dalla Proposizione 16.6

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} (g\circ f)(x) = \lim_{y\to 0} g(y) = \log a\ .$$

Per le funzioni monotòne il calcolo dei limiti è ricondotto a determinare degli estremi e precisamente si dimostra

Proposizione 16.13. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione decrescente o strettamente decrescente. Se $x_0 \in \mathcal{D}(f)'_{x_0^-}$ allora*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \inf_{x\in\mathcal{D}(f)_{x_0^-}} f\ ,$$

se $x_0 \in \mathcal{D}(f)'_{x_0^+}$ allora

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \sup_{x\in\mathcal{D}(f)_{x_0^+}} f\ .$$

Analogamente, sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione crescente o strettamente crescente. Se $x_0 \in \mathcal{D}(f)'_{x_0^-}$ allora

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{x\in\mathcal{D}(f)_{x_0^-}} f\ ,$$

se $x_0 \in \mathcal{D}(f)'_{x_0^+}$ allora

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf_{x\in\mathcal{D}(f)_{x_0^+}} f\ .$$

17. Infinitesimi ed infiniti

17.1. **Infinitesimi.**

Definizione 17.1. Una funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ si dice *infinitesima* o un *infinitesimo* per x tendente a $x_0 \in \mathcal{D}(f)'$ se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \ .$$

Siano f, g due infinitesimi per x tendente a $x_0 \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathcal{D}(g)'$. Se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \ell \neq 0 & , \quad f,g \ \text{ sono infinitesimi dello stesso ordine} \\ 0 & , \quad f \ \text{ è un infinitesimo di ordine superiore a } \ g \\ \infty & , \quad f \ \text{ è un infinitesimo di ordine inferiore a } \ g \\ \text{non esiste} & , \quad f \ \text{ e } \ g \ \text{ non sono confrontabili .} \end{cases}$$

Due infinitesimi dello stesso ordine si dicono *confrontabili.* In tal caso di scrive[5] $f = O(g)$ o anche $g = O(f)$. Se invece f è un infinitesimo di ordine superiore a g (ovvero g è un infinitesimo di ordine inferiore a f) si scrive[6] $f = o(g)$; equivalentemente se g è un infinitesimo di ordine superiore a f (ovvero f è un infinitesimo di ordine inferiore a g) si scrive $g = o(f)$.
Tra tutti gli infinitesimi per x tendente a x_0 c'è l'*infinitesimo fondamentale*

$$\varphi_{x_0}(x) = x - x_0 \ ;$$

si dice allora che un infinitesimo $f(x)$ per x tendente a x_0 è di *ordine* $\alpha > 0$ se è confrontabile con $\varphi_{x_0}(x)^\alpha$, ovvero se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} = \ell \neq 0 \ .$$

Definizione 17.2. Una funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ si dice *infinitesima* o un *infinitesimo* per x tendente a $-\infty$ oppure per x tendente a $+\infty$ se

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \ .$$

Si definiscono, così come fatto sopra per gli infinitesimi per x tendente a x_0, gli ordini di due infinitesimi di questo tipo e valgono le stesse considerazioni e scritture. In questo caso, però, l'*infinitesimo fondamentale* è

$$\psi(x) = \frac{1}{|x|} \ \text{ per } x \to -\infty \quad , \quad \psi(x) = \frac{1}{x} \ \text{ per } x \to +\infty \ ,$$

pertanto per decidere l'ordine di un infinitesimo per x tendente a $\mp\infty$, il confronto va fatto con le potenze di ordine $\alpha > 0$ di tali funzioni test. Si parla anche di infinitesimi per x tendente a x_0^- e per x tendente a x_0^+.

---
[5]Si legge "fè un o grande di g".
[6]Si legge "f è un o piccolo di g".

Esempio 17.1.

(i) $f(x) = \sin x$ è un infinitesimo del primo ordine per x tendente a 0 (cfr. Proposizione 16.7). Di conseguenza

(ii) $f(x) = 1 - \cos x$ è un infinitesimo del secondo ordine per x tendente a 0.

(iii) $f(x) = \tan x$ è un infinitesimo del primo ordine per x tendente a 0. Infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \, \frac{1}{\cos x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\right) = 1 \; .$$

(iv) Diversa è la situazione per la funzione

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

quando x tende a 0. Infatti si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} x^{1-\alpha} \sin \frac{1}{x} = \begin{cases} 0 & \text{per } \; 0 < \alpha < 1 \\ \text{non esiste} & \text{per } \; \alpha \geq 1 \; . \end{cases}$$

(v) $f(x) = a^x$, per $0 < a < 1$, è infinitesima per x tendente a $+\infty$ e si ha $a^x = o(\frac{1}{x^\alpha})$ per ogni $\alpha > 0$. Infatti se $0 < a < 1$ allora

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{\left(\frac{1}{a}\right)^n} = 0 \; .$$

Sia $n = [x]$, allora si ha $a^{n+1} \leq a^x \leq a^n$, $n^\alpha \leq x^\alpha \leq (n+1)^\alpha$ e dunque

$$n^\alpha a^n a \leq x^\alpha a^x \leq (n+1)^\alpha \, \frac{a^{n+1}}{a} \; .$$

Ne segue che $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha a^x = 0$, per ogni $\alpha > 0$.

Senza precisare ulteriormente il comportamento della variabile x, diamo la seguente

Definizione 17.3. Due infinitesimi f, g si dicono *equivalenti* se la loro differenza $h = g - f$ è un infinitesimo di ordine superiore sia ad f che a g, i.e.

$$h = o(f) \quad \text{e} \quad h = o(g) \; .$$

In tal caso si scrive $f \sim g$.

Osservazione 17.1. Con le notazioni precedenti, se $h = o(f)$ allora è anche $h = o(g)$, e viceversa, se $h = o(g)$ allora è anche $h = o(f)$.
Infatti assumendo che ad esempio f, g siano infinitesimi per x tendente a x_0, se $h = o(f)$, si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{f(x) + h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)/f(x)}{1 + h(x)/f(x)} = 0 \; .$$

Se invece $h = o(g)$ basta considerare che $f(x) = g(x) - h(x)$ e procedere come prima.
Analogamente si opera per $x \to \pm\infty$.

Si dimostra che se f, g sono infinitesimi per x tendente a x_0 allora

$$f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e analoga equivalenza si ha per $x \to \pm\infty$.

17.2. **Infiniti.**

Definizione 17.4. Una funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ si dice un *infinito* per x tendente a $x_0 \in \mathcal{D}(f)'$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \; .$$

Siano f, g due infiniti per x tendente a $x_0 \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathcal{D}(g)'$. Se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \ell \neq 0 & , \quad f, g \;\text{ sono infiniti dello stesso ordine} \\ 0 & , \quad f \;\text{ è un infinito di ordine inferiore a }\; g \\ \infty & , \quad f \;\text{ è un infinito di ordine superiore a }\; g \\ \text{non esiste} & , \quad f \text{ e } g \;\text{ non sono confrontabili .} \end{cases}$$

Due infiniti dello stesso ordine si dicono anche *confrontabili*.
Tra tutti gli infiniti per x tendente a x_0 c'è l'*infinito fondamentale*

$$\Phi_{x_0}(x) = \frac{1}{x - x_0} \; ;$$

si dice allora che un infinito $f(x)$ per x tendente a x_0 è di *ordine* $\alpha > 0$ se è confrontabile con $\Phi_{x_0}(x)^\alpha$, ovvero se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{(x - x_0)^\alpha}} = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^\alpha f(x) = \ell \neq 0 \; .$$

Definizione 17.5. Una funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ si dice un *infinito* per x tendente a $-\infty$ oppure a $+\infty$ se

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty \; .$$

Anche in questi casi si definiscono gli ordini di due infiniti e valgono le stesse considerazioni fatte sopra per gli infiniti per x tendente a x_0. Tuttavia in questo caso l'*infinito fondamentale* è la funzione

$$\Psi(x) = |x| \;\text{ per }\; x \to -\infty \quad , \quad \Psi(x) = x \;\text{ per }\; x \to +\infty$$

e pertanto, per decidere l'ordine di un infinito per x tendente a $\mp\infty$, il confronto va fatto con le potenze di ordine $\alpha > 0$ di tali funzioni test.
Analoghe definizioni di infinito si danno per x tendente a x_0^+ e per x tendente a x_0^-.

Esempio 17.2.

(i) Un polinomio nella variabile x di grado $n \geq 1$,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad , \quad a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ ,$$

è un infinito di ordine n per x tendente a $+\infty$. Infatti $\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{x^n} = a_n \neq 0$.

(ii) $f(x) = \log_a x$, per ogni $a > 0$, $a \neq 1$, è un infinito per x tendente a $+\infty$ di ordine inferiore ad ogni $\alpha > 0$. Infatti per ogni $a > 0$, $a \neq 1$, è $\lim_{n\to\infty} (\log_a n)/n^\alpha = 0$ per ogni $\alpha > 0$. Posto $n = [x] > 0$, da $[x] \leq x \leq [x] + 1$ si ha $n^\alpha \leq x^\alpha \leq (n+1)^\alpha$; se $a > 1$, $\log_a n \leq \log_a x \leq \log_a(n+1)$, da cui $\frac{\log_a n}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{\log_a x}{x^\alpha} \leq \frac{\log_a n+1}{n^\alpha}$; dunque $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$ (si noti che siccome $x \to +\infty$, è $x > 0$ e quindi x^α è definito per ogni $\alpha > 0$).
In modo analogo si procede per il caso $0 < a < 1$.

(iii) $f(x) = \log_a x$, per $a > 0$, $a \neq 1$, è un infinito per x tendente a 0^+ di ordine inferiore ad ogni $\alpha > 0$. Più precisamente si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ 0 < a < 1 \\ -\infty & \text{se } \ a > 1\ . \end{cases}$$

Infatti se si pone $y = \frac{1}{x}$ allora

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \lim_{y\to+\infty} \log_a \frac{1}{y} = -\lim_{y\to+\infty} \log_a y$$

dove $\log_a y$ è un infinito di ordine inferiore ad ogni funzione y^α per $\alpha > 0$. Pertanto $\log_a x$ è un infinito di ordine inferiore ad ogni funzione $\frac{1}{x^\alpha}$ per qualsiasi $\alpha > 0$.

(iv) $f(x) = a^x$, per $a > 1$, è un infinito per x tendente a $+\infty$ di ordine superiore ad ogni $\alpha > 0$.
Infatti se $a > 1$ dal fatto che $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$, posto $n = [x]$ si ha $\frac{a^x}{x^\alpha} \geq \frac{a^n}{(n+1)^\alpha}$ per ogni $\alpha > 0$ e da questo segue che $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$.

18. Asintoti

Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in \mathcal{D}(f)'$. Se f è un infinito per x tendente a x_0 allora la retta di equazione $x = x_0$ si chiama *asintoto verticale* di f in x_0.

Si chiama *asintoto di f per x tendente a $-\infty$* una retta $y = mx + n$ tale che

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0\ .$$

Osservazione 18.1. Sia $y = mx + n$ un asintoto di f per x tendente a $-\infty$. Allora i coefficienti m e n sono determinati da

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad n = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx]\ . \tag{18.1}$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)-(mx+n)+(mx+n)}{x} = \\ &= \left(\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)-(mx+n)}{x}\right)+m+\lim_{x\to-\infty}\frac{n}{x}=m\ , \\ \lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx) &= \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(mx+n)+n]=n\ .\end{aligned}$$

Se $m = 0$ allora la retta $y = n$ si dice *asintoto orizzontale di* f *per* $x \to -\infty$. In tal caso

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) - n + n = n\ .$$

Se invece $m \neq 0$ allora la retta $y = mx + n$ si dice *asintoto obliquo di* f *per* $x \to -\infty$. In tal caso

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(mx+n)+(mx+n)] = \infty$$

quindi f è un infinito per $x \to -\infty$ e dalla prima delle (18.1) è del primo ordine.

Viceversa se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = n$ per $n \in \mathbb{R}$, allora la retta $y = n$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$: infatti sarebbe $\lim_{x\to-\infty} f(x) - n = 0$.

Se invece f è un infinito del primo ordine per $x \to -\infty$ allora esiste $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, tale che

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = m\ .$$

Se in tal caso esiste finito il

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx] = n$$

allora la retta $y = mx + n$ è un asintoto obliquo di f per x tendente a $-\infty$, infatti

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(mx+n)] = \left(\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]\right) - n = 0\ .$$

Allo stesso modo si definiscono gli asintoti orizzontali e obliqui di una funzione f per x tendente a $+\infty$ ottenendo per essi gli analoghi risultati e considerazioni su esposti.

IV - Continuità di una funzione

Il concetto di continuità di una funzione è *puntuale* cioè è una definizione che si dà in un punto in cui la funzione è definita. Se poi tale proprietà si ripete per ogni punto di un dato insieme dove la funzione è definita allora si parla di continuità della funzione in quell'insieme. Diverso è il concetto di continuità uniforme (anch'esso dato in questo capitolo) che invece è *globale* (i.e. la definizione di continuità uniforme si dà in un insieme e non in un punto) e rappresenta per una funzione un modo particolare di essere continua, nel senso che, comunque si prendano due punti-immagine arbitrariamente vicini tra loro, i corrispondenti punti nell'insieme dove la funzione è continua, sono, per così dire, "canonicamente vicini tra loro".
In questo capitolo si trovano il teorema degli zeri di una funzione continua, la proprietà di trasformare insiemi connessi in insiemi connessi, il teorema di Weierstrass e il teorema di Cantor (solo enunciato). Si danno anche alcuni risultati sulla continuità dell'inversa di una funzione continua.

19. Generalità

Definizione 19.1. Si dice che una funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ è *continua in un punto* $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ se per ogni intorno $I\big(f(x_0), \varepsilon\big)$ esiste un intorno $I(x_0, \delta_\varepsilon)$, con δ_ε dipendente eventualmente anche da x_0, tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f) \cap I(x_0, \delta_\varepsilon)$, sia $f(x) \in I\big(f(x_0), \varepsilon\big)$.

• In altre parole, una funzione è continua in $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$, dipendente eventualmente anche da x_0, tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$ con $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, si abbia $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Un punto $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ o è un punto isolato o è un punto di accumulazione del dominio; se x_0 è un punto isolato del dominio allora f è sempre continua in x_0; se x_0 è un punto di accumulazione del dominio allora dire che f è continua in x_0 equivale a dire che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ .$$

È lasciato per esercizio al lettore provare che la proprietà di continuità in un punto si conserva per prodotto per scalari, somma, prodotto e quoziente (dove questo definito) di funzioni continue. La proprietà di continuità si conserva anche per composizione di funzioni continue nel senso che si ha la seguente

Proposizione 19.1. *Siano $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ e $g : \mathcal{D}(g) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $f(x_0) \in \mathcal{D}(g)$, con $\mathcal{D}(g) = \mathcal{R}(f)$. Allora $g \circ f$ è continua in x_0.*

Dimostrazione. Dalla continuità di g in $f(x_0)$, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\eta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $y \in \mathcal{D}(g)$ con $|y - f(x_0)| < \eta_\varepsilon$, si abbia $|g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$. Dalla continuità della f in x_0, in corrispondenza a η_ε esiste $\delta_{\eta_\varepsilon} = \delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, si abbia $|f(x) - f(x_0)| < \eta_\varepsilon$. Allora $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ per $x \in \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g \circ f)$, con $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$. Perciò $g \circ f$ è continua in x_0. $\square$

Teorema 19.1 (della permanenza del segno). *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $x_0 \in \mathcal{D}(f)$. Se $f(x_0) < 0$ allora esiste un intorno $I(x_0, \delta)$ tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f) \cap I(x_0, \delta)$, sia $f(x) < 0$. In modo analogo, se $f(x_0) > 0$ allora esiste un intorno $I(x_0, \delta)$ tale che per ogni $x \in \mathcal{D}(f) \cap I(x_0, \delta)$ sia $f(x) > 0$.*

Dimostrazione. Se x_0 è un punto isolato del dominio, il risultato è ovvio. Se x_0 è un punto di accumulazione del dominio il risultato segue dal Teorema 16.4 della permanenza del segno per i limiti. □

20. Punti di discontinuità

Si è osservato che se $x_0 \in \mathcal{D}(f)'$ allora dire che f è continua in x_0 equivale a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

dunque in tal caso

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \, .$$

Se questo non accade si dice che f è *discontinua in* $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ e x_0 si chiama *punto di discontinuità della funzione* f.
Per un punto di discontinuità $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ si possono verificare i seguenti casi:

I. $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ *esistono finiti ma sono diversi tra loro*: in tal caso x_0 si dice un *punto di salto di f* o *punto di discontinuità di f di I specie* e si chiama *salto di f* il numero reale

$$s(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^+) - f(x_0^-)$$

dove

$$f(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x) \in \mathbb{R} \quad , \quad f(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R} \, ;$$

II. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ *oppure* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$: in tal caso x_0 si dice un *punto di discontinuità di f di II specie*;

III. *almeno uno dei due limiti* $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ *non esiste*: in tal caso x_0 si dice un *punto di discontinuità di f di III specie.*

Se f è una funzione monotòna allora i suoi eventuali punti di discontinuità possono essere soltanto di I specie. Infatti se, ad esempio, f è decrescente e $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ allora

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf_{\mathcal{D}(f)_{x_0^-}} f \quad , \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup_{\mathcal{D}(f)_{x_0^+}} f \, ,$$

dunque i suoi limiti laterali esistono sempre. Inoltre dalla decrescenza di f, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)_{x_0^-}$ si ha $f(x) \geq f(x_0)$, perciò $f(x_0)$ è un minorante di $f\big(\mathcal{D}(f)_{x_0^-}\big)$, di conseguenza $\inf_{\mathcal{D}(f)_{x_0^-}} f$ è finito. Allo stesso modo, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)_{x_0^+}$, è $f(x) \leq f(x_0)$, perciò $f(x_0)$ è un maggiorante di $f\big(\mathcal{D}(f)_{x_0^+}\big)$, di conseguenza $\sup_{\mathcal{D}(f)_{x_0^+}} f$ è finito.

In modo simile si ragiona se f è una funzione strettamente decrescente oppure crescente o strettamente crescente.

21. Funzioni continue in insiemi

Definizione 21.1. Sia $A \subseteq \mathcal{D}(f)$; si dice che f è *continua in* (o *su*) A se f è continua in ogni punto x_0 di A.

• Questo equivale a dire che per ogni $x_0 \in A$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon(x_0) > 0$, dipendente eventualmente da x_0, tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$, con $|x - x_0| < \delta_\varepsilon(x_0)$, si abbia $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Si ha la seguente caratterizzazione per le funzioni continue:

Proposizione 21.1. *Una funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ è continua in $\mathcal{D}(f)$ se e solo se per ogni aperto $B \subset \mathbb{R}$ l'immagine inversa $f^{-1}(B)$ è un insieme aperto relativamente a $\mathcal{D}(f)$, cioè $f^{-1}(B) = \mathcal{B} \cap \mathcal{D}(f)$ per qualche aperto $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}$.*

Osservazione 21.1. Se $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ allora nell'enunciato precedente $f^{-1}(A)$ è un aperto di $\mathbb{R}$.

Si dimostra il seguente

Teorema 21.1 (degli zeri di una funzione continua). *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in un sottoinsieme connesso $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ e siano $a, b \in A$ tali che $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Osservazione 21.2. Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in un intervallo $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ e sia $y_0 \in \mathbb{R}$. Se $f(a) < y_0 < f(b)$ per qualche $a, b \in A$, allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = y_0$.
Basta applicare il Teorema 21.1 alla funzione $g(x) = f(x) - y_0$ continua in A.

Osservazione 21.3. Sia f una funzione continua in un intervallo A. Allora

$$(\inf_A f, \sup_A f) \subseteq f(A) \, .$$

Infatti sia $y \in (\inf_A f, \sup_A f)$: dalla definizione di estremo inferiore e di estremo superiore di una funzione, esistono $y', y'' \in f(A)$ (dipendenti da y) tali che $y' < y < y''$, dove $y' = f(a)$, $y'' = f(b)$ per qualche $a, b \in A$. Dall'Osservazione 21.2 precedente, si ha che esiste $x \in A$ per cui $y = f(x)$, i.e. $y \in f(A)$.

Proposizione 21.2. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $\mathcal{D}(f)$. Allora essa trasforma sottoinsiemi connessi di $\mathcal{D}(f)$ in sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Sia $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ un sottoinsieme connesso: dall'Osservazione 21.3, l'intervallo $(\inf\limits_A f, \sup\limits_A f)$ è contenuto in $f(A)$. Se $\inf\limits_A f$, $\sup\limits_A f$ sono finiti allora è ovvio che $f(A) \subseteq [\inf\limits_A f, \sup\limits_A f]$. Dunque $(\inf\limits_A f, \sup\limits_A f) \subseteq f(A) \subseteq [\inf\limits_A f, \sup\limits_A f]$, perció $f(A)$ è un intervallo, cioè è un connesso di $\mathbb{R}$. Se $\inf\limits_A f = -\infty$ allora $(-\infty, \sup\limits_A f) \subseteq f(A) \subseteq (-\infty, \sup\limits_A f]$ o, in modo analogo, se $\sup\limits_A f = +\infty$ allora $(\inf\limits_A f, +\infty) \subseteq f(A) \subseteq [\inf\limits_A f, +\infty)$. Perciò anche in

questi casi $f(A)$ è un intervallo. Infine se $\inf_A f = -\infty$, $\sup_A f = +\infty$ allora $f(A) = \mathbb{R}$.
$\square$

Enunciamo adesso alcune proprietà delle funzioni continue e invertibili in intervalli. Si hanno i seguenti fatti.

Osservazione 21.4.

- Una funzione invertibile che sia continua su un intervallo è ivi strettamente monotòna.
- Viceversa, una funzione invertibile che sia strettamente monotòna in un intervallo non è in generale continua in quell'intervallo.
  Infatti si consideri la funzione
  $$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in [0,1] \\ x+1 & , \quad x \in (1,2] \end{cases} \tag{21.1}$$
  è invertibile, strettamente crescente in $[0,2]$, ma non continua in $x = 1$ perché
  $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \ , \ \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 \ .$$
- L'inversa di una funzione invertibile e continua (su un certo sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$) non è, in generale, una funzione continua.
  Infatti la funzione
  $$g(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in [0,1] \\ x-1 & , \quad x \in (2,3] \ . \end{cases}$$
  è continua in $[0,1] \cup (2,3]$, è invertibile e la sua inversa è la funzione $f(x)$ data dalla (21.1) che, come visto, è discontinua in $x = 1$.
  Tuttavia si dimostra
- *Se una funzione invertibile è continua in un intervallo allora la sua inversa f^{-1} è continua.*

Teorema 21.2. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $\mathcal{D}(f)$. Allora essa trasforma sottoinsiemi compatti di $\mathcal{D}(f)$ in sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Sia $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ un sottoinsieme compatto. Poiché i sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli i sottoinsiemi compatti per successioni (cfr. la Definizione 7.1, cap. II, § 5 e sue conseguenze), basta provare che $f(A)$ verifica quest'ultima condizione. Sia $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione contenuta in $f(A)$, con $b_n = f(a_n)$, $a_n \in A$. Poiché A è compatto per successioni, dalla successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si può estrarre una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ convergente ad un punto $x_0 \in A$. x_0 è allora un punto di accumulazione di A, quindi, dalla continuità di f, segue che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ da cui anche $\lim_{n \to \infty} f(a_{k_n}) = f(x_0)$ e $f(x_0) \in f(A)$. Pertanto la successione $\{b_{k_n} = f(a_{k_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente in $f(A)$. $\square$

Teorema 21.3 (di Weierstrass). *Una funzione continua in un insieme compatto ammette punti di minimo e di massimo.*

Dimostrazione. Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in un sottoinsieme compatto $A \subseteq \mathcal{D}(f)$. Dal Teorema 21.2 precedente, $f(A)$ è compatto e dunque (capitolo I, Teorema 2.2 di Heine-Borel), $f(A)$ è limitato e chiuso. In particolare il derivato (cfr. capitolo I, Proposizione 2.3) $f(A)'$ di $f(A)$ è contenuto in $f(A)$. Poiché $\inf f(A) = \inf\limits_A f$ e $\sup f(A) = \sup\limits_A f$, ne segue che $\inf\limits_A f > -\infty$ e $\sup\limits_A f < +\infty$ e tali estremi sono punti di accumulazione di $f(A)$. Pertanto $\inf\limits_A f \in f(A)$, $\sup\limits_A f \in f(A)$, quindi esistono x_1 e $x_2 \in A$ tali che $\inf\limits_A f = f(x_1) = \min\limits_A f$, $\sup\limits_A f = f(x_2) = \max\limits_A f$. □

22. Continuità uniforme

Definizione 22.1. Siano $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione e $A \subseteq \mathcal{D}(f)$. Si dice che f è *uniformemente continua* in A se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x_0, x \in A$, con $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, si abbia $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Questo equivale a dire che per ogni $x_0 \in A$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste[7] $\delta_\varepsilon > 0$ *che dipende solo da* ε *e non da* x_0, tale che, per ogni $x \in A$ con $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, si abbia $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

• Se una funzione è uniformemente continua in un sottoinsieme A allora essa è continua in A.

Esempio 22.1.

(i) $f(x) = x^2$ è uniformemente continua su $[-1, 1]$. Infatti per ogni $x \in [-1, 1]$ è $|x| \le 1$ e si ha
$$|x^2 - x_0^2| \le (|x| + |x_0|)|x - x_0| < 2|x - x_0| \ .$$
Per $\varepsilon > 0$, per avere $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$ basta allora scegliere $|x - x_0| < \delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è uniformemente continua in $[1, 2]$ ma non lo è in $(0, 1]$: qui è soltanto continua. Infatti se $x \in [1, 2]$ è $|x| \ge 1$ da cui
$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|x||x_0|} \le |x - x_0| \ ;$$
per $\varepsilon > 0$ basta scegliere $\delta_\varepsilon = \varepsilon$.
Se invece $x \in (0, 1]$ allora non è più possibile fare una maggiorazione simile a quella sopra (qui $|x| > 0$). Senza perdere di generalità possiamo assumere che sia $|x| > \dfrac{|x_0|}{2}$; allora $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}\right| \le 2\dfrac{|x - x_0|}{|x_0|^2}$ e quindi, scelto $\delta_\varepsilon(x_0) = \varepsilon\dfrac{|x_0|^2}{2}$, si ha $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$. Per avere l'indipendenza da x_0 si dovrebbe prendere
$\delta_\varepsilon = \min\{\delta_\varepsilon(x_0) : x_0 \in (0, 1]\} = 0$ che non va bene (deve essere $\delta_\varepsilon > 0$).

Si dimostra il seguente importante risultato

[7] È questa la differenza fondamentale tra uniforme continuità e continuità di una funzione in un sottoinsieme (del dominio).

Teorema 22.1 (di Cantor). *Ogni funzione continua in un compatto è ivi uniformemente continua.*

Definizione 22.2. Una funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ si dice *lipschitziana* in un sottoinsieme $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ se esiste una costante $L > 0$ (detta *costante di Lipschitz* di f) tale che, per ogni $x, x_0 \in A$, sia
$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| \ .$$

Proposizione 22.1. *Se $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ è lipschitziana in A allora f è uniformemente continua in A.*

Dimostrazione. Sia L la costante di Lipschitz di f. Per $\varepsilon > 0$ sia $\delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{L}$; per ogni $x, x_0 \in A$, con $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ si ha
$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < \varepsilon$$
e questo prova l'uniforme continuità di f in A. □

Esercizio 22.1. Sia $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare che se essa ha un asintoto per x tendente a $-\infty$ allora f è uniformemente continua in $(-\infty, a]$. In modo analogo, sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua; provare che se essa ha un asintoto per x tendente a $+\infty$ allora f è uniformemente continua in $[a, +\infty)$.

Proviamo, ad esempio, il risultato per f che ha un asintoto obliquo per x tendente a $-\infty$, (essendo, tra l'altro, simile il caso $x \to +\infty$).
Sia $y = mx + n$, $m \neq 0$, l'asintoto di f in questione; poiché $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$, dal criterio di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon < 0$ tale che, per $x, x_0 \in (-\infty, x_\varepsilon)$, si abbia
$$|f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)| = |[f(x) - (mx + n)] - [f(x_0) - (mx_0 + n)]| < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$
Nell'intervallo $[x_\varepsilon, a]$ la funzione f è uniformemente continua (f è continua in $(-\infty, a]$) quindi in corrispondenza a ε esiste $\delta'_\varepsilon > 0$ tale che, per $x, x_0 \in [x_\varepsilon, a]$, con $|x - x_0| < \delta'_\varepsilon$, si abbia $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Si consideri il numero reale positivo $\delta_\varepsilon = \min\{\delta'_\varepsilon \ , \ \dfrac{\varepsilon}{2|m|}\}$: esso dipende solo da ε.

(1) Se $x, x_0 \in [x_\varepsilon, a]$ sono tali che $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, allora $|x - x_0| < \delta'_\varepsilon$, quindi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
(2) Se invece $x, x_0 \in (-\infty, x_\varepsilon)$ sono tali che $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ allora da
$$\big|\, |f(x) - f(x_0)| - |m|\, |x - x_0| \,\big| \leq |f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
si ricava
$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + |m|\, |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + |m|\, \delta_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2} + |m|\, \frac{\varepsilon}{2|m|} = \varepsilon \ .$$

Questo prova anche l'uniforme continuità di f in $(-\infty, x_\varepsilon)$.
In conclusione f è uniformemente continua in $(-\infty, a]$.

V - Differenziabilità di una funzione

Il concetto di *derivabilità* (o *differenziabilità*) di una funzione di una variabile reale è, come la continuità, un concetto puntuale. Di conseguenza la derivabilità in un insieme la si ottiene richiedendo la derivabilità della funzione in ogni punto dell'insieme in questione. In questo capitolo (oltre alla definizione e alle prime proprietà di una funzione derivabile in un punto) si trovano le regole di derivazione, la derivata dell'inversa di una funzione invertibile, i teoremi di Rolle, di Lagrange e di Cauchy e i teoremi di de l'Hôpital.
È riportato anche un breve cenno alle funzioni di classe $C^n(A)$.

23. Derivata di una funzione

Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$. Si dà la seguente

Definizione 23.1. Una funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ si dice *derivabile* (o *differenziabile*) in un punto $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$ se esiste un'applicazione lineare $L_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L_{x_0}(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \ .$$

Osservazione 23.1. Le applicazioni lineari da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono tutte e sole le funzioni del tipo $L(x) = ax$, dove $a \in \mathbb{R}$.
Infatti ogni funzione del tipo $L(x) = ax$, per $a \in \mathbb{R}$, è banalmente lineare. Viceversa se L è lineare allora $L(x) = L(x \cdot 1) = xL(1) = L(1)x$. Posto $a = L(1)$ è allora $L(x) = ax$.

Dall'Osservazione 23.1 precedente segue che f è derivabile in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$ se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \tag{23.1}$$

ovvero

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \ . \tag{23.2}$$

Quindi f è derivabile in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$ se il limite dato dalla (23.2) esiste finito.

• Il rapporto

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si chiama *rapporto incrementale di f in x_0*.

• Se f è derivabile in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$, il numero reale a si chiama la *derivata di f in x_0* e si indica con una delle scritture

$$f'(x_0) \quad , \quad Df(x_0) \quad , \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad , \quad \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0} \ ,$$

cioè

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{23.3}$$

Sia f una funzione derivabile in un punto x_0 e si prendano $P_0 = (x_0, f(x_0))$, $P_1 = (x_1, f(x_1)) \in G_f$, distinti (i.e. $x_1 \neq x_0$): la retta che passa per essi ha equazione

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) \ .$$

Se x_1 tende a x_0, questa retta tende alla tangente in P_0 a G_f: essa ha equazione

$$y = f(x_0) + m_0(x - x_0) \quad \text{dove} \quad m_0 = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0) \ .$$

Una qualunque retta per P_0 ha equazione $a(x - x_0) + b(y - f(x_0)) = 0$; se[8] $b \neq 0$, la retta ha equazione $y = f(x_0) + m(x - x_0)$, $m = -\dfrac{a}{b}$.
Sia $R_1(x; x_0) = f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]$; allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x; x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right) \ .$$

Poiché f è derivabile in x_0, tale limite è 0 se e solo se $m = f'(x_0)$, cioè se e solo se la retta che realizza

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x; x_0)}{x - x_0} = 0$$

è la retta tangente a G_f in $P_0 = (x_0, f(x_0))$ (ed è dunque l'unica retta che meglio approssima il grafico di f in un intorno di x_0).

Esempio 23.1.

(i) Una funzione costante ha derivata nulla in ogni punto interno del suo dominio. Infatti sia $f(x) = c$ per ogni $x \in A \subseteq \mathbb{R}$. Se $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ allora è $f(x) - f(x_0) = 0$ per ogni $x \in A$ e banalmente la (23.1) dà $f'(x_0) = 0$.

(ii) Se $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, allora $f'(x_0) = n\, x_0^{n-1}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Infatti sia $x_0 \in \mathbb{R}$ allora da $x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1-k} \left(\lim_{x \to x_0} x^k \right) = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1} = n\, x_0^{n-1} \ .$$

[8] Se $b = 0$ allora la retta $x = x_0$ intersecherebbe G_f solo in P_0 perché se ciò non accadesse, f non sarebbe una funzione; inoltre se la retta $x = x_0$ fosse tangente a G_f in P_0, sarebbe $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ e questo contraddirebbe la derivabilità di f in x_0.

(iii) Se $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sin x$ allora $f'(x_0) = -\sin x_0$, $g'(x_0) = \cos x_0$, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Infatti, dalle formule di prostaferesi e tenuto conto del limite notevole (16.8), si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\lim_{x \to x_0} \frac{\sin \dfrac{x - x_0}{2} \sin \dfrac{x + x_0}{2}}{\dfrac{x - x_0}{2}} =$$

$$= -\left(\lim_{x \to x_0} \frac{\sin \dfrac{x - x_0}{2}}{\dfrac{x - x_0}{2}} \right) \left(\lim_{x \to x_0} \sin \frac{x + x_0}{2} \right) = -\sin x_0 \, .$$

In modo analogo si procede per la derivata della funzione $\sin x$.

(iv) Se $f(x) = a^x$ allora $f'(x_0) = a^{x_0} \log a$, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Infatti, tenuto conto della (16.10), si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{a^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \log a \, .$$

In particolare se $f(x) = e^x$ allora $f'(x_0) = e^{x_0}$, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

Osservazione 23.2. Se una funzione f non è derivabile nel punto $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$, questo significa che il limite del rapporto incrementale di f in x_0 non esiste finito. Se accade che

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1 \neq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_2$$

allora il punto di non derivabilità x_0 si chiama *punto angoloso* di f. Se invece almeno uno tra i limiti

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad , \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è infinito allora il punto x_0 si chiama *punto di cuspide* di f.

Proposizione 23.1. *Una funzione derivabile in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$ è ivi continua.*

Dimostrazione. Un punto $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$ è in particolare un punto di accumulazione: basta allora provare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \, .$$

Dalla definizione di limite, si può sempre supporre che sia $x \neq x_0$ e dunque

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0) \big) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) =$$

$$= \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \left(\lim_{x \to x_0} (x - x_0) \right) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \, .$$

L'asserto allora è ovvio. □

Definizione 23.2. Un punto $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$ in cui f sia derivabile si dice *punto estremale* (o *critico* o *stazionario*) se $f'(x_0) = 0$.

Definizione 23.3. Un punto $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ si dice *punto di minimo relativo* (o *punto di minimo locale*) se esiste un intorno $I(x_0, r)$ tale che, per ogni $x \in I(x_0, r) \cap \mathcal{D}(f)$, sia $f(x) \geq f(x_0)$.
Un punto $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ si dice *punto di massimo relativo* (o *punto di massimo locale*) se esiste un intorno $I(x_0, r)$ tale che, per ogni $x \in I(x_0, r) \cap \mathcal{D}(f)$, sia $f(x) \leq f(x_0)$.

• In particolare i punti di minimo e di massimo di una funzione sono rispettivamente punti di minimo e massimo relativi.

Si chiamano *punti di estremo relativo* o *locale* (o anche *punti estremanti*) i punti di minimo o di massimo relativo.

Proposizione 23.2. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$ e sia esso un punto di estremo locale. Allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Per fissare le idee, sia x_0 un punto di minimo relativo: esiste dunque un intorno $I(x_0, r)$ tale che, per $x \in I(x_0, r) \cap \mathcal{D}(f)$, sia $f(x) \geq f(x_0)$, cioè $f(x) - f(x_0) \geq 0$. Se $x_0 - r < x < x_0$ allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \implies \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \, .$$

Se $x_0 < x < x_0 + r$ allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \implies \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \, .$$

Poiché f è derivabile in x_0, segue che

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

da cui $f'(x_0) = 0$. □

• Pertanto un punto estremante di una funzione derivabile in quel punto è un punto estremale, mentre se un punto è estremale, non è detto che esso sia estremante.
Ad esempio per la funzione $f(x) = x^3$ il punto $x_0 = 0$ è un punto estremale ($f'(x) = 3x^2$). Se $x \in I(0, r)$, per qualche $r > 0$, e $x < 0$ allora $f(x) = x^3 < 0 = f(0)$, se invece $x > 0$ allora $f(x) = x^3 > 0 = f(0)$. Dunque $x_0 = 0$ non è né un punto di minimo né un punto di massimo locale di f.

24. Regole di derivazione

Dalla definizione di derivata in un punto e dalle proprietà dei limiti si ha

Proposizione 24.1.

(i) *Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e f è derivabile in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$ allora λf è derivabile in x_0 e*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0) \, .$$

(ii) *Se f, g sono derivabili in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)} \cap \overset{\circ}{\mathcal{D}(g)}$ allora $f + g$ è derivabile in x_0 e*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \, .$$

(iii) *Se f, g sono derivabili in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f) \cap \overset{\circ}{\mathcal{D}}(g)$, allora fg è derivabile in x_0 e*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \; .$$

(iv) *Se f è derivabile in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$ e $f(x_0) \neq 0$ allora $\dfrac{1}{f}$ è derivabile in x_0 e*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2} \; .$$

(v) *Se f, g sono derivabili in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f) \cap \overset{\circ}{\mathcal{D}}(g)$ e $g(x_0) \neq 0$, allora*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \; .$$

Dimostrazione. Per (i) e (ii) basta usare la definizione di derivata in un punto. Per la (iii) si ha:

$$\begin{aligned}(fg)(x) - (fg)(x_0) &= f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = \\ &= f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) = \\ &= [f(x) - f(x_0)]g(x) + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]\end{aligned}$$

da cui, dalla definizione di derivata in x_0,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \; .$$

In x_0 la funzione g, essendo derivabile, è continua e dunque

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \; .$$

Questo prova sia la derivabilità di fg in x_0 sia la formula asserita.

Per la (iv) si noti che poiché f è derivabile in x_0, f è continua in x_0; se $f(x_0) \neq 0$, allora dal teorema della permanenza del segno per le funzioni continue, esiste un intorno di x_0, $I(x_0, \delta)$, tale che, per $x \in I(x_0, \delta) \cap \mathcal{D}(f)$ sia $f(x) \neq 0$ cosicché si può scrivere:

$$\frac{\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x)f(x_0)(x - x_0)} = -\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \, \frac{1}{f(x)f(x_0)} \; .$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

che prova sia la derivabilità di $\dfrac{1}{f}$ in x_0 sia la formula asserita.

La (v) è una diretta conseguenza delle (iii) e (iv): infatti

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\,\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) =$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \; .$$

$\square$

Esempio 24.1.

(i) Si consideri le funzioni

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

definite per $x \in \mathbb{R}$, dette rispettivamente *coseno iperbolico* e *seno iperbolico*. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \quad , \quad \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \ .$$

Infatti, essendo somma di funzioni derivabili in $\mathbb{R}$, esse sono derivabili in ogni punto $x \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} e^x + \frac{d}{dx} e^{-x} \right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

e analogamente

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} e^x - \frac{d}{dx} e^{-x} \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \ .$$

Si noti che

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

perché

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4} \left[\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \left[e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x} \right] = 1 \ .$$

(ii) Dalla (v) della Proposizione 24.1 si ricava che

$$\frac{d}{dx} \tan x = 1 + \tan^2 x \quad , \quad \text{per } x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \ k \in \mathbb{Z} \ ,$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\left(1 + \cot^2 x\right) \quad , \quad \text{per } x \in (k\pi, (k+1)\pi), \ k \in \mathbb{Z} \ ,$$

Infatti

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \ ,$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \ .$$

Si noti che è anche

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad , \quad \frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} \ .$$

(iii) Si chiamano rispettivamente *tangente iperbolica* e *cotangente iperbolica* le funzioni

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad , \quad \coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

definite la prima per $x \in \mathbb{R}$ e la seconda per $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Allora

$$\frac{d}{dx}\tanh x = 1 - \tanh^2 x\ ,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \frac{d}{dx}\coth x = 1 - \coth^2 x\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ .$$

Infatti

$$\frac{d}{dx}\ \tanh x = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x}\ .$$

Si noti che è anche

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad , \quad \frac{d}{dx}\coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x}\ .$$

Si dimostrano le seguenti due proposizioni.

Proposizione 24.2. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in \mathring{\mathcal{D}(f)}$ e $g : \mathcal{D}(g) \to \mathbb{R}$, con $\mathcal{R}(f)\cap\mathcal{D}(g) \neq \emptyset$, derivabile in $f(x_0) \in \mathring{\mathcal{D}(g)}$. Allora $g\circ f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 e*

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)\ .$$

Proposizione 24.3 (derivata della funzione inversa). *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione invertibile e continua in un connesso $A \subseteq \mathcal{D}(f)$, derivabile in $x_0 \in \mathring{A}$ con $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e*

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right) = \frac{1}{f'(x_0)}\ .$$

Esempio 24.2. Usando la proposizione precedente si ha:

(i) per $x_0 \in (-1,1)$,

$$\frac{d}{dx}\arcsin x\bigg|_{x=x_0} = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}\ ,$$

$$\frac{d}{dx}\arccos x\bigg|_{x=x_0} = -\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}\ ;$$

(ii) per $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx}\arctan x\bigg|_{x=x_0} = \frac{1}{1+x_0^2}\ ,$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{arccot} x\bigg|_{x=x_0} = -\frac{1}{1+x_0^2}\ .$$

Infatti la funzione $f(y) = \sin y$ è invertibile per $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; la sua inversa è $f^{-1}(x) = \arcsin x$, $x \in [-1,1]$. Sia $x_0 \in (-1,1)$: allora esiste unico $y_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tale che $x_0 = f(y_0) = \sin y_0$. Dunque dalla Proposizione 24.3 si ha:

$$\frac{d}{dx}\arcsin x\bigg|_{x=x_0} = \frac{d}{dx}f^{-1}(x)\bigg|_{x=f(y_0)} = (f^{-1})'(f(y_0)) = \frac{1}{f'(y_0)} =$$

$$= \frac{1}{\cos y_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} \ .$$

Se invece $f(y) = \cos y$, allora essa è invertibile per $y \in [0, \pi]$. L'inversa è $f^{-1}(x) = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$. Sia $x_0 \in (-1, 1)$, allora esiste unico $y_0 \in (0, \pi)$ tale che $x_0 = f(y_0) = \cos y_0$. Pertanto

$$\frac{d}{dx} \arccos x \Big|_{x=x_0} = \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \Big|_{x=f(y_0)} = (f^{-1})'(f(y_0)) =$$

$$= \frac{1}{f'(y_0)} = -\frac{1}{\sin y_0} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y_0}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} \ .$$

Le funzioni $f(y) = \tan y$, $g(y) = \cot y$ sono invertibili rispettivamente per $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $y \in (0, \pi)$. Si ha $f^{-1}(x) = \arctan x$ e $g^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$, per $x \in \mathbb{R}$. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ allora esistono unici $y_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $y_0' \in (0, \pi)$ tali che $x_0 = f(y_0) = \tan y_0$ e $x_0 = g(y_0') = \cot y_0'$. Allora

$$\frac{d}{dx} \arctan x \Big|_{x=x_0} = \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \Big|_{x=f(y_0)} = (f^{-1})'(f(y_0)) = \frac{1}{f'(y_0)} =$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 y_0} = \frac{1}{1+x_0^2} \ ,$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x \Big|_{x=x_0} = \frac{d}{dx} g^{-1}(x) \Big|_{x=g(y_0')} = (g^{-1})'(g(y_0')) = \frac{1}{g'(y_0')} =$$

$$= -\frac{1}{1+\cot^2 y_0'} = -\frac{1}{1+x_0^2} \ .$$

25. I teoremi di Rolle, di Lagrange e di Cauchy

I risultati che verranno stabiliti in questo paragrafo sono veri solo sugli intervalli di $\mathbb{R}$.

Teorema 25.1 (di Rolle). *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b] \subseteq \mathcal{D}(f)$, derivabile in (a, b). Se $f(a) = f(b)$ allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Poiché f è continua sul compatto $[a, b]$, in esso ammette punti di minimo e di massimo . Se entrambi cadono sugli estremi a e b allora la condizione $f(a) = f(b)$ implica che f è costante e perciò $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Altrimenti almeno uno tra i due punti di minimo e di massimo è un punto interno di $[a, b]$ (cioè è in (a, b)): sia esso x_0. Dalla Proposizione 23.2 è $f'(x_0) = 0$. $\square$

Osservazione 25.1. Il teorema di Rolle vale solamente sui connessi (i.e. sugli intervalli) di $\mathbb{R}$.
Infatti se ad esempio si considera il sottoinsieme $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ (che non è connesso) e la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad \text{per } x \in [0,1] \\ -x+3 & , \quad \text{per } x \in [2,3] \end{cases}$$

continua in A, derivabile in $\overset{\circ}{A} = (0,1) \cup (2,3)$ con $f(0) = f(3) = 0$, allora

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{per } x \in (0,1) \\ -1 & , \quad \text{per } x \in (2,3) \end{cases}$$

non è mai nulla in $\overset{\circ}{A}$.

• Si noti dunque che ogni risultato che fa uso del teorema di Rolle è valido solo sui connessi di $\mathbb{R}$. In particolare questo è vero per il seguente

Teorema 25.2 (di Lagrange o del valor medio). *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b] \subseteq \mathcal{D}(f)$, derivabile in (a,b). Allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) .$$

Dimostrazione. Si consideri la funzione

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) .$$

Essa è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) e

$$g(a) = f(a) \ , \ g(b) = f(b) - [f(b) - f(a)] = f(a)$$

cioè $g(a) = g(b)$. Dal teorema di Rolle segue che esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $g'(x_0) = 0$, cioè

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

□

Da questo teorema segue il seguente risultato

Proposizione 25.1. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su un sottoinsieme $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ connesso e aperto. Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in A$ allora f è costante in A.*

Dimostrazione. Siano $a, b \in A$: poiché A è connesso, $[a,b] \subseteq A$ ed essendo f derivabile in A, f è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) (con derivata nulla in ogni punto di (a,b)). Dal teorema di Lagrange, esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) = 0$$

da cui segue $f(b) = f(a)$ e poiché questo vale per ogni $a, b \in A$, si ha che f è costante in A. □

Un'altra conseguenza del teorema di Lagrange è la seguente

Proposizione 25.2. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un sottoinsieme $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ connesso e aperto.*

(i) *$f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in A$ se e solo se f è decrescente in A,*
(ii) *$f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$ se e solo se f è crescente in A.*

Dimostrazione. (i) Se $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in A$, allora comunque si scelgano $x_1, x_2 \in A$ distinti, usando il teorema di Lagrange (f è continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in (x_1, x_2)), si ha che esiste $\xi \in (x_1, x_2)$ tale che

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi) \leq 0 \,.$$

Questa dà la decrescenza di f in A (cfr. capitolo III, Proposizione 15.1).
Viceversa se f è decrescente allora per ogni $x', x \in A$, $x' \neq x$, è

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leq 0 \,.$$

Dalla derivabilità di f si ha

$$f'(x) = \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leq 0 \quad \forall\, x \in A \,.$$

In modo analogo si prova (ii). □

Osservazione 25.2. Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un connesso aperto $A \subseteq \mathcal{D}(f)$.

- Se $f'(x) < 0$ allora f è strettamente decrescente in A.
  Se $f'(x) > 0$ allora f è strettamente crescente in A.
  Infatti basta ripetere la prima parte della dimostrazione della Proposizione 25.2 sopra.
- Se f è strettamente decrescente allora è falso che sia $f'(x) < 0$ per ogni $x \in A$.
  Allo stesso modo, se f è strettamente crescente allora è falso che sia $f'(x) > 0$ per ogni $x \in A$.
  Ad esempio la funzione $f(x) = -x^3$ è strettamente decrescente, tuttavia $f'(x) = -3x^2$ è nulla in $x = 0$.

Teorema 25.3 (di Cauchy). *Siano $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D}(g) \to \mathbb{R}$ due funzioni e $[a, b] \subseteq \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$. Se f, g sono continue in $[a, b]$, derivabili in (a, b), $g(b) \neq g(a)$, $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \,.$$

Dimostrazione. Si consideri

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)] \,.$$

Essa è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e

$$h(a) = f(a)[g(b) - g(a)] - g(a)[f(b) - f(a)] = f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

$$h(b) = f(b)[g(b) - g(a)] - g(b)[f(b) - f(a)] = -f(b)g(a) + f(a)g(b)$$

da cui $h(a) = h(b)$. Applicando il teorema di Rolle ad h, si ha che esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $h'(x_0) = 0$ cioè

$$f'(x_0)[g(b) - g(a)] - g'(x_0)[f(b) - f(a)] = 0$$

da cui si ricava (essendo $g(b) - g(a) \neq 0$, $g'(x_0) \neq 0$)

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \,.$$

□

Osservazione 25.3. Valgono gli analoghi dei teoremi di Rolle e Cauchy anche su intervalli illimitati e precisamente si ha:

- Sia $f:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$ una funzione continua in $(-\infty,a]$, derivabile in $(-\infty,a)$ tale che $\lim_{x\to-\infty} f(x)=f(a)$. Allora esiste un punto $x_0\in(-\infty,a)$ tale che $f'(x_0)=0$.
- Sia $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,+\infty)$, derivabile in $(a,+\infty)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(a)$. Allora esiste un punto $x_0\in(a,+\infty)$ tale che $f'(x_0)=0$.
- Siano $f,g:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$ due funzioni continue in $(-\infty,a]$, derivabili in $(-\infty,a)$, con $g'(x)\neq 0$ per ogni $x\in(-\infty,a)$ e tali che
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell\ ,\quad \lim_{x\to-\infty} g(x)=m\neq g(a)\ .$$
Allora esiste un punto $x_0\in(-\infty,a)$ tale che
$$\frac{\ell-f(a)}{m-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\ .$$
- Siano $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a,+\infty)$, derivabili in $(a,+\infty)$, con $g'(x)\neq 0$ per ogni $x\in(a,+\infty)$ e tali che
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell\ ,\quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=m\neq g(a)\ .$$
Allora esiste un punto $x_0\in(a,+\infty)$ tale che
$$\frac{\ell-f(a)}{m-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\ .$$

26. I teoremi di de l'Hôpital

I teoremi che seguono aiutano a risolvere, nei limiti di funzioni, le forme indeterminate del tipo "$\frac{0}{0}$" e "$\frac{\infty}{\infty}$". Per la forma indeterminata "$\frac{0}{0}$" si hanno i quattro teoremi che seguono.

Teorema 26.1 (di de l'Hôpital per "$\frac{0}{0}$", $x\to b^-$). *Siano $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ due funzioni derivabili in (a,b), $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ per ogni $x\in(a,b)$, tali che*
$$\lim_{x\to b^-} f(x)=0\quad ,\quad \lim_{x\to b^-} g(x)=0\ .$$
Se esiste
$$\lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
allora
$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ .$$

Dimostrazione. Si consideri le funzioni

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in [a, b) \\ 0 & , \quad x = b \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad x \in [a, b) \\ 0 & , \quad x = b \,. \end{cases}$$

Per ogni $x \in (a, b)$ le funzioni F e G sono continue in $[x, b]$, derivabili in (x, b) e $F' = f'$, $G' = g'$ in (x, b). Applicando il Teorema 25.3 di Cauchy, esiste $\xi \in (x, b)$ tale che

$$\frac{F(b) - F(x)}{G(b) - G(x)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

cioè

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \,.$$

Allora

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to b^-} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \,.$$

□

Allo stesso modo si dimostra che

Teorema 26.2 (di de l'Hôpital per "$\frac{0}{0}$" , $x \to a^+$). *Siano $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in (a, b), $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, tali che*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = 0 \,.$$

Se esiste

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,.$$

Teorema 26.3 (di de l'Hôpital per "$\frac{0}{0}$", $x \to -\infty$). *Siano $f, g : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in $(-\infty, a)$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (-\infty, a)$, tali che*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0 \,.$$

Se esiste

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,.$$

Dimostrazione. Poiché $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$, senza perdere di generalità si può assumere che sia $a < 0$. Sia $t = \frac{1}{x}$, allora $\lim_{x \to -\infty} t = 0^-$.
Si ponga $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ per $t \in [\frac{1}{a}, 0)$, e si consideri le funzioni $f_1, g_1 : [\frac{1}{a}, 0) \to \mathbb{R}$ definite

da $f_1(t) := (f \circ \varphi)(t)$, $g_1(t) := (g \circ \varphi)(t)$. Allora

$$\lim_{t\to 0^-} f_1(t) = \lim_{t\to 0^-} f(\frac{1}{t}) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \ ,$$

$$\lim_{t\to 0^-} g_1(t) = \lim_{t\to 0^-} g(\frac{1}{t}) = \lim_{x\to -\infty} g(x) = 0 \ .$$

Inoltre f_1, g_1 sono derivabili in $(\frac{1}{a}, 0)$ e

$$f_1'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t) = -\frac{f'\big(\varphi(t)\big)}{t^2} = -x^2 f'(x)$$

$$g_1'(t) = g'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = -\frac{g'\big(\varphi(t)\big)}{t^2} = -x^2 g'(x)$$

dunque

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

e quest'ultimo limite esiste. Applicando il Teorema 26.1 di de l'Hôpital alle funzioni f_1 e g_1, si ha

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^-} \frac{f_1(t)}{g_1(t)} = \lim_{t\to 0^-} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

□

In modo analogo si dimostra

Teorema 26.4 (di de l'Hôpital per "$\frac{0}{0}$" , $x \to +\infty$). *Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in $(a, +\infty)$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, +\infty)$, tali che*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0 \ .$$

Se esiste

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Per la forma indeterminata "$\frac{\infty}{\infty}$" si hanno i tre teoremi che seguono.

Teorema 26.5 (di de l'Hôpital per "$\frac{\infty}{\infty}$", $x \to b^-$). *Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in (a, b), $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, tali che*

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to b^-} g(x) = \infty \ .$$

Se esiste

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Dimostrazione. Si supponga dapprima che $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per $a < b - \delta_\varepsilon < x < b$, sia

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \varepsilon \ .$$

Si prenda $x \in (b - \delta_\varepsilon, b)$: f, g sono continue in $[b - \delta_\varepsilon, x]$, derivabili in $(b - \delta_\varepsilon, x)$, g, g' sono non nulle in tale intervallo. Applicando il teorema di Cauchy, esiste un punto $\xi \in (b - \delta_\varepsilon, x)$ per cui sia

$$\frac{f(x) - f(b - \delta_\varepsilon)}{g(x) - g(b - \delta_\varepsilon)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

dove

$$\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell \right| < \varepsilon$$

da cui si ricava

$$\ell - \varepsilon < \frac{f(x) - f(b - \delta_\varepsilon)}{g(x) - g(b - \delta_\varepsilon)} < \ell + \varepsilon \ .$$

Poiché $\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = \infty$ e f, g sono continue, è $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in (b - \delta_\varepsilon, b)$ ed allora si ha

$$\ell - \varepsilon < \frac{f(x) \left[1 - \dfrac{f(b - \delta_\varepsilon)}{f(x)} \right]}{g(x) \left[1 - \dfrac{g(b - \delta_\varepsilon)}{g(x)} \right]} < \ell + \varepsilon \ .$$

Poiché

$$\lim_{x \to b^-} \left[1 - \frac{f(b - \delta_\varepsilon)}{f(x)} \right] = \lim_{x \to b^-} \left[1 - \frac{g(b - \delta_\varepsilon)}{g(x)} \right] = 1 \ ,$$

dal teorema della permanenza del segno del limite di funzioni, si può assumere che sia $1 - \frac{f(b - \delta_\varepsilon)}{f(x)} > 0$, $1 - \frac{g(b - \delta_\varepsilon)}{g(x)} > 0$ per $x \in (b - \delta_\varepsilon, b)$ cosicché

$$(\ell - \varepsilon) \ \frac{1 - \dfrac{g(b - \delta_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(b - \delta_\varepsilon)}{f(x)}} < \frac{f(x)}{g(x)} < (\ell + \varepsilon) \ \frac{1 - \dfrac{g(b - \delta_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(b - \delta_\varepsilon)}{f(x)}} \ .$$

Passando al limite per x tendente a b^- si ottiene

$$\ell - \varepsilon \leq \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \ell + \varepsilon \ .$$

Dall'arbitrarietà di ε, segue che

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \ .$$

Se invece $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ allora per ogni $M > 0$ esiste $\delta_M > 0$ tale che, per

$a < b - \delta_M < x < b$, sia
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > M \ .$$
Per x scelto in $(b-\delta_M, b)$, f e g sono continue in $[b-\delta_M, x]$, derivabili in $(b-\delta_M, x)$ e g, g' non nulle. Applicando il teorema di Cauchy, si ha che esiste $\xi \in (b-\delta_M, x)$ tale che
$$\frac{f(x)-f(b-\delta_M)}{g(x)-g(b-\delta_M)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$
da cui
$$\frac{f(x)-f(b-\delta_M)}{g(x)-g(b-\delta_M)} > M \ .$$
Poiché anche in questo caso è $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in (b-\delta_M, b)$, si ha
$$M < \frac{f(x)-f(b-\delta_M)}{g(x)-g(b-\delta_M)} = \frac{f(x)}{g(x)} \, \frac{1-\dfrac{f(b-\delta_M)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(b-\delta_M)}{g(x)}}$$
ovvero, essendo $1-\dfrac{f(b-\delta_M)}{f(x)} > 0$, $1-\dfrac{g(b-\delta_M)}{g(x)} > 0$ per $x \in (b-\delta_M, b)$,
$$\frac{f(x)}{g(x)} > M \, \frac{1-\dfrac{g(b-\delta_M)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(b-\delta_M)}{f(x)}} \ .$$
Passando al limite per x tendente a b^- si ha
$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \geq M$$
per ogni $M > 0$, quindi segue che
$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \ .$$
Allo stesso modo di procede se $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)/g'(x) = -\infty$ o $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)/g'(x) = \infty$ □

In modo analogo si dimostrano i due teoremi

Teorema 26.6 (di de l'Hôpital per "$\frac{\infty}{\infty}$", $x \to a^+$). *Siano $f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in (a,b), $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$, tali che*
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty \ .$$
Se esiste
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
allora
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Teorema 26.7 (di de l'Hôpital per "$\dfrac{\infty}{\infty}$", $x \to \pm\infty$).

(i) *Siano* $f, g : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ *due funzioni derivabili in* $(-\infty, a)$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (-\infty, a)$, *tali che*
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty \, .$$
Se esiste
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
allora
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \, .$$

(ii) *Siano* $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *due funzioni derivabili in* $(a, +\infty)$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (a, +\infty)$, *tali che*
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \infty \, .$$
Se esiste
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
allora
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \, .$$

Osservazione 26.1. Dei teoremi di de l'Hôpital non vale il viceversa, cioè se esiste il $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ non è detto che esista
$$\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \, .$$

Infatti siano
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} \qquad , \qquad g(x) = x$$
considerate nell'intervallo $(-\infty, 0]$. Il limite
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$
mentre
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \left(2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right)$$
non esiste perché non esiste il
$$\lim_{x\to 0^+} \sin \frac{1}{x} \, .$$

27. Derivate successive

Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ derivabile in un aperto $A \subseteq \mathcal{D}(f)$. Resta allora definita la *funzione derivata prima* (o *funzione derivata del primo ordine*) $f' : A \to \mathbb{R}$ che ad ogni punto $x \in A$ associa il valore $f'(x)$ della derivata di f in x. La funzione derivata prima si denota anche con Df. Se a sua volta la funzione f' è derivabile in un punto $x_0 \in A$, cioè se esiste finito il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

che altro non è che $(f')'(x_0)$, allora questo numero si chiama la *derivata seconda di f in x_0* (o *derivata del secondo ordine di f in x_0*) e si indica con $f''(x_0)$ o anche con una delle scritture

$$f^{(2)}(x_0) \quad , \quad (D^2 f)(x_0) \quad , \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \quad , \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x)\Big|_{x=x_0} .$$

In tal caso si dice che f è *derivabile due volte in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$*.

• Si noti allora che la funzione f' è continua in x_0.

Proposizione 27.1. *Siano $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$ un punto di estremo locale in cui f sia derivabile due volte.*

Se x_0 è un punto di minimo relativo allora $f''(x_0) \geq 0$.
Se x_0 è un punto di massimo relativo allora $f''(x_0) \leq 0$.

Dimostrazione. Se x_0 è un punto di minimo relativo allora $f'(x_0) = 0$. Si supponga per assurdo che sia $f''(x_0) < 0$. Allora

$$0 > f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} .$$

Dal Teorema 16.4 della permanenza del segno esisterebbe un intorno $I(x_0, \delta)$ tale che, per $x \in I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$, sarebbe

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 .$$

Per $x_0 - \delta < x < x_0$ sarebbe $f'(x) > 0$, dunque f sarebbe strettamente crescente sul connesso $(x_0 - \delta, x_0)$, cioè sarebbe $f(x) < f(x_0)$ per $x_0 - \delta < x < x_0$: questo contraddirebbe il fatto che x_0 sia un punto di minimo relativo. Pertanto $f''(x_0) \geq 0$.
In modo analogo si procede se x_0 è un punto di massimo relativo. □

Proposizione 27.2. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte nel punto estremale $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$.*

Se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo relativo.
Se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo relativo.

Dimostrazione. Si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) > 0 .$$

Dal Teorema 16.4 della permanenza del segno, esiste un intorno $I(x_0, \delta)$ tale che, per $x \in I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$, sia

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0 .$$

Se $x_0 - \delta < x < x_0$ allora è $f'(x) < 0$, cioè f è strettamente decrescente sul connesso $(x_0 - \delta, x_0)$, dunque $f(x) > f(x_0)$ per $x_0 - \delta < x < x_0$; se $x_0 < x < x_0 + \delta$ allora $f'(x) > 0$ cioè f è strettamente crescente sul connesso $(x_0, x_0 + \delta)$, dunque $f(x) > f(x_0)$ per $x_0 < x < x_0 + \delta$. Pertanto x_0 è un punto di minimo relativo.
In modo analogo si procede se $f''(x_0) < 0$ provando che allora x_0 è un punto di massimo relativo. $\square$

Osservazione 27.1. Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in un punto estremale $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$.

- Se $f''(x_0) \geq 0$ allora non è detto che x_0 sia un punto di minimo relativo.
- Se $f''(x_0) \leq 0$ allora non è detto che x_0 sia un punto di massimo relativo.

Ad esempio per $f(x) = x^3$ è $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 0$: in particolare è anche $f''(0) \geq 0$ o $f''(0) \leq 0$. Tuttavia $x_0 = 0$ non è un punto di estremo locale.

Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un aperto $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ e sia $f' : A \to \mathbb{R}$ la funzione derivata prima: se essa è derivabile in ogni punto $x \in A$ allora resta definita la *funzione derivata seconda* (o *funzione derivata del secondo ordine*)
$f'' : A \to \mathbb{R}$ che ad ogni punto $x \in A$ associa il numero $f''(x)$; in tal caso la funzione f' è continua in A. La funzione derivata seconda si denota anche con

$$f^{(2)} \quad , \quad D^2 f \quad , \quad \frac{d^2 f}{dx^2} \quad , \quad \frac{d^2}{dx^2} f \ .$$

Notare che $D^2 f = D(Df)$.
Se la funzione derivata seconda $f'' : A \to \mathbb{R}$ è derivabile in un punto $x_0 \in A$ allora si chiama *derivata terza di f in x_0* (o *derivata del terzo ordine di f in x_0*) il numero $(f'')'(x_0)$ e lo si indica con $f'''(x_0)$ o con una delle scritture

$$f^{(3)}(x_0) \quad , \quad D^3 f(x_0) \quad , \quad \frac{d^3 f}{dx^3}(x_0) \quad , \quad \frac{d^3}{dx^3} f(x)\Big|_{x=x_0} \ .$$

In tal caso si dice che f è *derivabile tre volte in x_0*. Se f è derivabile tre volte in ogni punto di A allora resta definita la *funzione derivata terza* (o *funzione derivata del terzo ordine*) $f''' : A \to \mathbb{R}$ che ad ogni punto $x \in A$ associa il numero $f'''(x)$; in tal caso la funzione f'' è continua in A. La funzione derivata terza si denota anche con

$$f^{(3)} \quad , \quad D^3 f \quad , \quad \frac{d^3 f}{dx^3} \quad , \quad \frac{d^3}{dx^3} f \ .$$

Notare che $D^3 f = D\left(D^2 f\right)$.
Proseguendo in questo modo si definiscono le *derivate successive della funzione f in un punto $x_0 \in A$* e le *funzioni derivate successive della funzione f nell'aperto $A \subseteq \mathcal{D}(f)$* avendo, per $n \in \mathbb{N}$, la *derivata successiva n-sima di f in x_0* (o *derivata successiva di ordine n di f in x_0*), $f^{(n)}(x_0)$, e la *funzione derivata successiva n-sima della funzione f nell'aperto $A \subseteq \mathcal{D}(f)$* (o *funzione derivata successiva di ordine n della funzione f nell'aperto $A \subseteq \mathcal{D}(f)$*), $f^{(n)} : A \to \mathbb{R}$, date rispettivamente da

$$n = 0 : \quad f^{(0)}(x_0) := f(x_0) \qquad , \qquad \begin{array}{l} f^{(0)} := f : A \to \mathbb{R} \\ \qquad\qquad x \mapsto f(x) \end{array}$$

$$n \geq 1 : \quad f^{(n)}(x_0) := \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) \qquad , \qquad \begin{array}{l} f^{(n)} : A \to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto f^{(n)}(x) \ . \end{array}$$

La derivata n-sima di f in x_0, $f^{(n)}(x_0)$, si indica anche con una delle scritture

$$(D^n f)(x_0) \quad , \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \quad , \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x)\Big|_{x=x_0} .$$

Se essa esiste, si dice che f è *derivabile* n *volte in* x_0. Si noti che in tal caso la funzione derivata $(n-1)$-esima, $f^{(n-1)}$, è continua in x_0.
La funzione derivata n-sima di f in A, $f^{(n)} : A \to \mathbb{R}$, si indica anche con una delle scritture

$$D^n f \quad , \quad \frac{d^n f}{dx^n} \quad , \quad \frac{d^n}{dx^n} f .$$

Se essa esiste, si dice che f è *derivabile* n *volte in* A e in tal caso la funzione derivata $(n-1)$-esima, $f^{(n-1)}$, è continua in A. Notare che $D^n f = D\big(D^{n-1} f\big)$.

Si dimostra che

- Se $f, g : A \to \mathbb{R}$ sono derivabili n volte nell'aperto $A \subseteq \mathcal{D}(f)$, allora

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(D^k f\right) \left(D^{n-k} g\right) .$$

Definizione 27.1. Una funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ si dice di *classe* (*di continuità*) C^n in un aperto $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ e si scrive $f \in C^n(A)$, se f è derivabile n volte in A e la funzione derivata n-sima $f^{(n)}$ è continua in A.

Si noti che se una funzione è di classe C^n in un aperto A allora ogni derivata di ordine minore o uguale a n è continua in A.

Definizione 27.2. Una funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ si dice di *classe* (*di continuità*) C^∞ in un aperto $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ e si scrive $f \in C^\infty(A)$, se essa ammette in A derivate successive di ogni ordine e queste sono tutte continue in A.

Notare che

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(A) .$$

È facile verificare che

- se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in C^n(A)$ allora $\lambda f \in C^n(A)$;
- se $f, g \in C^n(A)$ allora $f + g \in C^n(A)$;
- se $f, g \in C^n(A)$ allora $fg \in C^n(A)$;
- se $f, g \in C^n(A)$ allora $\dfrac{f}{g} \in C^n(A \backslash \{x \in A : g(x) = 0\})$.

28. Convessità e concavità di una funzione

Dati due punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ si chiama *segmento di estremi* x_1 *e* x_2 il sottoinsieme

$$S_{x_1 x_2} = \{x \in \mathbb{R} : x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \ , \ \lambda \in [0,1]\} .$$

Per $\lambda = 0$ si ottiene il punto x_1, per $\lambda = 1$ si ottiene il punto x_2.
• Se si pone $\mu = 1 - \lambda$ allora $\lambda = 1 - \mu$, con $\mu \in [0,1]$, e il segmento di estremi x_1 e x_2 è dato anche da

$$S_{x_1 x_2} = \{x \in \mathbb{R} : x = \mu x_1 + (1-\mu)x_2 \ , \ \mu \in [0,1]\} .$$

In tal caso per $\mu = 0$ si ottiene il punto x_2, per $\mu = 1$ si ottiene il punto x_1.

• Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice *convesso* se comunque si prendano due punti $x_1, x_2 \in A$ il segmento $S_{x_1x_2}$ è contenuto in A, cioè se per ogni $x_1, x_2 \in A$ è $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in A$ per ogni $\lambda \in [0,1]$.

Osservazione 28.1. Si assuma ora che $x_1 < x_2$: allora $S_{x_1x_2} = [x_1, x_2]$
Sia $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in S_{x_1x_2}$ per un certo $\lambda \in [0,1]$. Poiché $(1-\lambda)x_1 \leq (1-\lambda)x_2$ e $\lambda x_1 \leq \lambda x_2$, allora

$$x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \geq (1-\lambda)x_1 + \lambda x_1 = x_1 \ ,$$

$$x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \leq (1-\lambda)x_2 + \lambda x_2 = x_2$$

cioè $x \in [x_1, x_2]$. Viceversa se $x \in [x_1, x_2]$ allora $0 \leq x - x_1 \leq x_2 - x_1 \neq 0$ e scegliendo $\lambda = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \in [0,1]$ si ha

$$(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 = \left(1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2 =$$

$$= \frac{(x_2 - x_1 - x + x_1)x_1 + (x - x_1)x_2}{x_2 - x_1} = x$$

perciò $x \in S_{x_1x_2}$.

• Si dimostra che i sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli intervalli.

Definizione 28.1. Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ un sottoinsieme convesso. Si dice che f è *convessa* in A se per ogni $x_1, x_2 \in A$ è

$$f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \ ,$$

per ogni $\lambda \in [0,1]$.

Pertanto una funzione f è convessa in un convesso A se l'immagine mediante f del punto $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in S_{x_1x_2}$ è minore del punto $y = (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \in S_{f(x_1)f(x_2)}$, ovvero se nel piano cartesiano il punto $\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, f\big((1-\lambda)x_1 + \ \lambda x_2\big)\big)$ sta al di sotto del punto $\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\big)$ e questo accade al variare di $\lambda \in [0,1]$.

Osservazione 28.2. Se f è una funzione convessa sul convesso A allora, per ogni $x_1, x_2 \in A$, il grafico di f compreso tra i punti $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in G_f$ sta al di sotto della retta passante per essi.
Infatti l'equazione di tale retta è

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \, (x - x_1) \ .$$

Se $x \in S_{x_1x_2}$ allora $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$, per qualche $\lambda \in [0,1]$, e la sua immagine sulla retta è $y = f(x_1) + \lambda\big(f(x_2) - f(x_1)\big) = (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$.
Poichè f è convessa, si ha che $f(x) \leq y$.

Esempio 28.1. La funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \geq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$ (il cui grafico è una parabola rivolta verso l'alto se $a > 0$, ed è una retta se $a = 0$) è una convessa in $\mathbb{R}$. In particolare ogni retta è una funzione convessa.
Infatti siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, allora

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = a[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2]^2 + b[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2] + c \ ,$$

$$(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) = (1-\lambda)[ax_1^2 + bx_1 + c] + \lambda[ax_2^2 + bx_2 + c] =$$

$$= a[(1-\lambda)x_1^2 + \lambda x_2^2] + b[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2] + c \ .$$

Se $\lambda = 0, 1$ le due espressioni sono uguali; sia allora $\lambda \in (0, 1)$. Ora

$$[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2]^2 = (1-\lambda)^2 x_1^2 + 2(1-\lambda)\lambda x_1 x_2 + \lambda^2 x_2^2$$

dove (usando il fatto che $2AB \leq \dfrac{A^2}{k^2} + k^2 B^2$, per ogni $k \neq 0$) si ha

$$2(1-\lambda)\lambda x_1 x_2 \leq \frac{(1-\lambda)^2 x_1^2}{k^2} + k^2 \lambda^2 x_2^2 \ \ , \ \ \forall\, k \in \mathbb{R} - \{0\} \ .$$

Poiché $\lambda, 1-\lambda > 0$, per $k^2 = \dfrac{1-\lambda}{\lambda}$ si ha

$$2(1-\lambda)\lambda x_1 x_2 \leq \lambda(1-\lambda)(x_1^2 + x_2^2)$$

da cui

$$[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2]^2 \leq (1-\lambda)x_1^2 + \lambda x_2^2 \ .$$

Pertanto, poiché $a \geq 0$, è

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \ .$$

Definizione 28.2. Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ un convesso.
Si dice che f è *concava* in A se $(-f)$ è convessa in A, cioè se per ogni $x_1, x_2 \in A$ è

$$f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) \geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \ ,$$

per ogni $\lambda \in [0, 1]$.

Dall'Esempio 28.1 segue che la funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \leq 0$ e $b, c \in \mathbb{R}$ (il cui grafico è una parabola rivolta verso il basso se $a < 0$ ed è una retta se $a = 0$) è concava in $\mathbb{R}$. In particolare ogni retta è anche una funzione concava: anzi si dimostra facilmente che *le rette sono le uniche funzioni contemporaneamente convesse e concave*.

Proposizione 28.1. *Una funzione $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ è convessa in un intervallo $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ se e solo se per ogni $x_1, x_2, x \in A$ con $x_1 < x < x_2$ è*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \ . \tag{28.1}$$

In modo analogo, f è concava in A se e solo se per ogni $x_1, x_2, x \in A$ con $x_1 < x < x_2$ è

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \ . \tag{28.2}$$

Dimostrazione. Siano $x_1 < x < x_2$ punti del convesso $A \subseteq \mathcal{D}(f)$, allora esiste $\lambda \in [0,1]$ tale che

$$x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$$

da cui si ricava

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad , \quad 1 - \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \; .$$

Quindi f è convessa se e solo se

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\, f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\, f(x_2) \; .$$

Allora f è convessa se e solo se

$$(x_2 - x)f(x) + (x - x_1)f(x) = (x_2 - x_1)f(x) \le (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$$

ovvero se e solo se

$$(x_2 - x)\big(f(x) - f(x_1)\big) \le (x - x_1)\big(f(x_2) - f(x)\big)$$

e dunque

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \; .$$

□

• In generale una funzione convessa (o concava) può non essere derivabile: ad esempio basta prendere la funzione convessa $f(x) = |x|$. Vale la seguente

Proposizione 28.2. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa (risp.te concava) in un intervallo $A \subseteq \mathcal{D}(f)$. Allora per ogni $x_0 \in A$ esistono i limiti laterali $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e*

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(*risp.te* $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$).

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione per f convessa: se f è concava si procede in modo simile. Siano $x, x_0 \in A$ due punti distinti; si consideri la funzione continua $\varphi_{x_0,x} : (0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi_{x_0,x}(\lambda) = \frac{f(x_0 + \lambda(x - x_0)) - f(x_0)}{\lambda} \; .$$

La funzione $\varphi_{x_0,x}$ è crescente. Infatti se $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1]$ con $\lambda_1 < \lambda_2$ allora posto $\mu = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ è $0 < \mu < 1$ e

$$\begin{aligned} x_0 + \lambda_1(x - x_0) &= x_0 + \lambda_2\, \mu(x - x_0) = (1-\mu)x_0 + \mu x_0 + \lambda_2\, \mu(x - x_0) = \\ &= (1-\mu)x_0 + \mu(x_0 + \lambda_2(x - x_0)) \end{aligned}$$

dove $x_0 + \lambda_2(x - x_0)$ è un punto del segmento di estremi x_0 e x. Poiché f è convessa si ha:

$$f\big(x_0 + \lambda_1(x - x_0)\big) = f\big((1-\mu)x_0 + \mu(x_0 + \lambda_2(x - x_0))\big) \le$$

$$\leq (1-\mu)f(x_0) + \mu f\big(x_0 + \lambda_2(x-x_0)\big) = f(x_0) + \mu[f(x_0 + \lambda_2(x-x_0)) - f(x_0)] \,.$$

Allora

$$\frac{f\big(x_0 + \lambda_1(x-x_0)\big) - f(x_0)}{\lambda_1} \leq \frac{\mu}{\lambda_1}[f\big(x_0 + \lambda_2(x-x_0)\big) - f(x_0)] =$$

$$= \frac{f\big(x_0 + \lambda_2(x-x_0)\big) - f(x_0)}{\lambda_2}$$

e questo prova che $\varphi_{x_0,x}(\lambda_1) \leq \varphi_{x_0,x}(\lambda_2)$. Pertanto esiste il limite laterale

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \varphi_{x_0,x}(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f\big(x_0 + \lambda(x-x_0)\big) - f(x_0)}{\lambda} \,,$$

di conseguenza esiste anche

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\varphi_{x_0,x}(\lambda)}{x - x_0} \,.$$

Sia $\xi = x_0 + \lambda(x - x_0)$. Se $x < x_0$, poiché $\lambda \in (0,1]$, è $\lambda(x-x_0) < 0$, quindi per $\lambda \to 0^+$ è $\xi \to x_0^-$; inoltre $\lambda = \dfrac{\xi - x_0}{x - x_0}$, dunque in tal caso

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\varphi_{x_0,x}(\lambda)}{x - x_0} = \lim_{\xi \to x_0^-} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \,.$$

Se invece $x > x_0$ allora per $\lambda \to 0^+$ è $\xi \to x_0^+$, quindi

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\varphi_{x_0,x}(\lambda)}{x - x_0} = \lim_{\xi \to x_0^+} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \,.$$

Questo prova che i due limiti laterali in questione esistono. Sappiamo che se f è convessa e $x_1 < x_0 < x_2$ sono punti di A allora

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

da cui

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \,.$$

□

Le tre proposizioni che seguono caratterizzano le funzioni convesse e concave derivabili.

Proposizione 28.3. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un intervallo aperto $A \subseteq \mathcal{D}(f)$.*
Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia convessa in A è che la funzione derivata f' sia crescente in A.
Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia concava in A è che la funzione derivata f' sia decrescente in A.

Dimostrazione. Sia f convessa sul convesso A e siano $x_1, x_2 \in A$ due punti distinti. Se $x_1 < x < x_2$ allora

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \,.$$

Dalla derivabilità di f in A segue dunque che

$$f'(x_1) \leq \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \ .$$

D'altra parte si ha anche

$$f'(x_2) \geq \lim_{x \to x_2} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \ .$$

Pertanto

$$f'(x_1) \leq f'(x_2)$$

e questo prova la crescenza si f'.

Viceversa sia f' crescente e scegliamo $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$. Allora l'intervallo $[x_1, x_2] \subseteq A$ e per $x_1 < x < x_2$, applicando il teorema di Lagrange relativamente agli intervalli $[x_1, x]$ e $[x, x_2]$, si ha che esistono $\xi_1 \in (x_1, x)$ e $\xi_2 \in (x, x_2)$ tali che

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \quad , \quad \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = f'(\xi_2) \ .$$

È ovvio che $\xi_1 < \xi_2$ e dalla crescenza di f' si ha $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ i.e.

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

che prova la convessità di f per la Proposizione 28.1.

In modo simile si procede per f concava. □

Proposizione 28.4. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel convesso aperto $A \subseteq \mathcal{D}(f)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia convessa su A è che per ogni $x, x_0 \in A$ sia*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ . \tag{28.3}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia concava in A è che per ogni $x, x_0 \in A$ sia

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ . \tag{28.4}$$

Dimostrazione. Sia f convessa sul convesso $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ e siano $x_0, x \in A$. Se $x_0 = x$ allora non c'è niente da dimostrare (la (28.3) è banale). Sia dunque $x_0 \neq x$. Se $x_0 < x$, per $x_0 < \xi < x$, la convessità di f dà

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \leq \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

quindi

$$f'(x_0) \leq \lim_{\xi \to x_0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

da cui $(x - x_0 > 0)$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

che è la (28.3). Se invece $x_0 > x$ allora per $x < \xi < x_0$ è

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}$$

da cui

$$f'(x_0) \geq \lim_{\xi \to x_0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ovvero $(x - x_0 < 0)$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

che è ancora la (28.3).

Viceversa supponiamo che per ogni $x_0, x \in A$ valga la (28.3). Se $x_1, x_2 \in A$ sono due punti distinti si ha che

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

ma anche

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \ .$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$0 \geq (f'(x_2) - f'(x_1))(x_1 - x_2) \ .$$

Se $x_1 < x_2$ questa dà $f'(x_2) - f'(x_1) \geq 0$ ovvero $f'(x_1) \leq f'(x_2)$; se invece è $x_1 > x_2$ la stessa disequazione dà $f'(x_2) - f'(x_1) \leq 0$ ovvero $f'(x_1) \geq f'(x_2)$. In ogni caso f' risulta essere crescente in A.

Similmente si procede per il caso in cui f sia concava. □

Proposizione 28.5. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte nel convesso aperto A.*
Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia convessa in A è che $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$.
Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia concava in A è che $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in A$.

Dimostrazione. Dalla Proposizione 28.3 precedente, f è convessa in A se e solo se f' è crescente in A e, dalla ii) della Proposizione 25.2, questo vale se e solo se, per ogni $x \in A$, è $(f')'(x) = f''(x) \geq 0$.
In modo analogo si procede per provare la caratterizzazione di una funzione concava.

□

Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione. Un punto $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$ si dice un *punto di flesso* di f se esiste un intorno $I(x_0, r) \subset \mathcal{D}(f)$ tale che f sia convessa in $(x_0 - r, x_0)$ e concava in $(x_0, x_0 + r)$ o viceversa. Se f è derivabile in un intervallo aperto $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ contenente x_0, si può sempre supporre che sia $I(x_0, r) \subset A$ per cui risulta che la funzione derivata f' è crescente in $(x_0 - r, x_0)$ e decrescente in $(x_0, x_0 + r)$ o viceversa. Nel primo caso x_0 risulta essere un punto di massimo relativo della funzione derivata f', nel secondo caso x_0 risulta essere un punto di minimo relativo della funzione derivata f'. Se f è derivabile due volte in x_0 allora, in ogni caso, $f''(x_0) = 0$. Pertanto per una funzione derivabile due volte in un intervallo aperto $A \subseteq \mathcal{D}(f)$, i punti di flesso sono da ricercare nell'insieme

$$\{x \in A : f''(x) = 0\} \ .$$

Notare che la condizione $f''(x_0) = 0$ è soltanto una condizione necessaria affinché $x_0 \in A$ sia un punto di flesso.

VI - La formula di Taylor

In questo capitolo si vuole determinare un polinomio che "meglio" approssimi (localmente in un punto) una funzione. La formula che si ottiene è chiamata *formula* o *sviluppo di Taylor*, il polinomio cercato si chiama *polinomio di Taylor* e l'avverbio "meglio" qui usato lo si spiega col fatto che l'errore commesso sostituendo alla funzione il suo polinomio di Taylor è infinitesimo di ordine dipendente dalla classe di continuità della funzione. L'entità dell'errore è valutabile mediante le sue rappresentazioni esplicite (cfr. il paragrafo 8.3, "rappresentazioni del resto").

29. Il polinomio di Taylor

Data una funzione $f:\mathcal{D}(f)\to\mathbb{R}$ in generale non è facile calcolare il valore $f(x)$, per ogni $x\in\mathcal{D}(f)$. Un caso dove invece questo è semplice è quando $f(x)$ è un polinomio in una variabile. Lo scopo è allora quello di approssimare una funzione data con un polinomio e stimare l'errore che si commette quando al posto dell'effettivo valore della funzione in un punto x si considera il valore di quel polinomio in tale punto.

Per $m\in\mathbb{N}$ sia $f_m(x)=x^m$: essa è una funzione di classe C^∞ in $\mathbb{R}$ e per $k\in\mathbb{N}$, $k\geq m+1$, è $f_m^{(k)}(x)=0$ in ogni $x\in\mathbb{R}$, mentre per $k\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq m$, è

$$f_m^{(k)}(x)=k!\binom{m}{k}x^{m-k}\ .$$

D'altra parte, dallo sviluppo del binomio di Newton si ha

$$x^m=[(x-x_0)+x_0]^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(x-x_0)^k x_0^{m-k}=\sum_{k=0}^{m}\frac{f_m^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

e quindi avremo

$$f_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{f_m^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\ . \tag{29.1}$$

Sia ora $p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ un polinomio di grado n, allora

$$p_n(x)=\sum_{m=0}^{n}a_mf_m(x)$$

che dalla (29.1) scriveremo come

$$p_n(x)=\sum_{m=0}^{n}a_m\sum_{k=0}^{m}\frac{f_m^{(k)}(x_0)}{k!}\ (x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=k}^{n}a_m\ \frac{f_m^{(k)}(x_0)}{k!}\ (x-x_0)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\ .$$

Sia ora $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$: ad essa si associa il polinomio di grado n

$$P_n(x;x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \ .$$

La (funzione) differenza

$$R_n(x;x_0) = f(x) - P_n(x;x_0)$$

è nulla se e solo se $f(x)$ è un polinomio (essenzialmente è il polinomio $P_n(x;x_0)$). Altrimenti $R_n(x;x_0)$ misura l'errore che si commette sostituendo al valore $f(x)$ il valore del polinomio $P_n(x;x_0)$. $R_n(x;x_0)$ è una funzione continua e dunque

$$\lim_{x\to x_0} R_n(x;x_0) = R_n(x_0;x_0) = 0 \ .$$

Lemma 29.1. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in un punto $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$. Allora*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

se e solo se $f^{(k)}(x_0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$.

Dimostrazione. Poichè f è derivabile n volte in x_0, la funzione f e le funzioni derivate f', f'', $\cdots$, $f^{(n-1)}$ sono continue in un intorno[9] $I(x_0, r) \subset \mathcal{D}(f)$. Sia

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \ .$$

Si supponga per assurdo che esista $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$, tale che

$$f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \quad , \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0 \ .$$

Se $0 \le k \le n-1$, applicando k volte il teorema di de l'Hôpital ed essendo $f^{(k)}$ continua in x_0, si ha:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \neq 0 \ .$$

D'altra parte per ogni $0 \le k \le n-1$ è

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n}\,(x-x_0)^{n-k} = 0 \ ,$$

quindi si è ottenuto un assurdo e pertanto $f^{(k)}(x_0) = 0$ per ogni $0 \le k \le n-1$.

---

[9]Se una funzione f è continua in un punto interno $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$, allora essa è continua in un intorno di x_0: infatti per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno $I(x_0, r_\varepsilon) \subset \mathcal{D}(f)$ tale che per ogni $x \in I(x_0, r_\varepsilon)$ si abbia $f(x) \in I\big(f(x_0), \frac{\varepsilon}{2}\big)$. Sia $y \in I(x_0, r_\varepsilon)$ e poniamo $\delta_\varepsilon = r_\varepsilon - |y - x_0|$. Ora $I(y, \delta_\varepsilon) \subset I(x_0, r_\varepsilon)$ perché se $x \in I(y, \delta_\varepsilon)$ allora $|x - x_0| \le |x - y| + |y - x_0| < \delta_\varepsilon + |y - x_0| = r_\varepsilon$. Quindi per ogni $x \in I(y, \delta_\varepsilon)$ è $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dunque per tali x si ha $|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ e questo prova la continuità di f nel generico punto $y \in I(x_0, r_\varepsilon)$.

Se invece $k = n$ (dunque è $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ mentre $f(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$) allora, non essendo detto che $f^{(n)}(x)$ sia continua in x_0, si applica $n-1$ volte il teorema di de l'Hôpital ottenendo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{k!(x-x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \neq 0 \ .$$

Si è giunti così ancora ad un assurdo e pertanto $f^{(n)}(x_0) = 0$.

In ogni caso si è provato che $f^{(k)}(x_0) = 0$ ogni $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$.

Viceversa se è $f^{(k)}(x_0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, allora, applicando il teorema di de l'Hôpital $n-1$ volte, si ha:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0 \ .$$

□

Proviamo quindi il seguente

Teorema 29.1 (di Taylor). *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte nel punto $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$. Sia $p_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$ un polinomio di centro x_0 di grado n. Allora*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x; x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$$

per $r_n(x; x_0) = f(x) - p_n(x, x_0)$, se e solo se

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{29.2}$$

per $0 \leq k \leq n$.

Dimostrazione. Si scriva $p_n(x; x_0) = \sum_{m=0}^{n} a_m (x-x_0)^m$ cosicché per $0 \leq k \leq n$,

$$r_n^{(k)}(x; x_0) = f^{(k)}(x) - p_n^{(k)}(x; x_0) =$$

$$= f^{(k)}(x) - \sum_{m=k}^{n} m(m-1)\cdots(m-k+1) a_m (x-x_0)^{m-k}$$

e da questa $r_n^{(k)}(x_0; x_0) = f^{(k)}(x_0) - k! \ a_k$. Dal Lemma 29.1 precedente applicato alla funzione $r_n(x; x_0)$ si ha che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x; x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$$

se e solo se

$$f^{(k)}(x_0) - k! a_k = 0$$

ovvero se e solo se è verificata la (29.2). □

Osservazione 29.1. Il teorema di Taylor implica che $p_n(x;x_0) = P_n(x;x_0)$ e $r_n(x;x_0) = R_n(x;x_0)$. Ne segue allora che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$$

cioè $R_n(x;x_0) = o\big((x-x_0)^n\big)$ per $x \to x_0$.

• Si chiamano *polinomio* e *resto di Taylor* di ordine n di f in x_0 rispettivamente il polinomio $P_n(x;x_0)$ e la funzione $R_n(x;x_0)$. La *formula* o *sviluppo di Taylor di ordine n di f in x_0* è la somma $f(x) = P_n(x;x_0) + R_n(x;x_0)$, i.e.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x;x_0) \tag{29.3}$$

ovvero

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x;x_0) \ .$$

30. Formula di Taylor e punti di estremo

La formula di Taylor permette di avere informazioni circa i punti di estremo di una funzione derivabile n volte in un aperto A. Infatti

Proposizione 30.1. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile $2n$ volte in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$ tale che $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ mentre $f^{(2n)}(x_0) \neq 0$.*
 i) *Se $f^{(2n)}(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo relativo,*
 ii) *Se $f^{(2n)}(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo relativo.*

Dimostrazione. Sia $f^{(2n)}(x_0) > 0$. Dalla formula di Taylor di f in x_0 si ha:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n} + R_{2n}(x;x_0)$$

dove, posto

$$\varepsilon(x) = \frac{R_{2n}(x;x_0)}{(x-x_0)^{2n}} \ ,$$

è

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0 \ .$$

Allora

$$f(x) = f(x_0) + \left[\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!} + \varepsilon(x)\right](x-x_0)^{2n}$$

e

$$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!} + \varepsilon(x)\right] = \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!} > 0 \ .$$

Dal teorema della permanenza del segno esiste un intorno $I(x_0,\delta) \subset \mathcal{D}(f)$ tale che, per ogni $x \in I(x_0,\delta)$, sia

$$\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!} + \varepsilon(x) > 0 \ .$$

Poichè $(x-x_0)^{2n} \geq 0$, allora per ogni $x \in I(x_0,\delta)$ è $f(x) \geq f(x_0)$, cioè x_0 è un punto di minimo relativo.

In modo analogo si procede se $f^{(2n)}(x_0) < 0$. □

Osservazione 30.1. Se $f \in C^{2n+1}(A)$ e

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n)}(x_0) = 0$$

mentre $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$, allora x_0 non è un punto di estremo locale.
Infatti in tal caso la formula di Taylor di f in x_0 è

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!}(x-x_0)^{2n+1} + R_{2n+1}(x;x_0) =$$

$$= f(x_0) + \left[\frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!} + \varepsilon(x)\right](x-x_0)^{2n+1} .$$

Si assuma ad esempio $f^{(2n+1)}(x_0) > 0$. Ragionando come prima, esiste un intorno $I(x_0,\delta)$ per cui sia

$$\frac{f^{(2n+1)}(x)}{(2n+1)!} + \varepsilon(x) > 0$$

per ogni $x \in I(x_0,\delta)$. Se $x \in I(x_0,\delta)$ e $x \leq x_0$ allora $(x-x_0)^{2n+1} \leq 0$, da cui $f(x) \leq f(x_0)$, mentre se $x \geq x_0$ allora $(x-x_0)^{2n+1} \geq 0$, da cui $f(x) \geq f(x_0)$, dunque x_0 non può essere né un punto di minimo né di massimo relativo.

31. Rappresentazioni del resto di Taylor

Proposizione 31.1. *Siano $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$. Se f è derivabile $n+1$ volte in x_0 allora*

$$R_n(x;x_0) = \left[\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \varepsilon(x)\right](x-x_0)^{n+1}$$

dove $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Dimostrazione. Le ipotesi su f implicano che le derivate $f', \cdots, f^{(n)}$ sono continue in un intorno di x_0. Il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x;x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

si presenta nella forma indeterminata “$\dfrac{0}{0}$” e applicando il teorema di de l'Hôpital n volte si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x;x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x;x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x;x_0)}{(n+1)!(x-x_0)} = \frac{1}{(n+1)!} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{(x-x_0)} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}$$

da cui

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{R_n(x;x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\right) = 0 .$$

Posto allora

$$\varepsilon(x) = \frac{R_n(x;x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \ ,$$

si ha l'asserto. □

• Si noti che se $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, dalla dimostrazione segue che

$$R_n(x;x_0) = O\big((x-x_0)^{n+1}\big) \ .$$

Proposizione 31.2. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^n in un intorno $I(x_0, r)$ di $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$ e si supponga che per $0 < \delta < r$ esista $f^{(n+1)}$ in $(x_0, x_0+\delta)$. Allora per ogni $x \in (x_0, x_0+\delta)$ e per ogni funzione ψ continua in $[x_0, x]$, derivabile in (x_0, x) con $\psi' \neq 0$ esiste $\xi \in (x_0, x)$ tale che sia*

$$R_n(x;x_0) = \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \ . \tag{31.1}$$

Dimostrazione. Sia $x \in (x_0, x_0+\delta)$ fissato e sia $\psi : [x_0, x] \to \mathbb{R}$ come nell'enunciato. La funzione f è derivabile $n+1$ volte sia in x che in ogni $t \in (x_0, x)$. Considerata la funzione $\varphi : [x_0, x] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(t) = P_n(x;t) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \ (x-t)^k - f(x)$$

si ha che essa è continua in $[x_0, x]$, derivabile in (x_0, x) e inoltre

$$\varphi(x_0) = -R_n(x;x_0) \ \ , \ \ \varphi(x) = 0 \ .$$

Applicando il teorema di Cauchy alle funzioni φ e ψ, si ha che esiste un punto $\xi \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

cioè

$$R_n(x;x_0) = \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \ \varphi'(\xi) \ .$$

Ora

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\, P_n(x;t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \ (x-t)^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \ (x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} k \ \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \ (x-t)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \ (x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \ (x-t)^{k-1}$$

dove

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \ (x-t)^k \underset{h=k+1}{=} \sum_{h=1}^{n+1} \frac{f^{(h)}(t)}{(h-1)!} \ (x-t)^{h-1} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \frac{f^{(h)}(t)}{(h-1)!} \ (x-t)^{h-1} + \frac{f^{n+1}(t)}{n!} \ (x-t)^n \ .$$

Allora

$$\varphi'(t) = \sum_{h=1}^{n} \frac{f^{(h)}(t)}{(h-1)!}\,(x-t)^{h-1} + \frac{f^{n+1}(t)}{n!}\,(x-t)^n - \sum_{h=1}^{n} \frac{f^{(h)}(t)}{(h-1)!}\,(x-t)^{h-1} =$$

$$= \frac{f^{n+1}(t)}{n!}\,(x-t)^n$$

da cui

$$R_n(x;x_0) = \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(\xi)}\;\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\,(x-\xi)^n\ .$$

□

Osservazione 31.1. Nella formula (31.1) per $\psi(t) = x - t$ si ha il resto nella *forma di Cauchy*

$$R_n(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\,(x-\xi)^n(x-x_0) \tag{31.2}$$

mentre per $\psi(t) = (x-t)^{n+1}$ si ha il resto nella *forma di Lagrange*

$$R_n(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}\ . \tag{31.3}$$

32. La formula di Mac Laurin

Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in $x_0 = 0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$. Si chiama *formula* o *sviluppo di Mac Laurin di ordine* n di f la formula di Taylor di ordine n di f in $x_0 = 0$, cioè la formula

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + R_n(x;0)\ . \tag{32.1}$$

• La funzione $f(x) = e^x$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, inoltre $f^{(k)}(x) = e^x$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Fissato $n \in \mathbb{N}$, la formula di Mac Laurin di ordine n per tale funzione è:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x,0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x,0)\ . \tag{32.2}$$

Il resto n-simo nella forma di Lagrange è

$$R_n(x;0) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\,x^{n+1}\quad,\quad 0 < \xi < x\ .$$

Si osservi che

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x,0)| = 0\ .$$

• La funzione $f(x) = \sin x$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$, $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$, da cui $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, $f^{(2k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Pertanto nella formula di Mac Laurin compaiono solo le derivate dispari.
Fissato $n \in \mathbb{N}$, poiché $f^{(2n+2)}(0) = 0$, la formula di Mac Laurin di ordine $2n+2$ è

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} + R_{2n+2}(x;0) = \tag{32.3}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+2}(x;0) \ .$$

Il resto $(2n+2)$-esimo nella forma di Lagrange è

$$R_{2n+2}(x;0) = (-1)^{n+1} \frac{\cos\xi}{(2n+3)!} \ x^{2n+3} \quad , \quad 0 < \xi < x$$

ed ancora si noti che

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x,0)| = 0 \ .$$

• Anche la funzione $f(x) = \cos x$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\sin x$, $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$, da cui $f^{(2k+1)}(0) = 0$, $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Pertanto nella formula di Mac Laurin compaiono solo le derivate pari.
Fissato $n \in \mathbb{N}$, poiché $f^{(2n+1)}(0) = 0$, la formula di Mac Laurin di ordine $2n+1$ è:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \ x^{2n} + R_{2n+1}(x;0) = \tag{32.4}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + R_{2n+1}(x;0) \ .$$

Il resto $(2n+1)$-esimo nella forma di Lagrange è

$$R_{2n+1}(x;0) = (-1)^{n+1} \frac{\cos\xi}{(2n+2)!} \ x^{2n+2} \quad , \quad 0 < \xi < x$$

ed ancora segue che

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x,0)| = 0 \ .$$

• La funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$ è di classe $C^\infty((-1,+\infty))$ per $\alpha \in \mathbb{R}$. Per $k \in \mathbb{N}$ è[10]

$$f^{(k)}(x) = k! \binom{\alpha}{k} (1+x)^{\alpha-k}$$

da cui

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k} \ .$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$, la formula di Mac Laurin di ordine n è:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + R_n(x;0) = \tag{32.5}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x;0) \ .$$

Il resto n-simo nella forma di Lagrange è

$$R_n(x;0) = \binom{\alpha}{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \quad , \quad 0 < \xi < x \ .$$

[10]Si definisce, per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \ .$$

Se $|x| < 1$ allora

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x,0)| = 0 \ .$$

• La funzione $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ è di classe C^∞ nell'intervallo $(-1,1)$ e per $k \in \mathbb{N}$ è $f^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-k-1}$ da cui

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1 \ .$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$ la formula di Mac Laurin di ordine n è:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + R_n(x;0) = \sum_{k=0}^{n} x^k + R_n(x;0) \ . \tag{32.6}$$

Si osservi che

$$1 - x^{n+1} = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k$$

ricavando così

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} \ . \tag{32.7}$$

Ne segue allora, confrontando con la (32.6), che il resto n-simo è

$$R_n(x;0) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

e la (32.7) è la formula di Mac Laurin di ordine n della funzione $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Dall'espressione del suo resto si ottiene che, se $|x| < 1$, allora

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x;0)| = 0 \ .$$

VII - I numeri complessi

In questo capitolo si costruisce un campo chiamato il campo dei *numeri complessi* e denotato con $\mathbb{C}$ in cui ogni equazione polinomiale abbia soluzione. Si vedrà che $\mathbb{C}$ contiene un sottoinsieme identificabile con l'insieme dei numeri reali e pertanto $\mathbb{C}$ si considera come l'ampliamento di $\mathbb{R}$ (essenzialmente esso è l'ampliamento di $\mathbb{R}$ mediante il numero (complesso) i che risolve l'equazione $z^2 + 1 = 0$).

33. La costruzione di $\mathbb{C}$

Il campo $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi* è lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ dotato della seguente operazione binaria

il *prodotto* "$\cdot$" : $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tra due coppie $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ definito da

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \ . \tag{33.1}$$

Questa operazione è

- *associativa*, i.e. per ogni $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$ è
$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \ ,$$
- *commutativa*, i.e. per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ è
$$z_2 \cdot z_1 = z \cdot z_2 \ ,$$
- esiste l'*unità*, i.e. esiste un elemento $u \in \mathbb{R}^2$ tale che per ogni $z \in \mathbb{R}^2$
$$z \cdot u = u \cdot z = z \ ;$$
questo elemento è la coppia $u = (1, 0)$,
- ogni elemento $z = (x, y) \neq (0, 0)$ ha l'*inverso*, detto anche *reciproco*, i.e. per ogni $z \neq (0, 0)$ esiste un elemento $z' \in \mathbb{R}^2$ tale che
$$z \cdot z' = z' \cdot z = u \ .$$
Se $z = (x, y)$, questo elemento z' è
$$z' = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \ , - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$
ed è denotato con z^{-1}.

Un *numero complesso* z è dunque una coppia di numeri reali $z = (x, y)$.

• Il prodotto ci permette di definire il *quoziente* tra due numeri complessi $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2) \neq (0, 0)$ come

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 z_2^{-1} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \ , \ \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \ .$$

• Nel prodotto il punto "·" è frequentemente omesso; è facile verificare che la somma[11] e il prodotto hanno le seguenti proprietà: se $z_1, z_2, w \in \mathbb{C}$ allora

$$z_1 + w = z_2 + w \ \text{ implica } \ z_1 = z_2;$$
$$z_1 w = z_2 w, \ w \neq 0, \ \text{ implica } \ z_1 = z_2.$$

In particolare, in quest'ultima, se $z_2 = 0$ allora $z_1 w = 0$ per $w \neq 0$, implica $z_1 = 0$.

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Se $z_k \in \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq n$, per iterazione definiamo

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + \cdots + z_n \quad , \quad \prod_{k=1}^{n} z_k = z_1 \cdots z_n \ .$$

Inoltre, per ogni $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, definiamo

$$z^0 := (1,0) \quad , \quad z^n = \underbrace{z \cdots z}_{n\text{-fattori}} \quad , \quad n \geq 1 \ .$$

• Se $A = \{z \in \mathbb{C} : z = (x,0), \ x \in \mathbb{R}\}$ allora esiste una biiezione $\varphi : \mathbb{R} \to A$ data da

$$\varphi(x) = (x,0) \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

cosicché identifichiamo il numero complesso $z = (x,0)$ con il numero reale x. In particolare identifichiamo il complesso zero $0 = (0,0)$ con il reale zero 0 e l'unità complessa $u = (1,0)$ con l'unità reale 1.

• Dalla definizione del prodotto abbiamo

$$(0,1)(0,1) = (-1,0) \equiv -1$$

così il numero complesso $i = (0,1)$ è tale che

$$i^2 = -1$$

ovvero risolve in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2 + 1 = 0$. Questo numero complesso è chiamato l'*unità immaginaria*. Si noti che ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si rappresenta nella forma[12]

$$z = x + iy$$

detta *forma algebrica* del numero complesso z. I numeri reali x e y sono rispettivamente chiamati la *parte reale* e la *parte immaginaria* del numero complesso z e denotiamo

$$x = \Re e\, z \quad , \quad y = \Im m\, z$$

da cui

$$z = \Re e\, z + i\, \Im m\, z \ .$$

Notare che $z = 0$ se e solo se $\Re e\, z = \Im m\, z = 0$. Se $\Im m\, z = 0$ il numero complesso z è un numero reale ($z \in \mathbb{R}$), mentre se $\Re e\, z = 0$ allora z è detto un *numero immaginario* e scriviamo $z \in i\mathbb{R}$.

• Il numero complesso

$$\overline{z} = x - iy$$

per $z = x + iy$ è chiamato il *coniugato* di z; notare che

$$\Re e\, \overline{z} = \Re e\, z \quad , \quad \Im m\, \overline{z} = -\Im m\, z$$

[11] La "somma" che dà a $\mathbb{R}^2$ la strutture di spazio vettoriale.

[12] Si noti dapprima che $yi = y(0,1) = (y,0)(0,1) = (0,1)(y,0) = iy$; allora $z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) = x + yi = x + iy$.

e $\overline{\overline{z}} = z$; inoltre

$$\Re e\, z = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad , \quad \Im m\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

quindi $z \in \mathbb{R}$ se e solo se $\overline{z} = z$ mentre z è un numero immaginario se e solo se $\overline{z} = -z$.

• Siano $z, w \in \mathbb{C}$, allora

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \quad , \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w} \quad , \quad \overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \quad , \quad w \neq 0\ .$$

Dalla definizione della somma e del prodotto è facile verificare che

$$\Re e\,(z+w) = \Re e\, z + \Re e\, w\ ,$$

$$\Im m\,(z+w) = \Im m\, z + \Im m\, w\ ,$$

$$\Re e\,(zw) = (\Re e\, z)(\Re e\, w) - (\Im m\, z)(\Im m\, w)\ ,$$

$$\Im m\,(zw) = (\Re e\, z)(\Im m\, w) + (\Re e\, w)(\Im m\, z)\ .$$

• Il *modulo* di un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è il numero reale non negativo

$$|z| := \sqrt{z\,\overline{z}}$$

che è ben defintito perché

$$z\,\overline{z} = (\Re e\, z)^2 + (\Im m\, z)^2 \geq 0\ .$$

Dalla sua definizione è immediato che

$$|\overline{z}| = |z|$$

e segue subito che[13]

$$|\Re e\, z| \leq |z| \quad , \quad |\Im m\, z| \leq |z|\ .$$

• Il modulo di un numero complesso soddisfa alle seguenti proprietà[14]:

(1) per ogni $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 0$ e $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$,
(2) per ogni $z, w \in \mathbb{C}$, $|z\,w| = |z|\ |w|$,
(3) per ogni $z, w \in \mathbb{C}$, $|z+w| \leq |z| + |w|$

cioè il modulo di un numero complesso definisce una *norma* in $\mathbb{C}$.

---

[13] Infatti
$|\Re e\, z| = \sqrt{(\Re e\, z)^2} \leq \sqrt{(\Re e\, z)^2 + (\Im m\, z)^2} = |z|$, $|\Im m\, z| = \sqrt{(\Im m\, z)^2} \leq \sqrt{(\Re e\, z)^2 + (\Im m\, z)^2} = |z|$.

[14] Infatti

(1) $|z|^2 = (\Re e\, z)^2 + (\Im m\, z)^2 \geq 0$ e vale l'uguaglianza se e solo se $(\Re e\, z)^2 = (\Im m\, z)^2 = 0 \iff z = 0$.
(2) $|z\,w|^2 = (z\,w)(\overline{z\,w}) = z\,w(\overline{z}\,\overline{w}) = (z\,\overline{z})(w\,\overline{w}) = |z|^2|w|^2$ da cui $|z\,w| = |z|\ |w|$.
(3) $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = |z|^2 + z\,\overline{w} + \overline{z}\,w + |w|^2 =$
$= |z|^2 + 2\,\Re e\,(z\,\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2\,|\Re e\,(z\,\overline{w})| + |w|^2 \leq |z|^2 + 2\,|z\,\overline{w}| + |w|^2 =$
$= |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$ quindi $|z+w| \leq |z|\ |w|$.

33.1. **La forma polare di un numero complesso.** Possiamo geometricamente identificare $\mathbb{R}^2$ con il piano per mezzo di un sistema di coordinate ortogonale $\mathcal{S} = \{O; x, y\}$, $O = (0,0) = 0$, cosicché ogni numero complesso $z = x + iy = (x, y)$ abbia un unico punto del piano che lo rappresenti e le cui coordinate rispetto a $\mathcal{S}$ siano x e y; quindi ci riferiremo a $\mathbb{C}$ come al *piano complesso*. Sull'asse x rappresentiamo i numeri reali: quest'asse è chiamato l'*asse reale*; sull'asse y rappresentiamo i numeri immaginari: quest'asse è chiamato l'*asse immaginario*. Sia θ l'angolo (definito a meno di multipli di 2π) tra l'asse reale positiva e la semiretta uscente da 0 per z: dalla trigonometria,

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

dove $r \geq 0$ è la distanza di z dall'origine 0. Pertanto

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{33.2}$$

detta la *forma polare* del numero complesso z. Notare che $r = |z|$; l'angolo θ è detto l'*argomento* di z e denotato con $\arg z$; si ha

$$\arg z = \theta_0 + 2k\pi \quad , \quad 0 \leq \theta_0 < 2\pi \ , \ \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

L'angolo θ_0 è chiamato l'*argomento principale* di z usualmente denotato con $\operatorname{Arg} z$. Perciò la forma polare (33.2) si scrive come

$$z = |z|(\cos\arg z + i\sin\arg z)$$

o equivalentemente

$$z = |z|(\cos\operatorname{Arg} z + i\sin\operatorname{Arg} z) \ .$$

Si verifica che

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w \ ,$$
$$\arg\frac{z}{w} = \arg z - \arg w$$

mentre

$$\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg}(zw) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \ ,$$
$$\operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg}\frac{z}{w} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

33.2. **Le potenze intere e razionali di un numero complesso.**
• Sia $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$. Definiamo l'*n-sima potenza* di z come

$$z^n := r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{33.3}$$

per $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Quindi

$$|z^n| = |z|^n \quad , \quad \arg z^n = n \arg z \ .$$

Quando $|z| = 1$ e $n \geq 1$ abbiamo

$$(\cos\theta + i\ \sin\theta)^n = \cos n\theta + i\ \sin n\theta \tag{33.4}$$

che è detta la *formula di de Moivre*. Infine definiamo

$$z^{-n} := \frac{1}{z^n} \quad , \quad n \in \mathbb{N}, \ z \neq 0 \ .$$

• Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; per $z \in \mathbb{C}$ risolviamo l'equazione

$$\zeta^n = z \ . \tag{33.5}$$

Si scriva

$$z = r(\cos\theta + i\,\sin\theta) \quad , \quad \zeta = \rho(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$$

cosicché deve essere

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\,\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

che è soddisfatta per

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad , \quad n\varphi = \theta + 2k\pi\ ,$$

per $k \in \mathbb{Z}$. Quindi l'equazione (33.5) ha le n soluzioni distinte

$$\zeta_k = \sqrt[n]{r}\,\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad , \quad 0 \le k \le n-1 \tag{33.6}$$

chiamate le *radici n-sime* di z e denotate con $z^{1/n}$, i.e. $z^{1/n} = \{\zeta_0, \cdots, \zeta_{n-1}\}$. Nel piano complesso esse sono i vertici di un poligono regolare con n lati inscritto nel cerchio di centro l'origine 0 e raggio $\sqrt[n]{r}$.

In particolare le radici n-sime dell'unità sono

$$\omega_k = \omega^k \quad , \quad 0 \le k \le n-1$$

per

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\sin\frac{2\pi}{n}\ .$$

L'*n-sima radice principale* del numero complesso z è

$$\sqrt[n]{z}\ :=\ \sqrt[n]{|z|}\,\left(\cos\frac{\operatorname{Arg} z}{n} + i\sin\frac{\operatorname{Arg} z}{n}\right)\ . \tag{33.7}$$

Per esempio

$$\sqrt[n]{1} = 1 \quad , \quad \sqrt[n]{-1} = \cos\frac{\pi}{n} + i\,\sin\frac{\pi}{n}\ .$$

• Siano $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ con $(m,n) = 1$, $n > 0$, e $z = r(\cos\theta + i\,\sin\theta) \in \mathbb{C}$, $z \ne 0$; la potenza $z^{m/n}$ è definita da

$$z^{m/n}\ :=\ \sqrt[n]{r^m}\,\left(\cos\frac{m\theta + 2k\pi}{n} + i\,\sin\frac{m\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad , \quad 0 \le k \le n-1 \tag{33.8}$$

che dà n valori per la potenza $z^{m/n}$.

Il *valore principale* di $z^{m/n}$ è

$$\sqrt[n]{z^m}\ :=\ \sqrt[n]{|z|^m}\,\left(\cos\frac{\operatorname{Arg} z^m}{n} + i\sin\frac{\operatorname{Arg} z^m}{n}\right)\ . \tag{33.9}$$

Osservazione 33.1. Notare che (33.8) definisce la potenza $z^{m/n}$ come

$$z^{m/n} = (z^m)^{1/n}$$

e la definizione del valore principale (33.9) è *esattamente la radice principale n-sima di z^m*. D'altra parte si potrebbe considerare

$$z^{m/n} = (z^{1/n})^m$$

e prendere come valore principale

$$(\sqrt[n]{z})^m\ . \tag{33.10}$$

Sebbene come insieme le due espressioni di $z^{m/n}$ siano uguali, quando ne consideriamo i valori principali, otteniamo numeri complessi differenti.
Per esempio consideriamo $(-1)^{4/3}$; dalle (33.8) e (33.9) abbiamo

$$(-1)^{4/3} = \big((-1)^4\big)^{1/3} = \big((\cos\pi + i\sin\pi)^4\big)^{1/3} = (\cos 4\pi + i\sin 4\pi)^{1/3} =$$
$$= (\cos 0 + i\sin 0)^{1/3} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\,\sin\frac{2k\pi}{3} \quad , \quad k = 0,1,2$$

cosicché $(-1)^{4/3} = \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2\}$ dove

$$\zeta_0 = 1 = \sqrt[3]{(-1)^4}\ ,$$
$$\zeta_1 = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ i\ ,$$
$$\zeta_2 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ i\ .$$

D'altra parte abbiamo

$$(-1)^{1/3} = (\cos\pi + i\sin\pi)^{1/3} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3} \quad , \quad k = 0,1,2$$

dove

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ i$$

e dalla (33.10)

$$(\sqrt[3]{-1})^4 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^4 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \neq \zeta_0\ .$$

33.3. **Le soluzioni di un'equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$.** Si consideri l'equazione algebrica di secondo grado

(33.11) $$az^2 + bz + c = 0 \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0$$

e si decomponga

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}\ z + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$
$$= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]\ .$$

Posto

$$w = z + \frac{b}{2a}$$

l'equazione (33.11) diventa

$$w^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0\ .$$

Pertanto per trovare le soluzione dell'equazione (33.11) dobbiamo determinare le radici quadrate del numero complesso $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Si scriva in forma polare

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad , \quad r = \left|\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right| \quad , \quad \theta = \operatorname{Arg}\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\ ,$$

allora

$$w = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right) \quad , \quad k = 0, 1$$

cioè

$$w_0 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \ ,$$

$$w_1 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right] = -w_0 \ .$$

Quindi le soluzioni di (33.11) sono

$$z_0 = -\frac{b}{2a} + w_0 \quad , \quad z_1 = -\frac{b}{2a} - w_0$$

ovvero

$$z_0 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \ ,$$

$$z_1 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \ .$$

Notare che queste radici sono univocamente determinate da θ; inoltre, poiché[15] $0 \le \frac{\theta}{2} < \pi$,

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \quad , \quad \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

si ha

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{r+A}{2r}} \quad , \quad \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{r-A}{2r}}$$

per $A = \Re e\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, essendo $\cos\theta = \frac{A}{r}$. In definitiva le soluzioni dell'equazione (33.11) sono

$$z_0 = -\frac{b}{2a} + \left(\pm\sqrt{\frac{r+A}{2}} + i\ \sqrt{\frac{r-A}{2}}\right) \ ,$$

$$z_1 = -\frac{b}{2a} - \left(\pm\sqrt{\frac{r+A}{2}} + i\ \sqrt{\frac{r-A}{2}}\right) \ .$$

Esercizio 33.1. Usando il principio di induzione, provare che per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$z^n - w^n = (z - w)\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-k-1} \ ,$$

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \quad \text{(la formula di Newton)} \ .$$

[15] Vale il segno "+" se $0 \le \frac{\theta}{2} \le \frac{\pi}{2}$, vale il segno "−" se $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \pi$.

34. Lo spazio metrico $\mathbb{C}$

Definizione 34.1. Siano $z, w \in \mathbb{C}$. Si chiama *distanza* tra z e w il numero reale non negativo

$$d(z,w) := |z - w| \ .$$

d ha le seguenti proprietà:

(1) per ogni $z, w \in \mathbb{C}$, $d(z,w) \geq 0$ e $d(z,w) = 0$ se e solo se $z = w$;
(2) per ogni $z, w \in \mathbb{C}$, $d(w,z) = d(z,w)$ (proprietà simmetrica);
(3) per ogni $z, w, u \in \mathbb{C}$, $d(z,w) \leq d(z,u) + d(u,w)$ (disuguaglianza triangolare).

• Si fissi $z_0 \in \mathbb{C}$. Il *disco aperto* (o *palla aperta*) di centro z_0 e raggio r è l'insieme

$$B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) < r\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \ .$$

Definizione 34.2. Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un sottoinsieme del piano complesso.

- Un punto $z_0 \in A$ è detto un *punto interno* di A se esiste un disco aperto $B(z_0, r)$ tale che $B(z_0, r) \subset A$. L'insieme
$$\overset{\circ}{A} = \{z \in A : z \text{ è un punto interno di } A\}$$
è chiamato l'*interno* di A. È ovvio che
$$\overset{\circ}{A} \subseteq A \ .$$
- Un punto $z_0 \in A$ è detto un *punto isolato* se esiste un disco aperto $B(z_0, r)$ tale che $B(z_0, r) \cap A = \{z_0\}$.
- Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ è detto un *punto di accumulazione* di A se per ogni disco aperto $B(z_0, r)$ si ha $(B(z_0, r) \cap A) \setminus \{z_0\} \neq \emptyset$. L'insieme
$$A' = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ è un punto di accumulazione di } A\}$$
è chiamato il *derivato* di A.

Definizione 34.3. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{C}$ è detto *aperto* se è l'insieme vuoto oppure se $A \neq \emptyset$, ogni suo punto $z_0 \in A$ è un punto interno, cioè per ogni $z_0 \in A$ esiste un disco aperto $B(z_0, r)$ tale che $B(z_0, r) \subset A$.

• Il lettore dovrebbe provare che $A \subseteq \mathbb{C}$ *è un sottoinsieme aperto se e solo se* $\overset{\circ}{A} = A$.

Esempio 34.1.

(i) $\mathbb{C}$ è aperto.
(ii) Un disco aperto $B(z_0, r)$ è un sottoinsieme aperto.
(iii) I sottoinsiemi $A = \{z \in \mathbb{C} : \Re e\, z > 0\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : \Re e\, z < 0\}$ sono sottoinsiemi aperti.
(iv) Il *semipiano superiore* $H^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im m\, z > 0\}$ e il *semipiano inferiore* $H^- = \{z \in \mathbb{C} : \Im m\, z < 0\}$ sono sottoinsiemi aperti.

• È facile provare le seguenti proprietà per i sottoinsiemi aperti:

Proposizione 34.1.

(i) $\emptyset$ *e* $\mathbb{C}$ *sono sottoinsiemi aperti.*

(ii) *Sia* $\{A_j\}_{j\in J}$ *una famiglia di sottoinsiemi aperti di* $\mathbb{C}$, *allora* $\displaystyle\bigcup_{j\in J} A_j$ *è un sottoinsieme aperto di* $\mathbb{C}$.

(iii) *Se* $A_1, \cdots, A_m$ *sono sottoinsiemi aperti di* $\mathbb{C}$ *allora* $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{m} A_j$ *è un sottoinsieme aperto di* $\mathbb{C}$.

Definizione 34.4. Un sottoinsiemte $C \subseteq \mathbb{C}$ è *chiuso* se il suo complementare è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$.

Definizione 34.5. Sia $A \subseteq \mathbb{C}$. La *chiusura* $\overline{A}$ di A è l'intersezione di tutti i sottoinsiemi chiusi C che contengono A, i.e.

$$\overline{A} := \bigcap_{\substack{C\text{chiuso} \\ C\supseteq A}} C .$$

È ovvio che

$$A \subseteq \overline{A} .$$

• Il lettore dovrebbe provare che $A = \overline{A}$ *se e solo se* A *è un sottoinsieme chiuso.*

• Sia $A \subset \mathbb{C}$, il *diametro* di A è definito come

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(z,w) : z, w \in A\} .$$

A è detto *limitato* se $\mathrm{diam}(A) < \infty$.

• Le definizioni di sottoinsieme *compatto* e sottoinsieme *connesso* di $\mathbb{C}$ sono esattamente come quelli del caso reale. Ancora come nel caso reale, un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{C}$ è detto un *dominio* se A è un sottoinsieme aperto e connesso di $\mathbb{C}$.

34.1. **Successioni e serie di numeri complessi.** Una *successione* di numeri complessi è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$; denotiamo con a_n l'immagine $a(n)$ e la successione $\{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$ con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, come usualmente si fa nel caso reale.

• Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ è *limitata* se esiste un numero (reale) $L > 0$ tale che $|a_n| \le L$ for any $n \in \mathbb{N}$ (notare che qui $|a_n|$ è il modulo del numero complesso a_n).

• Diciamo che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $\ell \in \mathbb{C}$ e scriviamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$

se per ogni disco aperto $B(\ell, \varepsilon)$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ si abbia $a_n \in B(\ell, \varepsilon)$. Il numero complesso ℓ è detto il *limite* della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Questo è equivalente a scrivere

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad : \quad n > n_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \ell| < \varepsilon .$$

Notare che una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \Re e\, a_n = \Re e\, \ell \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \Im m\, a_n = \Im m\, \ell .$$

Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A \subset \mathbb{C}$ converge e $\ell \in A$ allora si dice che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge in* A.
È facile provare che ogni successione convergente è limitata.

Analogamente al caso reale si definisce in $\mathbb{C}$ la nozione di *sottosuccessione* di una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; vale il *teorema di Weierstrass*, cioè che da ogni successione limitata in $\mathbb{C}$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente.

• Una *successione di Cauchy* in $A \subseteq \mathbb{C}$ è una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ per cui per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > n_\varepsilon$ si abbia $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Il lettore potrebbe provare che

- Ogni successione convergente in un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{C}$ è una successione di Cauchy.
- Ogni successione di Cauchy è limitata.
- In $\mathbb{C}$ ogni successione di Cauchy è una successione convergente, i.e. $\mathbb{C}$ is a *spazio metrico completo*.

• Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è *divergente* e scriviamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

se per ogni $K > 0$ esiste $n_K \in \mathbb{N}$ tale che per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_K$ si abbia $|a_n| > K$. Questo è equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} \Re e\, a_n = \infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \Im m\, a_n = \infty \ .$$

Le regole per i limiti delle successioni di numeri complessi rispetto alle operazioni di prodotto per scalari, somma, prodotto e quoziente sono uguali al quelle del caso reale e similmente si hanno le forme indeterminate "$\frac{0}{0}$" e "$\frac{\infty}{\infty}$".

• Analogamente al caso reale, definiamo una *serie* di numeri complessi

$$\sum_{n\geq 0} a_n$$

e diamo la nozione di serie convergente e divergenta esattamente come nel caso reale. Tutte le nozioni e criteri dati per la convergenza delle serie di numeri reali hanno il loro analogo per le serie di numeri complessi, e.g.:

- **criterio di Cauchy**: una serie di numeri complessi $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ e ogni $m \in \mathbb{N}$,
$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| < \varepsilon \ ;$$
- se una serie di numeri complessi $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge allora
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ ;$$
- **criterio del confronto**: se esistono una serie di numeri reali non negativi convergente $\sum_{n\geq 0} b_n$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tali che per $n \geq n_0$ si abbia
$$|a_n| \leq b_n$$

allora la serie di numeri complessi $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge;

- **criterio del rapporto**: se seistono $k \in (0,1)$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tali che per $n \geq n_0$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq k$$

allora la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. Se per $n \geq n_0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$$

allora la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge;

- **criterio della radice n-sima**: se esistono $k \in (0,1)$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tali che per $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq k$$

allora la serie di numeri complessi $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. Se per $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$$

allora la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge.

- **criterio del rapporto nella versione di "limite"**: sia

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$$

(1) se $\ell < 1$ la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge;
(2) se $\ell > 1$ la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge;
(3) se $\ell = 1$ il criterio è inefficace e non è possibile alcuna conclusione.

- **criterio della radice n-sima nella versione di "limite"**: sia

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \ell$$

(1) se $\ell < 1$ la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge;
(2) se $\ell > 1$ la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge;
(3) se $\ell = 1$ il criterio è inefficace e non è possibile alcuna conclusione.

34.2. **Il logaritmo e la potenza complessa.** Premettiamo che la definizione del logaritmo di un numero complesso avrebbe bisogno di maggiore teoria in quanto essa si basa sui seguenti risultati non banali:

(1) se $z = x + iy \in \mathbb{C}$ allora $e^z = e^x\, e^{iy}$,
(2) se $y \in \mathbb{R}$ allora $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.

Questi risultati si trovano dopo aver sviluppato gli argomenti delle *serie di potenze* e delle *funzioni analitiche* in $\mathbb{C}$, argomenti che esulano dal presente corso di *Analisi Matematica I*. Si noti che, in particolare, dalla (2) segue

$$e^{i\pi} - 1 = 0$$

relazione che lega tra loro gli importanti numeri $0, 1, \pi, e, i$. La (1) e la (2) si possono riassumere in

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

che è la forma polare del numero complesso e^z. Quindi

$$|e^z| = e^x \quad \text{ovvero} \quad |e^z| = e^{\Re e\, z} ,$$

$$\arg e^z = y \quad \text{ovvero} \quad \arg e^z = \Im m\, z .$$

Inoltre

$$\Re e\, e^z = e^{\Re e\, z} \cos(\Im m\, z) \quad , \quad \Im m\, e^z = e^{\Re e\, z} \sin(\Im m\, z) .$$

Si noti che se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ allora

$$e^{z_1} = e^{z_2} \iff e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) = e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2)$$

ovvero

$$e^{x_1} = e^{x_2} \iff x_1 = x_2$$

e

$$\begin{cases} \cos y_1 = \cos y_2 \\ \sin y_1 = \sin y_2 \end{cases} \iff y_1 = y_2 + 2k\pi , \quad k \in \mathbb{Z} .$$

In conclusione

$$e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + i2k\pi , \quad k \in \mathbb{Z} .$$

• Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$; vogliamo risolvere l'equazione

$$e^{\zeta} = z . \tag{34.1}$$

Se $\zeta = \xi + i\eta$, scritto z in forma polare

$$z = |z|[\cos(\operatorname{Arg} z) + i \sin(\operatorname{Arg} z)]$$

si ha che l'equazione (34.1) è equivalente a

$$e^{\xi}(\cos \eta + i \sin \eta) = |z|[\cos(\operatorname{Arg} z) + i \sin(\operatorname{Arg} z)]$$

quindi

$$e^{\xi} = |z| \iff \xi = \log |z| ,$$

e

$$\begin{cases} \cos \eta = \cos(\operatorname{Arg} z) \\ \sin \eta = \sin(\operatorname{Arg} z) \end{cases} \iff \eta = \operatorname{Arg} z + 2k\pi , \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Pertanto

$$\zeta = \log |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) , \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Il numero complesso ζ si chiama il *logaritmo* di z, $z \neq 0$, e si scrive

$$\log z := \log |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) , \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Si noti che esistono infiniti valori per il logaritmo di un numero complesso (non nullo) e che $\log|z|$ è l'usuale logaritmo del numero reale (positivo) $|z|$. Si osservi che

$$e^{\log z} = e^{\log|z|+i(\mathrm{Arg}\, z+2k\pi)} = e^{\log|z|}\, e^{i\mathrm{Arg}\, z}\, e^{i2k\pi} = |z|\, e^{i\mathrm{Arg}\, z}$$

ovvero

$$e^{\log z} = z\ .$$

• Il numero complesso

$$\mathrm{Log}\, z := \log|z| + i\mathrm{Arg}\, z$$

si chiama il *logaritmo principale* (o *naturale*) del numero complesso $z \neq 0$ e lo si indica anche con $\ln z$. Il logaritmo principale di un numero complesso (non nullo) è unico.

• Sia $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si definisce la *potenza* a^z *di base* a *ed esponente* z con

$$a^z := e^{z\log a}\ . \tag{34.2}$$

Si ha

$$a^z = e^{z\,[\log|a|+i(\mathrm{Arg}\, a+2k\pi)]} = e^{z(\mathrm{Log}\, a+i2k\pi)} = e^{z\,\mathrm{Log}\, a}\, e^{i2kz\pi}$$

dunque posto

$$w = e^{i2z\pi}$$

è

$$a^z = e^{z\,\mathrm{Log}\, a}\, w^k\ .$$

Si noti che per ogni $z \in \mathbb{C}$ il numero complesso

$$e^{z\,\mathrm{Log}\, a}$$

è unico e si chiama il *valore principale* del numero complesso a^z. Si osservi che

- se $z = m \in \mathbb{Z}$ allora $w = e^{i2m\pi} = 1$, quindi $w^k = 1$ ed a^z coincide con il suo valore principale ed è pertanto unico;
- se $z \in \mathbb{Q}$, $z = \dfrac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, e $(m,n) = 1$ allora

  $$w = e^{i2m\pi/n} = \cos\frac{2m\pi}{n} + i\sin\frac{2m\pi}{n}$$

  ovvero w è una radice n-sima dell'unità. Dunque w^k, per $k \in \mathbb{Z}$, sono tutte radici n-sime dell'unità e di queste di distinte ce ne sono n. Pertanto in tal caso a^z ha soltanto n valori distinti;
- se $z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ allora $w = e^{i2z\pi}$ e i w^k, per $k \in \mathbb{Z}$, sono infiniti valori distinti, dunque in questo caso ci sono infiniti valori distinti per a^z.

• Siano $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0, 1$ e $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Vogliamo risolvere l'equazione

$$a^\zeta = z\ .$$

Poiché

$$a^\zeta = e^{\zeta\log a} \quad \text{e} \quad z = e^{\log z}$$

si risolve l'equazione

$$e^{\zeta\log a} = e^{\log z}$$

la cui soluzione è

$$\zeta\log a = \log z + i2k_1\pi \quad , \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

dove

$$\log z + i2k_1\pi = \log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k_2\pi) + i2k_1\pi = \log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) = \log z\ ,$$

$(k_1, k_2 \in \mathbb{Z},\ k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z})$, i.e., poiché[16] $\log a \neq 0$,

$$\zeta = \frac{\log z}{\log a}\ .$$

Il numero complesso ζ così determinato si chiama il *logaritmo in base a del numero complesso non nullo z* e si denota con $\log_a z$, cioè

$$\log_a z = \frac{\log z}{\log a}\ .$$

[16] È ovvio che, dalla sua definizione, $\Re e \log z = \log|z|$ e $\Im m \log z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Allora $\log z = 0$ se e solo se $\Re e \log z = 0$ e $\Im m \log z = 0$ cioè se e solo se $\log|z| = 0$ e $\operatorname{Arg} z + 2k\pi = 0$. La prima dà $|z| = 1$ e la seconda $\operatorname{Arg} z = -2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la cui unica possibilità è $k = 0$, i.e. $\operatorname{Arg} z = 0$. Ne segue che $\log z = 0 \implies z = 1$.

VIII - Integrabilità di una funzione

In questo capitolo data una funzione continua $f(x)$, ci si propone di determinare almeno una funzione $F(x)$ la cui derivata sia proprio $f(x)$ (problema della ricerca delle primitive di una funzione $f(x)$ o, come più noto, il calcolo dell'integrale indefinito di una funzione $f(x)$). Successivamente si definisce l'integrale secondo Riemann (anche comunemente chiamato integrale definito) di una funzione $f(x)$ e si stabilisce (tramite il teorema fondamentale del calcolo integrale) il legame tra l'integrale indefinito e l'integrale definito. Si definiscono inoltre gli integrali generalizzati (o impropri) di una funzione e, come applicazione di questi, si dà un breve cenno sulle funzioni di Eulero di I e II specie (le cosiddette funzioni gamma e beta di Eulero). Terminiamo il capitolo con un legame tra le serie numeriche e gli integrali generalizzati.

35. Primitive di una funzione

Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Ci si propone di studiare il seguente problema: Esiste una funzione $F : \mathcal{D}(F) \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$? Inoltre, se una tale funzione esiste, quante altre ce ne sono con la medesima proprietà? Intanto

Definizione 35.1. Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si chiama *primitiva* di f una funzione $F : \mathcal{D}(F) \to \mathbb{R}$ derivabile in $\overset{\circ}{\mathcal{D}(F)}$, con $\mathcal{D}(f) \subseteq \overset{\circ}{\mathcal{D}(F)}$, tale che $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in \mathcal{D}(f)$.

Definizione 35.2. Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si chiama *integrale indefinito* di f l'insieme

$$\int f(x)\,dx := \left\{F : \mathcal{D}(F) \to \mathbb{R} : F'(x) = f(x),\ x \in \mathcal{D}(f) \subseteq \overset{\circ}{\mathcal{D}(F)}\right\} .$$

Si osservi che se $F, G \in \int f(x)\,dx$ allora $G' - F' = 0$ in $\mathcal{D}(f)$, quindi se $\mathcal{D}(f)$ è un insieme connesso allora $G - F$ è costante in $\mathcal{D}(f)$. Dunque in tal caso, data una primitiva di f, $F : \mathcal{D}(F) \to \mathbb{R}$, si ha

$$\int f(x)\,dx = \left\{G : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R} : G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}\right\} .$$

Più semplicemente si scrive

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} .$$

Se $f \in C^1(\mathcal{D}(f))$ allora la funzione derivata f' è continua in $\mathcal{D}(f)$ ed è ovvio che f è una primitiva di f' e se inoltre $\mathcal{D}(f)$ è connesso si ha:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} .$$

Siano F e G due primitive rispettivamente delle funzioni continue f e g. Se $A \subseteq \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ allora, dalla linearità della derivata, per ogni scalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la funzione $\lambda F + \mu G$

è una primitiva di $\lambda f + \mu g$ in A. Pertanto se A è connesso, si ha

$$\int (\lambda f + \mu g)(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx \ + \mu \int g(x)\, dx \ ,$$

cioè l'operazione di integrale indefinito è un'operazione lineare.

Esempio 35.1.

(i) Sia $f(x)$ una funzione costante, $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, allora

$$\int a\, dx = ax + c \ \ , \ \ c \in \mathbb{R} \ .$$

Infatti la funzione derivata della funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ $F(x) = ax$, è $F'(x) = a$.

(ii) Per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ \ , \ \ c \in \mathbb{R} \ .$$

Infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione derivata della funzione $C^\infty(\mathbb{R})$

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ ,$$

è $F'(x) = x^n$.

Di qui si ricava l'integrale indefinito di un polinomio.

(iii)

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c \quad , \quad \int \sin x\, dx = -\cos x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \ .$$

Infatti le funzioni derivate delle funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$

$$F(x) = \sin x \quad , \quad G(x) = -\cos x \ ,$$

sono rispettivamente $F'(x) = \cos x$, $G'(x) = \sin x$.

(iv)

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \ .$$

Infatti la funzione derivata della funzione $C^\infty(\mathbb{R})$

$$F(x) = \frac{a^x}{\log a}$$

è $F'(x) = a^x$.

(v)

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \ .$$

Infatti la derivata della funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ $F(x) = \arctan x$ è $F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Si osservi che anche la derivata della funzione $G(x) = -\text{arccot}\, x$ è la funzione $F'(x)$ e quindi $F(x) = \arctan x$ e $G(x) = -\text{arccot}\, x$ differiscono per una costante: è facile verificare che $\arctan x = -\text{arccot}\, x + \dfrac{\pi}{2}$.

(vi)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \, .$$

Infatti la derivata della funzione $C^\infty((-1,1))$ $F(x) = \arcsin x$ è $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Analogamente a quanto descritto al punto precedente, si osservi che la funzione $G(x) = -\arccos x$ ha per derivata la funzione $G'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, dunque $F(x) = \arcsin x$ e $G(x) = -\arccos x$ differiscono (nell'intervallo $(-1,1)$) per una costante: è facile verificare che tale costante è $\dfrac{\pi}{2}$.

(vii) Sia $f \in C^1(A)$ per $A \subseteq \mathcal{D}(f)$ aperto e connesso e sia $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\int f^n(x) f'(x)\, dx = \frac{1}{n+1}\, f^{n+1}(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in A \, .$$

Infatti la funzione derivata della funzione $C^1(A)$

$$F(x) = \frac{1}{n+1}\, f^{n+1}(x)$$

è $F'(x) = f^n(x) f'(x)$.
Più in generale si ha che se $f(x) > 0$ in A (e $f \in C^1(A)$), allora per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int f(x)^\alpha f'(x)\, dx = \frac{1}{\alpha+1}\, f(x)^{\alpha+1} + c \quad , \quad c \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in A \, .$$

(viii) Sia $f \in C^1(A)$ una funzione non nulla nell'insieme aperto e connesso $A \subseteq \mathcal{D}(f)$, allora

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log|f(x)| + c \quad , \quad c \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in A \, .$$

Infatti se $f(x) > 0$ in un aperto $B \subseteq A$ allora la funzione derivata della funzione (di classe $C^1(B)$) $F(x) = \log|f(x)| = \log f(x)$ è $F'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, mentre se $f(x) < 0$ in un aperto $B \subseteq A$ allora la funzione derivata di
$F(x) = \log|f(x)| = \log(-f(x))$ è $F'(x) = \dfrac{-f'(x)}{-f(x)} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

- Diremo che una funzione $F : [a,b) \to \mathbb{R}$ è *derivabile* in a se esiste finito il limite

$$\lim_{x \to a+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} \, .$$

La derivata di F in a è il numero

$$F'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} \, .$$

Questo implica che F è continua in a. Si noti che se F è anche derivabile in (a,b), questo permette di definire una funzione $\widetilde{F} : (\tilde{a}, b) \to \mathbb{R}$, con $(\tilde{a}, b) \supset [a,b)$, derivabile in $(\tilde{a}, b)$ tale che $\widetilde{F}\big|_{[a,b)} = F$ e $\widetilde{F}'(a) = F'(a)$.

Analogamente una funzione $F : (a, b] \to \mathbb{R}$ è *derivabile* in b se esiste finito il limite

$$\lim_{x \to b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b}$$

e la derivata di F in b è il numero

$$F'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} \ .$$

Inoltre F è continua in b ed anche in questo caso, se F è anche derivabile in (a, b), si definisce una funzione $\widetilde{F} : (a, \tilde{b}) \to \mathbb{R}$, con $(a, \tilde{b}) \supset (a, b]$, derivabile in $(a, \tilde{b})$ tale che $\widetilde{F}\big|_{(a,b]} = F$ e $\widetilde{F}'(b) = F'(b)$.
Come conseguenza, una funzione $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ è derivabile in a e in b nel senso descritto sopra ed è quindi possibile avere F derivabile in $[a, b]$. Possiamo allora parlare di primitiva $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ di una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Proposizione 35.1 (formula d'integrazione per parti). *Siano f, $g : A \to \mathbb{R}$, con A connesso, due funzioni continue in A. Se $g \in C^1(A)$ e F è una primitiva di f, allora*

$$\int f(x)g(x)\, dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\, dx \ .$$

Dimostrazione. $Fg \in C^1(A)$, e

$$\int (Fg)'(x)\, dx = F(x)g(x) + c \ ;$$

d'altra parte, dalla regola di derivazione del prodotto e dalla linearità dell'integrale indefinito, si ha che

$$\int (Fg)'(x)\, dx = \int (F(x)g'(x) + F'(x)g(x))\, dx =$$

$$= \int F(x)g'(x)\, dx \ + \int f(x)g(x)\, dx$$

da cui si ricava la formula d'integrazione per parti

$$\int f(x)g(x)\, dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\, dx$$

(avendo conglobato la costante $-c$ nell'integrale indefinito del secondo membro). □

Esempio 35.2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \log x\, dx \ .$$

Si consideri

$$\int \log x\, dx = \int 1 \cdot \log x\, dx \ ;$$

applicando la formula di integrazione per parti si ha

$$\int \log x\, dx = x\ \log x - \int x\, \frac{1}{x}\, dx = x\ \log x - x + c \ .$$

In modo analogo si calcola l'integrale indefinito

$$\int \arcsin x dx \ .$$

Esempio 35.3. Calcolare gli integrali indefiniti

$$\int \sin^2 x\, dx \quad \text{e} \quad \int \cos^2 x\, dx \ .$$

Usando la formula di integrazione per parti si ha:

$$\int \sin^2 x\, dx = \int (\sin x)(\sin x)\, dx = (-\cos x)\sin x - \int (-\cos x)\cos x\, dx =$$

$$= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\, dx = -\sin x \cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right)\, dx =$$

$$= -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x\, dx$$

da cui si ricava

$$2\int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cos x + x + c$$

e quindi

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\,(x - \sin x \cos x) + c \ .$$

Analogamente per il secondo integrale proposto si ha:

$$\int \cos^2 x\, dx = \int (\cos x)(\cos x)\, dx = \sin x \cos x - \int \sin x(-\sin x)\, dx =$$

$$= \sin x \cos x + \int \sin^2 x\, dx = \sin x \cos x + \int \left(1 - \cos^2 x\right)\, dx =$$

$$= \sin x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x\, dx$$

da cui si ricava

$$2\int \cos^2 x\, dx = \sin x \cos x + x + c$$

ovvero

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\,(x + \sin x \cos x) + c \ .$$

Esempio 35.4. Trovare una formula iterativa per i seguenti integrali indefiniti:

$$I_n = \int \sin^n x\, dx \quad \text{e} \quad J_n = \int \cos^n x\, dx$$

per $n \geq 3$.

Si osservi che $I_0 = x + c$, $I_1 = -\cos x + c$ e I_2 è stato calcolato nell'esempio precedente. Per $n \geq 3$, dalle proprietà delle potenze e usando la formula di integrazione per parti, si ha:

$$I_n = \int \sin^n x\, dx = \int \sin^{n-2} x\ \sin^2 x\, dx = \int \sin^{n-2} x\ (1 - \cos^2 x)\, dx =$$

$$= I_{n-2} - \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = I_{n-2} - \int (\sin^{n-2} x \ \cos x) \cos x \, dx \ .$$

Si osservi che

$$\sin^{n-2} x \ \cos x = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n-1} \ \sin^{n-1} x \right)$$

e quindi

$$I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \left(\sin^{n-1} x \cos x + \int \sin^{n-1} x \sin x \, dx \right) =$$

$$= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \left(\sin^{n-1} x \cos x + I_n \right)$$

da cui

$$\frac{n}{n-1} \ I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \ \sin^{n-1} x \cos x \ ,$$

dunque per $n \geq 3$

$$I_n = \frac{1}{n} \ \left[(n-1) \, I_{n-2} - \sin^{n-1} x \cos x \right] \ .$$

Per l'integrale J_n si osservi che $J_0 = x + c$, $J_1 = \sin x + c$ e J_2 è stato calcolato nell'esempio precedente. Per $n \geq 3$, operando come per I_n, si ha:

$$J_n = \int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-2} x \cos^2 x \, dx = \int \cos^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx =$$

$$= J_{n-2} - \int \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx = J_{n-2} + \int (-\cos^{n-2} x \sin x), \sin x \, dx \ .$$

Si osservi che

$$-\cos^{n-2} x \sin x = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n-1} \ \cos^{n-1} x \right) \ ,$$

quindi

$$J_n = J_{n-2} + \frac{1}{n-1} \left(\cos^{n-1} x \sin x - \int \cos^{n-1} x \cos x \, dx \right) =$$

$$= J_{n-2} + \frac{1}{n-1} \left(\cos^{n-1} x \sin x - J_n \right)$$

da cui

$$\frac{n}{n-1} \ J_n = J_{n-2} + \frac{1}{n-1} \ \cos^{n-1} x \sin x \ ,$$

dunque per $n \geq 3$

$$J_n = \frac{1}{n} \ \left[(n-1) \, J_{n-2} + \cos^{n-1} x \sin x \right] \ .$$

Proposizione 35.2 (formula d'integrazione per sostituzione). *Sia $f \in C^0(A)$ con A connesso, e sia $\varphi : B \to A$ una funzione biunivoca di classe C^1 nel connesso B. Allora*

$$\int f(x) \, dx = \int f\big(\varphi(t)\big) \varphi'(t) \, dt \quad , \quad \textit{dove} \ \ x = \varphi(t) \ .$$

Dimostrazione. Sia $F : A \to \mathbb{R}$ una primitiva di f ($F \in C^1(A)$) e si consideri la funzione $G : B \to \mathbb{R}$ data da $G(t) = F \circ \varphi(t)$: allora $G \in C^1(B)$ e

$$\int G'(t)\,dt = G(t) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Ora $G'(t) = F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ e quindi

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = F\big(\varphi(t)\big) + c = F(x) + c = \int f(x)\,dx$$

che dà la formula d'integrazione per sostituzione. □

Esempio 35.5. Calcolare gli integrali indefiniti

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} - 1} \quad \text{e} \quad J = \int \cos(\log x)\,dx\,.$$

Per I si ponga $t = \sqrt{x}$, da cui $x = t^2$ ovvero $\varphi(t) = t^2$ (questa funzione è invertibile ad esempio per $t > 0$) e di conseguenza $\varphi'(t) = 2t$ (di classe C^1 nell'intervallo $(0, +\infty)$). Allora

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} - 1} = \int \frac{2t}{t-1}\,dt = 2\int \frac{t - 1 + 1}{t - 1}\,dt =$$

$$= 2\left(\int dt + \int \frac{dt}{t-1}\right) = 2\,(t + \log|t-1|) + c = 2\left(\sqrt{x} + \log\sqrt{x}\right) + c\,.$$

Per l'integrale indefinito J si pone $t = \log x$ da cui $x = e^t = \varphi(t)$ e $\varphi'(t) = e^t$; dunque

$$J = \int \cos(\log x)\,dx = \int e^t \cos t\,dt = e^t \cos t + \int e^t \sin t\,dt =$$

$$= e^t \cos t + e^t \sin t - \int e^t \cos t\,dt = e^t(\sin t + \cos t) - J$$

da cui

$$J = \frac{1}{2}\,e^t(\sin t + \cos t) + c = \frac{1}{2}\,x[\sin(\log x) + \cos(\log x)] + c\,.$$

Si danno adesso delle regole di calcolo per determinare le primitive di alcune funzioni non elementari.

35.1. **Integrali di funzioni razionali fratte.** Si chiama *funzione razionale fratta* una funzione $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ quoziente di due polinomi.

Sia

$$f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

con $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Per determinare una primitiva di tale funzione si osservi che, posto $A^2 = -\Delta > 0$, si ha[17]

$$ax^2 + bx + c = \frac{A^2}{4a}\left[\left(\frac{2ax+b}{A}\right)^2 + 1\right] .$$

Si pone allora

$$t = \frac{2ax+b}{A}$$

cioè si considera la funzione di classe C^1 e invertibile $x = \varphi(t)$, per

$$\varphi(t) = \frac{A}{2a}\,t - \frac{b}{2a} .$$

Allora $\varphi'(t) = \dfrac{A}{2a}$ e, dalla formula d'integrazione per sostituzione (cfr. Proposizione 35.2),

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{A}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{2}{A}\ \arctan t + c = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\ \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + c .$$

Sia ora $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ una generica funzione razionale fratta. Posto $\mathrm{gr}\big(p(x)\big)$ il grado del polinomio $p(x)$, se $\mathrm{gr}\big(p(x)\big) \geq \mathrm{gr}\big(q(x)\big)$ allora si esegue la divisione tra $p(x)$ e $q(x)$ ottenendo

$$p(x) = m(x)q(x) + n(x) \quad \text{dove} \quad \mathrm{gr}\big(n(x)\big) < \mathrm{gr}\big(q(x)\big)$$

da cui

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int m(x)\,dx + \int \frac{n(x)}{q(x)}\,dx$$

cioè tutto è ricondotto al calcolo di un integrale indefinito di una funzione razionale fratta il cui numeratore abbia grado minore del denominatore.

Sia dunque $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ con $\mathrm{gr}\big(p(x)\big) < \mathrm{gr}\big(q(x)\big)$.

In generale $q(x)$ ha *radici reali e complesse coniugate*: siano $x_1, \cdots, x_h \in \mathbb{R}$ quelle reali e distinte e sia $m_i \in \mathbb{N}$ la molteplicità di x_i per $1 \leq i \leq h$; allora

$$q(x) = a(x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_h)^{m_h}(a_1x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdots(a_kx^2+b_kx+c_k)^{n_k}$$

dove, per ogni $1 \leq j \leq k$, è $\Delta_j = b_j^2 - 4a_jc_j < 0$; si noti che

$$\mathrm{gr}\big(q(x)\big) = \sum_{i=1}^{h} m_i + 2\sum_{j=1}^{k} n_j .$$

---

[17] $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \right.$ $\left. + \frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right] = \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2 + A^2\right] = \frac{A^2}{4a}\left[\left(\frac{2ax+b}{A}\right)^2 + 1\right].$

In tal caso *si determinano delle costanti* $A_i \in \mathbb{R}$, *per* $1 \le i \le h$, B_j *e* $C_j \in \mathbb{R}$, *per* $1 \le j \le k$, *e un polinomio* $s(x)$ *con* $\mathrm{gr}\big(s(x)\big) = \mathrm{gr}\big(q(x)\big) - h - 2k - 1$ *in modo che sia soddisfatta l'identità*:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{h} \frac{A_i}{x - x_i} + \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{B_j}{a_j x^2 + b_j x + c_j} + \frac{C_j(2a_j x + b_j)}{a_j x^2 + b_j x + c_j}\right] + \frac{d}{dx}\Bigg(\frac{s(x)}{\prod_{i=1}^{h}(x - x_i)^{m_i - 1}\prod_{j=1}^{k}(a_j x^2 + b_j x + c_j)^{n_j - 1}}\Bigg) . \tag{35.1}$$

È ovvio che, determinata tale decomposizione, si ha

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \sum_{i=1}^{h} A_i \log|x - x_i| + \sum_{j=1}^{k} \frac{2B_j}{\sqrt{-\Delta_j}}\ \arctan\left(\frac{2a_j x + b_j}{\sqrt{-\Delta_j}}\right) + \sum_{j=1}^{k} C_j \log(a_j x^2 + b_j x + c_j) + \frac{s(x)}{\prod_{i=1}^{h}(x - x_i)^{m_i - 1}\prod_{j=1}^{k}(a_j x^2 + b_j x + c_j)^{n_j - 1}} + c .$$

Osservazione 35.1.

(i) Se $q(x)$ ha *soltanto radici reali e complesse coniugate semplici* (i.e. $m_1 = \cdots = m_h = 1$, $n_1 = \cdots = n_k = 1$) allora la decomposizione (35.1) diventa:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{h} \frac{A_i}{x - x_i} + \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{B_j}{a_j x^2 + b_j x + c_j} + \frac{C_j(2a_j x + b_j)}{a_j x^2 + b_j x + c_j}\right] ,$$

perciò l'integrale indefinito in questo caso è:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \sum_{i=1}^{h} A_i \log|x - x_i| + \sum_{j=1}^{k} \frac{2B_j}{\sqrt{-\Delta_j}}\ \arctan\left(\frac{2a_j x + b_j}{\sqrt{-\Delta_j}}\right) + \sum_{j=1}^{k} C_j \log(a_j x^2 + b_j x + c_j) .$$

(ii) Se $q(x)$ ha *soltanto radici reali con molteplicità* i.e.

$$q(x) = a(x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_h)^{m_h}$$

allora l'identità (35.1) diventa:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{h} \frac{A_i}{x - x_i} + \frac{d}{dx}\Big(\frac{s(x)}{\prod_{i=1}^{h}(x - x_i)^{m_i - 1}}\Big)$$

con $\mathrm{gr}\big(s(x)\big) = \mathrm{gr}\big(q(x)\big) - h - 1$. È ovvio che, determinata tale decomposizione, si ha

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \sum_{i=1}^{h} A_i \log|x - x_i| + \frac{s(x)}{\prod_{i=1}^{h}(x - x_i)^{m_i - 1}} + c\,.$$

Se $q(x)$ ha *soltanto radici reali semplici* (i.e. $m_1 = \cdots = m_h = 1$, quindi $\mathrm{gr}\big(q(x)\big) = k$) si determinano delle costanti $A_1, \cdots, A_h \in \mathbb{R}$ tali che sia soddisfatta l'identità:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{h} \frac{A_i}{x - x_i}$$

e l'integrale indefinito è

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \sum_{i=1}^{h} A_i \log|x - x_i| + c\,.$$

(iii) Se $q(x)$ ha *soltanto radici complesse coniugate con molteplicità,* cioè

$$q(x) = (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^{n_1} \cdots (a_k x^2 + b_k x + c_k)^{n_k}$$

dove, per ogni $1 \le j \le k$, è $\Delta_j = b_j^2 - 4a_j c_j < 0$, allora l'identità (35.1) diventa:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{B_j}{a_j x^2 + b_j x + c_j}\right] + \frac{C_j(2a_j x + b_j)}{a_j x^2 + b_j x + c_j} + \\ + \frac{d}{dx}\Big(\frac{s(x)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(a_j x^2 + b_j x + c_j)^{n_j - 1}}\Big)$$

con $\mathrm{gr}\big(s(x)\big) = \mathrm{gr}\big(q(x)\big) - 2k - 1$. È ovvio che, determinata tale decomposizione, si ha:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{2B_j}{\sqrt{-\Delta_j}} \arctan\left(\frac{2a_j x + b_j}{\sqrt{-\Delta_j}}\right) + C_j \log(a_j x^2 + b_j x + c_j)\right] + \\ + \frac{s(x)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(a_j x^2 + b_j x + c_j)^{n_j - 1}} + c\,.$$

Se $q(x)$ ha *soltanto radici complesse coniugate semplici* (i.e. $n_1 = \cdots = n_k = 1$) allora si decompone:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{B_j}{a_j x^2 + b_j x + c_j} + \frac{C_j(2a_j x + b_j)}{a_j x^2 + b_j x + c_j}\right]\,.$$

L'integrale indefinito è allora

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{2B_j}{\sqrt{-\Delta_j}} \arctan\left(\frac{2a_j x + b_j}{\sqrt{-\Delta_j}}\right) + \\ + C_j \log(a_j x^2 + b_j x + c_j)\right] + c\,.$$

35.2. **Integrali abeliani.** Si chiama *integrale abeliano* un integrale della forma

$$\int R(x,y)\,dx$$

dove y è una funzione algebrica di x, cioè soddisfa ad un'equazione $p(x,y)=0$, per p polinomio nelle variabili x e y.

(1) Si consideri l'integrale abeliano

$$I=\int R(x,\sqrt{1-x^2})\,dx\ .$$

Con la sostituzione

$$t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\quad \text{ovvero}\quad t^2=\frac{1-x}{1+x}$$

si ha

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\varphi(t)\quad\Longrightarrow\quad \varphi'(t)=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

e $1-x^2=\dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2}$. Dunque

$$\begin{aligned} I&=\int R\left(\varphi(t),\sqrt{1-\varphi(t)^2}\right)\varphi'(t)\,dt=\\ &=-\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt\ .\end{aligned}$$

(2) Si consideri l'integrale abeliano

$$I=\int R(x,\sqrt{x^2+a})\,dx$$

per $a\in\mathbb{R}$, il quale è sempre definito per $a>0$; invece se $a<0$ l'integrale è definito per $x<-\sqrt{-a}$ e $x>\sqrt{-a}$.

Per un integrale di questo tipo si determina $t\in\mathbb{R}$ in modo che

$$(t+x)^2=x^2+a\ .$$

Allora

$$x=\frac{-t^2+a}{2t}=\varphi(t)\quad\Longrightarrow\quad\varphi'(t)=-\frac{t^2+a}{2t^2}$$

e $|t+x|=\left|\dfrac{t^2+a}{2t}\right|$. Dunque

$$\begin{aligned} I&=\int R\left(\varphi(t),t+\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt=\\ &=-\int R\left(\frac{-t^2+a}{2t},\left|\frac{t^2+a}{2t}\right|\right)\frac{t^2+a}{2t^2}\,dt\ .\end{aligned}$$

(3) Si consideri l'integrale abeliano

$$I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

per $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Se $\Delta=b^2-4ac\leq 0$ allora tale integrale non è definito per $a<0$. Se $\Delta=0$ e $a>0$ allora ax^2+bx+c è un quadrato e quindi la funzione $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ è razionale. Se $\Delta > 0$ e $x_1 < x_2$ sono le radici di ax^2+bx+c, l'integrale è definito per $x \leq x_1$ e $x \geq x_2$ se $a > 0$ mentre è definito per $x_1 \leq x \leq x_2$ se $a < 0$.

(a) Sia $a > 0$, allora[18]

$$ax^2+bx+c = \left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + A$$

dove $A = -\dfrac{\Delta}{4a}$. Posto

$$t = \frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}$$

si ha che

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}}t - \frac{b}{2a} = \varphi(t) \quad \Longrightarrow \quad \varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\ .$$

Si è allora ricondotti a

$$I = \int R\left(\varphi(t), \sqrt{a\varphi(t)^2 + b\varphi(t) + c}\right)\varphi'(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int R\left(\frac{1}{\sqrt{a}}t - \frac{b}{2a}, \sqrt{t^2+A}\right)\,dt$$

che è un integrale del tipo trattato in (2).

(b) Se $a < 0$ (e per quanto detto all'inizio deve essere $\Delta > 0$) si ha[19]

$$ax^2+bx+c = -\frac{\Delta}{4a}\left[1 - \left(\frac{-2ax-b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2\right]\ ;$$

posto

$$t = \frac{-2ax-b}{\sqrt{\Delta}}$$

si ha che

$$x = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}t - \frac{b}{2a} = \varphi(t) \quad \Longrightarrow \quad \varphi'(t) = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a}\ .$$

---

[18] $ax^2+bx+c = (\sqrt{a}x)^2 + bx + \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{4a} + c = \left(\sqrt{a}x + \dfrac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \dfrac{4ac-b^2}{4a} = \left(\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a}$.

[19] Posto $a_1 = -a > 0$,

$$ax^2+bx+c = -(a_1x^2 - bx - c) = -\left[(\sqrt{a_1}x)^2 - bx + \frac{b^2}{4a_1} - \frac{b^2}{4a_1} - c\right] =$$
$$= -\left[\left(\sqrt{a_1}x - \frac{b}{2\sqrt{a_1}}\right)^2 - \frac{b^2+4a_1c}{4a_1}\right] = -\left(\frac{2a_1x-b}{2\sqrt{a_1}}\right)^2 + \frac{b^2+4a_1c}{4a_1}$$

dove in tal caso, essendo $\Delta > 0$, è $\dfrac{b^2+4a_1c}{4a_1} = \dfrac{\Delta}{4a_1} > 0$; posto $A^2 = \dfrac{\Delta}{4a_1}$ si ha

$$ax^2+bx+c = \frac{\Delta}{4a_1}\left[1 - \left(\frac{2a_1x-b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2\right] = A^2\left[1 - \left(\frac{2a_1x-b}{2A\sqrt{a_1}}\right)^2\right]\ .$$

Si è ricondotti a

$$I = \int R\left(\varphi(t), \sqrt{a\varphi(t)^2 + b\varphi(t) + c}\right) \varphi'(t)\, dt =$$

$$= -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \int R\left(-\frac{\Delta}{2a}t - \frac{b}{2a}, \sqrt{\frac{\Delta}{4(-a)}}\sqrt{1-t^2}\right) dt$$

che è un integrale del tipo (1).

35.3. **Integrali trigonometrici.** Sia

$$I = \int R(\cos x, \sin x)\, dx$$

con $R(\cos x, \sin x)$ una funzione razionale in $\cos x$ e $\sin x$. In tal caso si usa la sostituzione

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

da cui

$$x = 2\arctan t = \varphi(t) \quad \Longrightarrow \quad \varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}\ .$$

Si ottiene allora[20]

$$I = \int R(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt\ .$$

35.4. **Integrale differenziale binomio.** Si chiama *integrale differenziale binomio* l'integrale

$$I_{m,n,p} = \int x^m (a + bx^n)^p\, dx$$

con $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a,\ b \neq 0$ e $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

(1) Se $p \in \mathbb{Z}$ e $m = \dfrac{r_1}{s_1}$, $n = \dfrac{r_2}{s_2}$ con $s_1, s_2 \neq 0$ e le coppie (r_1, s_1), (r_2, s_2) costituite da interi primi fra loro, allora, per $s = s_1 s_2$, si pone

$$x = \varphi(t) = t^s$$

da cui $\varphi'(t) = st^{s-1}$, $x^m = t^{r_1 s_2}$ e $x^n = t^{r_2 s_1}$, quindi

$$I_{m,n,p} = s \int (a + bt^{r_2 s_1})^p\, t^{s + r_1 s_2 - 1}\, dt$$

che è un integrale di una funzione razionale fratta.

(2) Sia $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, con $p = \dfrac{r}{s}$, $s \neq 0$ e r, s primi fra loro; se

---

[20]Da $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ si ha $t^2 = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ da cui $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$.

(a) Se $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ si pone

$$a + bx^n = t^s \quad \Longleftrightarrow \quad x = \varphi(t) = \left(\frac{t^s - a}{b}\right)^{1/n}$$

da cui $\varphi'(t) = \dfrac{s}{bn}\left(\dfrac{t^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} t^{s-1}$, $x^m = \left(\dfrac{t^s-a}{b}\right)^{m/n}$ e $(a+bx^n)^p = t^{sp} = t^r$. Pertanto

$$I_{m,n,p} = \frac{s}{bn}\int t^{r+s-1}\left(\frac{t^s-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dt$$

che è l'integrale di una funzione razionale fratta.

(b) Se $p + \dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ si pone

$$t^s = \frac{a+bx^n}{x^n} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \varphi(t) = \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^{1/n}$$

da cui $\varphi'(t) = -\dfrac{s}{an}\left(\dfrac{a}{t^s-b}\right)^{\frac{1}{n}+1} t^{s-1}$, $x^m = \left(\dfrac{a}{t^s-b}\right)^{m/n}$, $(a+bx^n)^p = x^{np}t^{sp} = \left(\dfrac{a}{t^s-b}\right)^p t^r$. Quindi

$$I_{m,n,p} = -\frac{s}{an}\int \left(\frac{a}{t^s-b}\right)^{p+\frac{m+1}{n}+1} t^{r+s-1}\, dt$$

che è l'integrale di una funzione razionale fratta.

In conclusione, *se uno almeno tra* p, $\dfrac{m+1}{n}$, $p+\dfrac{m+1}{n}$ *è intero allora è possibile trovare una sostituzione che permetta l'espressione esplicita della soluzione dell'integrale differenziale binomio* $I_{m,n,p}$ *mediante la composizione di funzioni elementari*. Chebishev ha dimostrato che questi sono gli unici casi per cui ciò avvenga per un integrale differenziale binomio.

36. Integrale secondo Riemann

Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione definita e limitata[21] in $[a,b)$. Si suddivida $[a,b)$ in sottointervalli $[x_{i-1}, x_i)$, $1 \le i \le n$, in modo da ottenere la seguente partizione Δ di $[a,b)$:

$$\Delta \quad : \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\ .$$

Poiché f è limitata in $[a,b)$, gli estremi

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i)} f \quad , \quad M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i)} f$$

[21]Ragionamenti analoghi a quelli che seguono si fanno anche nel caso in cui la funzione f sia definita e limitata in $[a,b]$ oppure in $(a,b]$ o in (a,b).

esistono finiti per $1 \leq i \leq n$. Si considerino allora le somme (dipendenti da Δ)

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad , \quad S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

rispettivamente dette *somma inferiore* e *somma superiore* secondo Riemann della funzione f rispetto a Δ; chiaramente $s_\Delta \leq S_\Delta$. In questo modo si determinano due insiemi di numeri reali $\{s_\Delta : \Delta \text{ partizione di } [a,b)\}$ e $\{S_\Delta : \Delta \text{ partizione di } [a,b)\}$. Se si seleziona un punto $\widetilde{x} \in (x_{i-1}, x_i)$, si ottiene una nuova partizione $\widetilde{\Delta}$ di $[a,b)$,

$$\widetilde{\Delta} \quad : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < \widetilde{x} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \; .$$

Poiché dalle proprietà dell'estremo inferiore e superiore

$$m_i \leq \inf_{[x_{i-1},\widetilde{x})} f \;\; , \;\; m_i \leq \inf_{[\widetilde{x},x_i)} f \quad \text{e} \quad M_i \geq \sup_{[x_{i-1},\widetilde{x})} f \;\; , \;\; M_i \geq \sup_{[\widetilde{x},x_i)} f \; ,$$

ne segue che $s_\Delta \leq s_{\widetilde{\Delta}}$, $S_\Delta \geq S_{\widetilde{\Delta}}$. Siano $s_{\Delta'} \in \{s_\Delta\}$, $S_{\Delta''} \in \{S_\Delta\}$: se Δ''' è la partizione $\Delta''' = \Delta' \cup \Delta''$ allora

$$s_{\Delta'} \leq s_{\Delta'''} \leq S_{\Delta'''} \leq S_{\Delta''}$$

e dunque

$$s_{\Delta'} \leq S_{\Delta''} \; .$$

Pertanto gli insiemi $\{s_\Delta : \Delta \text{ partizione di } [a,b)\}$, $\{S_\Delta : \Delta \text{ partizione di } [a,b)\}$ formano una coppia di classi separate in $\mathbb{R}$ e perciò

1. $\sup\limits_\Delta s_\Delta \leq S_\Delta$, $\inf\limits_\Delta S_\Delta \geq s_\Delta$ per ogni Δ (i.e. $\sup\limits_\Delta s_\Delta$, $\inf\limits_\Delta S_\Delta$ esistono finiti),
2. $\sup\limits_\Delta s_\Delta \leq \inf\limits_\Delta S_\Delta$.

Definizione 36.1. Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ definita e limitata in $[a,b)$. Si chiama *integrale inferiore* (secondo Riemann) di f su $[a,b)$ il numero reale

$$\underline{\int_{[a,b)}} f(x)\, dx := \sup_\Delta s_\Delta \; ;$$

esso si indica anche con

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \; .$$

Si chiama *integrale superiore* (secondo Riemann) di f su $[a,b)$ il numero reale

$$\overline{\int_{[a,b)}} f(x)\, dx := \inf_\Delta S_\Delta \; ;$$

esso si indica anche con

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx \; .$$

Dalla definizione si ha che

$$\underline{\int_{[a,b)}} f(x)\, dx \leq \overline{\int_{[a,b)}} f(x)\, dx \; .$$

Definizione 36.2. Una funzione limitata $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ si dice *integrabile secondo Riemann* in $[a,b)$ se

$$\underline{\int_{[a,b)}} f(x)\,dx = \overline{\int_{[a,b)}} f(x)\,dx$$

e il numero reale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_{[a,b)}} f(x)\,dx = \overline{\int_{[a,b)}} f(x)\,dx$$

si chiama *integrale secondo Riemann* di f su $[a,b)$.

f si chiama la *funzione integranda*, a e b si dicono gli *estremi di integrazione* e x è la variabile di integrazione. Se f è una funzione limitata in $[a,b]$ oppure in $(a,b]$ o in (a,b), in modo simile a quanto visto sopra, si definisce l'integrabilità secondo Riemann di f in $[a,b]$ oppure in $(a,b]$ o in (a,b).

Esempio 36.1.

(i) La funzione caratteristica $\chi_{[a,b)}$ di un intervallo $[a,b)$ è integrabile secondo Riemann in $[a,b)$. Infatti per ogni partizione Δ di $[a,b)$ si ha $\inf\limits_{[x_{i-1},x_i)} \chi_{[a,b)} = 1$, $\sup\limits_{[x_{i-1},x_i)} \chi_{[a,b)} = 1$ da cui

$$s_\Delta = S_\Delta = b - a$$

e quindi

$$\underline{\int_a^b} \chi_{[a,b)}(x)\,dx = \sup_\Delta s_\Delta = b - a = \inf_\Delta S_\Delta = \overline{\int_a^b} \chi_{[a,b)}(x)\,dx$$

ovvero

$$\int_a^b \chi_{[a,b)}(x)\,dx = b - a\ . \tag{36.1}$$

(ii) Si chiama *funzione semplice* una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di intervalli

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \chi_{[a_j,b_j)}(x) \tag{36.2}$$

dove $[a_j,b_j) \cap [a_k,b_k) = \emptyset$ per $j \neq k$. Possiamo supporre (eventualmente rinumerando gli intervalli $[a_j,b_j)$) che sia $b_j \leq a_{j+1}$, $1 \leq j \leq m-1$, cosicché

$$a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_{m-1} < b_{m-1} \leq a_m < b_m\ .$$

Una funzione semplice è integrabile secondo Riemann e si ha

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{j=1}^m \lambda_j (b_j - a_j)\ . \tag{36.3}$$

Infatti si ponga $a = a_1$, $b = b_m$ e sia Δ una partizione di $[a,b)$,

$$\Delta \quad : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\ .$$

Allora per ogni $1 \leq j \leq m$ esisteranno $k_j, r_j \in \mathbb{N}$ tali che $[x_{k_j+s-1}, x_{k_j+s}) \in \Delta$, per $0 \leq s \leq r_j$ e $x_{k_j-1} \leq a_j < x_{k_j}$, $x_{k_j+r_j-1} < b_j \leq x_{k_j+r_j}$. La partizione Δ determina

(a) una partizione Δ_j di $[a_j, b_j)$ nel modo seguente:

$$\Delta_j \quad : \quad a_j < x_{k_j} < x_{k_j+1} < \cdots < x_{k_j+r_j-2} < x_{k_j+r_j-1} < b_j$$

da cui segue che

$$s_{\Delta_j} = \lambda_j(x_{k_j} - a_j) + \sum_{s=1}^{r_j-1} \lambda_j(x_{k_j+s} - x_{k_j+s-1}) + \lambda_j(b_j - x_{k_j+r_j-1}) =$$
$$= \lambda_j(b_j - a_j); .$$

Allo stesso modo

$$S_{\Delta_j} = \lambda_j(b_j - a_j) \ ;$$

(b) una partizione $\widetilde{\Delta}$ di $[a, b)$ nel modo seguente:

$$\widetilde{\Delta} \quad : \quad a = a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k_j-1} \leq a_j < x_{k_j} < x_{k_j+1} < \cdots <$$
$$< x_{k_j+r_j-1} < b_j \leq x_{k_j+r_j} < \cdots < b_m = b \ .$$

Si noti che $\varphi\big|_{\widetilde{\Delta} \setminus \bigcup\limits_{1 \leq j \leq m} \Delta_j} = 0$ e dunque

$$s_{\widetilde{\Delta}} = \sum_{j=1}^{m} s_{\Delta_j} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(b_j - a_j) = \sum_{j=1}^{m} S_{\Delta_j} = S_{\widetilde{\Delta}} \ .$$

Siccome

$$s_{\widetilde{\Delta}} \leq \sup_{\Delta} s_{\Delta} \leq \inf_{\Delta} S_{\Delta} \leq S_{\widetilde{\Delta}} = s_{\widetilde{\Delta}}$$

si ha che

$$\underline{\int_a^b} \varphi(x)\, dx = \overline{\int_a^b} \varphi(x)\, dx = s_{\widetilde{\Delta}}$$

ovvero la (36.3)

Osservazione 36.1. Ci sono funzioni limitate che non sono integrabili secondo Riemann, ad esempio si consideri la funzione $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } \ x \text{ razionale} \\ 0 & \text{per } \ x \text{ irrazionale} \ . \end{cases}$$

Per ogni partizione Δ di $[0, 1)$ è $s_{\Delta} = 0$, $S_{\Delta} = 1$ e dunque

$$0 = \underline{\int_0^1} f(x)\, dx < \overline{\int_0^1} f(x)\, dx \ .$$

Valgono i seguenti fatti:

Proposizione 36.1.

(a) *Una funzione continua in un compatto $[a, b]$ è ivi integrabile secondo Riemann.*
(b) *Una funzione limitata e monotòna in un intervallo $[a, b)$ è ivi integrabile secondo Riemann.*
(c) *Una funzione limitata in $[a, b)$ con un numero finito di discontinuità in $[a, b)$ è ivi integrabile secondo Riemann.*

• Si indica con $\mathcal{R}([a,b))$ l'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann in $[a,b)$. Dal punto (c) della Proposizione 36.1 segue che

Osservazione 36.2. Se f è continua e limitata in $[a,b)$ allora $f \in \mathcal{R}([a,b))$.
Infatti in tal caso f è una funzione limitata in $[a,b)$ priva di discontinuità.
Poiché f è limitata, non può essere $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$. Se $\lim_{x\to b^-} f(x) = \ell$ allora f ammette l'estensione continua $f^* : [a,b] \to \mathbb{R}$ data da

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in [a,b) \\ \ell & , \quad x = b\ . \end{cases}$$

Il lettore raffronti con attenzione il punto (a) e l'Osservazione 36.2 precedente con la seguente:

Osservazione 36.3. Se f è continua in $[a,b)$ allora non è detto che f sia integrabile secondo Riemann in $[a,b)$. Infatti sia $f(x) = \dfrac{1}{x}$ per $x \in [-1,0)$: essa è continua in $[-1,0)$ ma non è limitata, quindi non è possibile definire l'integrale secondo Riemann di tale funzione sull'intervallo $[-1,0)$.

Si dimostra che

Proposizione 36.2.

(i) *Se $f,g \in \mathcal{R}([a,b))$ e $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a,b)$ allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

(ii) *Se $f,g \in \mathcal{R}([a,b))$ e $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ allora $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}([a,b))$ e*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

(iii) *Se $f,g \in \mathcal{R}([a,b))$ allora $fg \in \mathcal{R}([a,b))$ e*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{1/2}\ .$$

(iv) *Se $f \in \mathcal{R}([a,b))$ allora anche $|f| \in \mathcal{R}([a,b))$ e*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\ .$$

(v) *Se $f \in \mathcal{R}([a,b))$ e $[c,d) \subset [a,b)$ allora $f \in \mathcal{R}([c,d))$.*

Osservazione 36.4.

(i) Esistono funzioni $f \notin \mathcal{R}([a,b))$ per cui invece $|f| \in \mathcal{R}([a,b))$. Infatti si consideri $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \text{ razionale} \\ -1 & \text{per } x \text{ irrazionale}\ . \end{cases}$$

Per ogni partizione Δ, $s_\Delta = -1$, $S_\Delta = 1$ e dunque

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = -1 < 1 = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \ ,$$

mentre poiché $|f(x)| = 1$ per ogni $x \in [0,1)$, è ovvio che

$$\underline{\int_0^1} |f(x)|\,dx = \overline{\int_0^1} |f(x)|\,dx = 1 \ .$$

(ii) Se $f \in \mathcal{R}([a,b))$ e $a < c < b$ allora $f \in \mathcal{R}([a,c))$ e $f \in \mathcal{R}([c,b))$; inoltre

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \ .$$

Questo segue immediatamente dalla v) della Proposizione 36.2.

Definizione 36.3. Sia $f \in \mathcal{R}([a,b))$. Si pone

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0 \ ,$$

e

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx \ .$$

37. Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Premettiamo il seguente

Teorema 37.1 (della media integrale). *Sia $f \in \mathcal{R}([a,b))$. Allora esiste un punto $y_0 \in [\inf\limits_{[a,b)} f \ , \sup\limits_{[a,b)} f]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)\,dx = y_0(b-a) \ .$$

Dimostrazione. Poiché f è integrabile secondo Riemann, f è limitata in $[a,b)$. Siano $\ell = \inf\limits_{[a,b)} f$ e $L = \sup\limits_{[a,b)} f$; allora

$$\ell\chi_{[a,b)} \le f\big|_{[a,b)} \le L\chi_{[a,b)} \ .$$

Integrando secondo Riemann e tenuto conto della (36.1) si ha:

$$\ell(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le L(b-a)$$

e dividendo per $b-a>0$

$$\ell \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le L$$

cioè il numero $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ è un punto del connesso $[\ell, L]$, di conseguenza esiste $y_0 \in [\ell, L]$ che eguaglia tale valore ovvero

$$\int_a^b f(x)\,dx = y_0(b-a) \ .$$

□

Osservazione 37.1. Il teorema della media integrale è equivalente al fatto che

$$\left(\inf_{[a,b)} f\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \left(\sup_{[a,b)} f\right)(b-a)\ .$$

Corollario 37.1. *Sia $f \in C^0([a,b])$. Allora esiste un punto $x_0 \in [a,b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)\ .$$

Dimostrazione. Se f è continua in $[a,b]$ allora f è integrabile in $[a,b]$ e in di esso ammette minimo ℓ e massimo L. Usando allora il teorema della media integrale, esiste un punto $y_0 \in [\ell, L]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = y_0(b-a)$$

e dal fatto che (essendo f continua) $f([a,b]) = [\ell, L]$ è $y_0 = f(x_0)$ per qualche $x_0 \in [a,b]$. □

• Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione (limitata) integrabile secondo Riemann in $[a,b)$. Poiché f è integrabile in $[a,x)$, per ogni $x \in [a,b)$, si definisce *funzione integrale* di f la funzione $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ data da

$$\Phi(x) := \int_a^x f(t)\,dt\ .$$

Si osservi che la funzione integrale è definita anche per ogni funzione f definita in un intervallo $[a,b)$ purché sia $f \in \mathcal{R}([a,x))$, per ogni $x \in [a,b)$: in tal caso però la funzione integrale è definita in $[a,b)$. In particolare questo accade se $f \in C^0([a,b))$.

Proposizione 37.1. *Sia $f \in \mathcal{R}([a,b))$. La funzione integrale $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ è Lipschitziana in $[a,b]$.*

Dimostrazione. Poichè f è limitata in $[a,b)$, esiste una costante $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$, per ogni $x \in [a,b)$. Siano $x,\ x_0 \in [a,b]$, allora

$$|\Phi(x) - \Phi(x_0)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right|\ .$$

Se $x_0 \leq x$ allora

$$\left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^x f(t)\,dt + \int_{x_0}^a f(t)\,dt\right| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \leq$$
$$\leq \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt \leq M\int_{x_0}^x \chi_{[x_0,x)}(t)\,dt = M(x-x_0) = M|x-x_0|\ ;$$

se invece $x_0 \geq x$ allora

$$\left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right| = \left|-\int_x^a f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right| =$$
$$= \left|\int_x^a f(t)\,dt + \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right| = \left|\int_x^{x_0} f(t)\,dt\right|$$

e procedendo come sopra si ha la tesi. □

Osservazione 37.2.

(1) La funzione integrale $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ di una funzione $f \in \mathcal{R}([a,b))$ è uniformemente continua in $[a,b]$. Infatti ogni funzione lipschitziana in un insieme A è ivi uniformemente continua.

(2) Se $f \in C^0([a,b))$ allora $\Phi \in C^0([a,c])$ per ogni $c \in (a,b)$. Infatti Φ è in tal caso uniformemente continua in $[a,c]$ per ogni $c \in (a,b)$.

Teorema 37.2 (fondamentale del calcolo integrale). *Se $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua allora la funzione integrale Φ è derivabile in $[a,b)$ e per ogni $x \in [a,b)$ è $\Phi'(x) = f(x)$. Inoltre se $F : [a,b) \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f allora $F(x) = \Phi(x) + F(a)$.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in (a,b)$: se $a \le x < x_0$, poiché $f \in C^0([x,x_0])$, applicando il Corollario 37.1, si ha che esiste $\xi \in [x,x_0]$ tale che

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \lim_{\xi\to x_0^-} f(\xi) = f(x_0) .$$

In modo analogo, se $x_0 < x < b$, poiché $f \in C^0([x_0,x])$, si ha che esiste $\xi \in [x_0,x]$ tale che

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \lim_{\xi\to x_0^+} f(\xi) = f(x_0) .$$

I due limiti provano sia la derivabilità di Φ in x_0, sia che $\Phi'(x_0) = f(x_0)$. Inoltre Φ è derivabile in a perchè ancora si ha

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\Phi(x)-\Phi(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} \frac{1}{x-a} \int_{a}^{x} f(t)\,dt = \lim_{\xi\to a^+} f(\xi) = f(a) ,$$

per un certo $\xi \in (a,x)$, x appartenente ad un intorno destro di a, e $\Phi'(a) = f(a)$. A questo punto si osservi che la funzione integrale Φ (definita nel connesso $[a,b)$) è una primitiva di f in $[a,b)$, quindi se $F : [a,b) \to \mathbb{R}$ è un'altra primitiva di f in $[a,b)$, allora $F - \Phi$ è costante in $[a,b)$. Pertanto per $x \in [a,b)$ è

$$F(x) - \Phi(x) = (F-\Phi)(x) = (F-\Phi)(a) = F(a) - \Phi(a) = F(a)$$

cioè l'asserto. □

Osservazione 37.3. Se $f \in C^0([a,b])$ e F è una sua primitiva in $[a,b]$ allora

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) .$$

Infatti $F(b) = \lim_{x\to b^-} F(x)$ e dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che

$$F(b) = \lim_{x\to b^-} (\Phi(x) + F(a)) = \Phi(b) + F(a) \quad \text{dove} \quad \Phi(b) = \int_a^b f(t)\,dt .$$

Questo dà la formula cercata.

Esempio 37.1. Se f non è continua in $[a,b)$, la funzione integrale può non essere derivabile come mostra il seguente esempio. Si consideri la *funzione di Heaviside* (detta anche *funzione segno di* x) data da

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , \quad \text{per} \ \ x < 0 \\ 0 & , \quad \text{per} \ \ x = 0 \\ 1 & , \quad \text{per} \ \ x > 0 \ . \end{cases}$$

Essa non è continua in $[-1, 1)$. Tuttavia è integrabile in $[-1, 1)$ ($\operatorname{sgn}(x)$ è limitata in $[-1, 1)$ ed ha una sola discontinuità). La funzione integrale $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \operatorname{sgn}(t)\, dt$ è dunque così fatta:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} -\chi_{[-1,x)}(t)\, dt & , \quad x \le 0 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} -\chi_{[-1,0)}(t)\, dt + \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,x)}(t)\, dt & , \quad x > 0 \end{cases}$$

da cui segue che

$$\Phi(x) = \begin{cases} -x - 1 & , \quad \text{per} \ \ x \le 0 \\ x - 1 & , \quad \text{per} \ \ x > 0 \end{cases}$$

cioè $\Phi(x) = |x| - 1$ che non è derivabile in $x = 0$.

Osservazione 37.4.

(1) Siano $f \in C^0([a, b])$ e $g \in C^1([a, b])$, e sia F una primitiva di f, allora

$$\int_a^b f(t)g(t)\, dt = (Fg)(b) - (Fg)(a) - \int_a^b F(t)g'(t)\, dt \ .$$

Infatti applicando l'Osservazione 37.3 alla funzione fg, si ha che

$$\int_a^b f(t)g(t)\, dt = H(b) - H(a)$$

dove H è una qualunque primitiva di fg. D'altra parte dalla formula d'integrazione per parti (cfr. Proposizione 35.1) una primitiva di fg è $Fg + K$ dove K è una primitiva di $-Fg'$, allora si ha

$$\int_a^b f(t)g(t)\, dt = F(b)g(b) - F(a)g(a) + (K(b) - K(a)) =$$

$$= F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(t)g'(t)\, dt \ .$$

(2) Siano $f \in C^0([c, d])$ e $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ una funzione biunivoca di classe C^1 in $[a, b]$ tale che $\varphi(a) = c$ e $\varphi(b) = d$ (e $x = \varphi(t)$). Allora

$$\int_c^d f(x)\, dx \equiv \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \ .$$

Infatti dall'Osservazione 37.3, se F è una primitiva di f allora

$$\int_c^d f(x)\, dx = F(d) - F(c) \ .$$

D'altra parte dalla formula d'integrazione per sostituzione (cfr. Proposizione 35.2), una primitiva di $(f\circ\varphi)\varphi'$ è $F\circ\varphi$ e dunque

$$\int_a^b (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,dt = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) = F(d)-F(c)$$

e questo dà la formula cercata.

Sia $f\in C^1([a,b])$, allora $f'\in C^0([a,b])$ e f ne è una sua primitiva; dall'Osservazione 37.3 segue che

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)\ . \tag{37.1}$$

Definizione 37.1. Una funzione f si dice *regolare a tratti* in $[a,b]$ se

(i) $f\in C^0([a,b])$,

(ii) f è derivabile in $[a,b]$ tranne al più in un numero finito di punti,

(iii) la funzione derivata f' (dove esiste) è continua e limitata.

Si osservi che se f è regolare a tratti in $[a,b]$ e $x_1,\ \ldots,\ x_n\in[a,b]$ sono i punti dove f non è derivabile, allora $f'\in C^0([a,b]\backslash\{x_1,\ \cdots,\ x_n\})$ ed esiste una costante $M>0$ tale che $|f'(x)|\le M$, per ogni $x\in[a,b]\backslash\{x_1,\cdots,x_n\})$. Queste condizioni implicano l'integrabilità (secondo Riemann) della funzione derivata f' in $[a,b]$ (cfr. Proposizione 36.1 c)). Sussiste la seguente

Proposizione 37.2. *Sia f una funzione regolare a tratti in $[a,b]$, allora*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)\ .$$

Dimostrazione. Si può supporre che ci sia un unico punto in cui f non sia derivabile, perché, essendo tali punti in numero finito, basterà ripetere il ragionamento per ciascuno di essi. Sia dunque $x_0\in[a,b]$ il punto di non derivabilità di f, allora $f'\in C^0([a,b]\backslash\{x_0\})$ ed è limitata. Sia Φ_1 la funzione integrale di f' in $[a,b]$: essa è continua (perché Lipschitziana). Per $a\le x<x_0$ è $f\in C^1([a,x])$ ed usando la formula (37.1) si ha

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt = \Phi_1(x)$$

allora

$$\lim_{x\to x_0^-}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to x_0^-}\Phi_1(x)=\Phi_1(x_0)$$

ovvero, essendo f continua in $[a,b]$,

$$f(x_0)-f(a)=\Phi_1(x_0)\ . \tag{37.2}$$

Analogamente se $x_0<x\le b$ allora $f\in C^1([x,b]$ e dunque

$$f(b)-f(x)=\int_x^b f'(t)\,dt = \int_a^b f'(t)\,dt - \int_a^x f'(t)\,dt = \Phi_1(b)-\Phi_1(x)$$

da cui

$$\lim_{x\to x_0^+}(f(b)-f(x)) = \lim_{x\to x_0^+}(\Phi_1(b)-\Phi_1(x)) = \Phi_1(b)-\Phi_1(x_0)$$

ovvero

$$f(b)-f(x_0)=\Phi_1(b)-\Phi_1(x_0)\ . \tag{37.3}$$

Sommando membro a membro le (37.2) e (37.3) si ottiene $f(b) - f(a) = \Phi_1(b)$, cioè la tesi. $\square$

38. Integrali e formule di Mac Laurin

In questo paragrafo si determinano le formule di Mac Laurin di alcune funzioni integrando secondo Riemann la formula di Mac Laurin nota di una qualche funzione.

• Si consideri la funzione $C^\infty(\mathbb{R}\backslash\{1\})$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$: integrando nell'intervallo $[0, x]$, con $x < 1$, si ha

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\ dt = \log \frac{1}{|1-t|}\bigg|_0^x = \log \frac{1}{1-x}\ .$$

Riprendendo allora la formula di Mac Laurin (32.7) della funzione $f(x)$ e integrando membro a membro nell'intervallo $[0, x]$, si ottiene

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^x t^k\, dt + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\ dt\ .$$

Alla stessa formula si giunge integrando nell'intervallo $[x, 0]$.
Quindi la formula di Mac Laurin della funzione $f(x) = \log \dfrac{1}{1-x}$ per $x < 1$ è

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\ dt\ . \tag{38.1}$$

Sostituendo $-t$ al posto di x nella (32.7), si ottiene

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}\ .$$

Integrando membro a membro nell'intervallo $[x, 0]$ con $x > -1$, si ha

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \int_0^x (-1)^k t^k\, dt + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}\ dt\ .$$

Alla stessa formula si giunge integrando nell'intervallo $[0, x]$.
Quindi la formula di Mac Laurin della funzione $\log(1+x)$ per $x > -1$ è

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}\ dt\ . \tag{38.2}$$

Sommando le due formule ottenute (valide per $x \in (-1, 1)$) si ha la formula di Mac Laurin della funzione $f(x) = \log \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, i.e.

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\, dt\ . \tag{38.3}$$

• Sempre partendo dalla formula (32.7), sostituendo $-t^2$ al posto di x e poi integrando, con $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int_0^x (-1)^k t^{2k}\, dt + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ dt$$

ovvero si ha la formula di Mac Laurin della funzione $f(x) = \arctan x$,

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ dt\ . \tag{38.4}$$

• Nello formula (32.5) si prenda $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ e si sostituisca $-t^2$ al posto di x. Integrando, con $x \in (-1,1)$, si ottiene:

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k} \int_0^x (-1)^k t^{2k}\, dt +$$

$$+(-1)^{n+1} \int_0^x \binom{-1/2}{n+1} (1+\xi)^{-n-3/2} t^{2n+2}\, dt$$

per $0 < \xi < t^2 \leq x$, cioè

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{(2k)(2k-2)\cdots 2} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} +$$

$$+(-1)^{n+1}(-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{(2n+2)(2n)\cdots 2} \int_0^x (1+\xi)^{-n-3/2} t^{2n+2}\, dt$$

ovvero si ha la formula di Mac Laurin della funzione $f(x) = \arcsin x$,

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\ \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\ (1+\xi)^{-n-3/2} \int_0^x t^{2n+2}\, dt \tag{38.5}$$

dove si pone

$$(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2k-2)(2k) \ \text{ e } \ (2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)(2k+1)\ .$$

• Usando l'integrale secondo Riemann diamo adesso una formula di rappresentazione del resto della formula di Taylor. Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$: se f è di classe C^{n+1} in un intorno di x_0 allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f^{(n+1)} \in C^0([x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon])$, perciò $f^{(n+1)}$ è integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$. Si ha allora la seguente.

Proposizione 38.1 (rappresentazione integrale del resto di Taylor). *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ di classe C^{n+1} in un intorno di $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni punto $x \in I(x_0, \varepsilon)$ sia*

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt\ .$$

Dimostrazione. Si procede per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Se $n = 0$ si ha f di classe C^1 in un intorno di x_0, dunque esiste $\varepsilon > 0$ per cui $f' \in C^0([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ e quindi per $x \in I(x_0, \varepsilon)$ è

$$\frac{1}{0!} \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = f(x) - f(x_0) = R_0(x; x_0)$$

perciò l'enunciato è vero per $n = 0$. Sia ora f di classe $C^{(n+2)}$ in un intorno di x_0; ammessa vera la formula per n, la dobbiamo ora provare per $n + 1$. Si noti che in tal caso, per qualche $\varepsilon > 0$, la funzione $f^{(n+2)}$ è continua in $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ mentre $f^{(n+1)}$ è di classe C^1 in un intorno di x_0; la funzione $g(t) = (x - t)^m$ è di classe C^∞ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Allora la funzione $h(t) = f^{(n+2)}(t)(x - t)^{n+1}$ è integrabile in $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ e per $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\, dt &= \frac{1}{(n+1)!} \left[f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1} \right]\Big|_{x_0}^{x} + \\
&+ \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} (n+1) f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt = \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} + R_n(x; x_0) = \\
&= f(x) - P_n(x; x_0) - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = \\
&= f(x) - P_{n+1}(x; x_0)
\end{aligned}$$

ovvero l'uguaglianza cercata

$$\frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\, dt = R_{n+1}(x; x_0)\ .$$

□

39. Integrali generalizzati o impropri

• Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a, b)$ con $b > a$.

Definizione 39.1. Si dice che una tale funzione f è *integrabile in senso generalizzato* (o *improprio*) in $[a, +\infty)$ se esiste finito il

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx\ .$$

Tale limite si indica con

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \tag{39.1}$$

• Se f è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$ allora si dice che l'*integrale generalizzato* (o *improprio*) (39.1) *converge*; se questo non accade si dice che l'integrale generalizzato (39.1) *diverge*.

Esempio 39.1. La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$, per ogni $a > 0$, se $\alpha > 1$. Infatti se $b > a > 0$ allora

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b x^{-\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_a^b =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right|_a^b = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right) ,$$

e tale limite esiste finito (è uguale a $\dfrac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}$) se $\alpha - 1 > 0$, i.e. se $\alpha > 1$; altrimenti se $\alpha < 1$ l'integrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ diverge. Se invece $\alpha = 1$ allora

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\log x\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}(\log b - \log a) = +\infty ,$$

dunque la funzione $\dfrac{1}{x}$ non è integrabile in $[a, +\infty)$, per ogni $a > 0$, ovvero l'integrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x}$ diverge.

Definizione 39.2. Una funzione $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ è *assolutamente integrabile* (in senso generalizzato) in $[a, +\infty)$ se la funzione $|f|$ è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$.

Proposizione 39.1. *Una funzione f assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$ è ivi integrabile in senso generalizzato e*

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \le \int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx .$$

Dimostrazione. Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ assolutamente integrabile. Allora

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b |f(x)|\,dx = \ell \in \mathbb{R} .$$

Dal criterio di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $b_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $b',\ b'' \in [a, +\infty)$ con $b',\ b'' > b_\varepsilon$, si abbia

$$\left|\int_a^{b''}|f(x)|\,dx - \int_a^{b'}|f(x)|\,dx\right| = \left|\int_{b'}^{b''}|f(x)|\,dx\right| < \varepsilon .$$

Siccome

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| \le \left|\int_{b'}^{b''}|f(x)|\,dx\right|$$

allora si ha, per ogni $b',\ b'' \in [a, +\infty)$ con $b',\ b'' > b_\varepsilon$:

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

che è la condizione di Cauchy che assicura l'esistenza finita del limite

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx .$$

Inoltre per ogni $b > a$ è:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

per cui passando al limite per b tendente a $+\infty$ si ottiene

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx\ .$$

□

Proposizione 39.2. *Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a, b)$, con $b > a$. Se esiste una funzione positiva $\varphi : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty)$ tale che $|f(x)| \leq \varphi(x)$, per ogni $x \in [a, +\infty)$, allora f è assolutamente integrabile in $[a, +\infty)$.*

Dimostrazione. Siano $b', b'' > a$ con $b' < b''$, allora per ogni $x \in [b', b'')$ è $0 \leq |f(x)| \leq \varphi(x)$. Integrando (secondo Riemann) si ha

$$0 \leq \int_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx \leq \int_{b'}^{b''} \varphi(x)\,dx\ .$$

Il risultato allora segue dal criterio di Cauchy. □

Teorema 39.1. *Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a, b)$ con $b > a$. Se esiste finito*

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x)$$

per qualche $\alpha > 1$ allora f è assolutamente integrabile in $[a, +\infty)$.

Dimostrazione. Sia

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = \ell$$

per qualche $\alpha > 1$. Dalla definizione di limite, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x > x_\varepsilon$, sia $|x^\alpha f(x) - \ell| < \varepsilon$, da cui segue anche $||x^\alpha f(x)| - |\ell|| < \varepsilon$ e perciò $-\varepsilon + |\ell| < |x|^\alpha |f(x)| < \varepsilon + |\ell|$. Se $\ell = 0$, per $\varepsilon = 1$ si ha che $|f(x)| < \dfrac{1}{x^\alpha}$ per $x > x_1 > \max\{0, a\}$, se invece $\ell \neq 0$ allora per $\varepsilon = |\ell| > 0$ si ha che $|f(x)| < 2|\ell| \dfrac{1}{x^\alpha}$ per $x > x_{|\ell|} > \max\{0, a\}$.

In ogni caso, esistono una costante $C > 0$ e $x_C > \max\{0, a\}$ tali che

$$|f(x)| < \frac{C}{x^\alpha}$$

per $x > x_C$. Essendo $\alpha > 1$, dall'Esempio 39.1, la funzione $x^{-\alpha}$ è integrabile in $[x_C, +\infty)$ e la tesi segue dalla Proposizione 39.2, tenuto conto del fatto che

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{x_C} f(x)\,dx + \int_{x_C}^{+\infty} f(x)\,dx\ .$$

□

Osservazione 39.1. Sia $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a,b)$ con $b>a$. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ di ordine $\alpha>1$ allora f è integrabile in $[a,+\infty)$. Infatti in tal caso esiste $\ell\in\mathbb{R}$, $\ell\neq 0$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{x^\alpha}}=\ell \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x)=\ell\neq 0$$

e poiché $\alpha>1$, f è assolutamente integrabile e dunque integrabile in $[a,+\infty)$.

In modo analogo sia $f:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $(b,a]$ con $b<a$.

Definizione 39.3. Si dice che una tale funzione f è *integrabile in senso generalizzato* (o *improprio*) in $(-\infty,a]$ se esiste finito

$$\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\,dx\ .$$

Tale limite lo si indica con

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx\ . \tag{39.2}$$

• Come nel caso dell'integrale generalizzato (39.1) si definisce la convergenza o la divergenza dell'integrale (39.2); similmente alla Definizione 39.2 si dà la definizione di *funzione assolutamente integrabile* in $(-\infty,a]$. Anche per questo tipo di integrale generalizzato valgono le analoghe delle Proposizioni 39.1, 39.2 e l'analogo del Teorema 39.1.

Definizione 39.4. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a,b)$ per $b>a$ e in ogni intervallo $(b,a]$ per $b<a$. Se

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

convergono per ogni $a\in\mathbb{R}$, allora si definisce

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{39.3}$$

e in tal caso si dice che l'integrale (39.3) *converge.*

Osservazione 39.2. Se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

converge allora esiste finito

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^a f(x)\,dx\ .$$

Infatti, senza perdere di generalità, si può assumere $a>0$ e poichè l'integrale (39.3) converge, per ogni $b\in(-a,a)$, convergono

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_b^{+\infty} f(x)\,dx\ .$$

Si ha

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty}\left[\int_{-a}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{a} f(x)\,dx\right]$$

dove

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{b} f(x)\,dx \underset{c=-a}{=} \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \ell_1 \ ,$$

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{b}^{a} f(x)\,dx = \int_{b}^{+\infty} f(x)\,dx = \ell_2$$

provando così l'esistenza finita del limite

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \ .$$

Il viceversa non è vero, cioè se

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

esiste finito, non è detto che l'integrale (39.3) converga. Infatti per $f(x) = \arctan x$ si ha

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} \arctan x\,dx = \lim_{a\to+\infty}\left[x\,\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\left[a\,\arctan a - \frac{1}{2}\log(1+a^2) - \left(a\,\arctan a - \frac{1}{2}\log(1+a^2)\right)\right] = 0$$

mentre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan x\,dx = \int_{-\infty}^{a} \arctan x\,dx + \int_{a}^{+\infty} \arctan x\,dx \ .$$

Ora

$$\int_{-\infty}^{a} \arctan x\,dx = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{a} \arctan x\,dx =$$

$$= \lim_{b\to-\infty}\left[x\,\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]\Bigg|_{b}^{a} =$$

$$= \lim_{b\to-\infty}\left[a\,\arctan a - \frac{1}{2}\log(1+a^2) - b\,\arctan b + \frac{1}{2}\log(1+b^2)\right] = -\infty$$

e dunque basta questo perché l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan x\,dx$$

diverga.

• Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a,c)$ per $a \leq c < b$.

Definizione 39.5. Si dice che una tale funzione f è *integrabile in senso generalizzato* (o *improprio*) in $[a,b)$ se esiste finito il

$$\lim_{c\to b^-}\int_{a}^{c} f(x)\,dx \ .$$

Tale limite si indica con

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{39.4}$$

• Se f è integrabile in senso generalizzato in $[a,b)$ allora si dice che l'*integrale generalizzato* (o *improprio*) (39.4) *converge*; se questo non accade si dice che l'*integrale generalizzato* (39.4) *diverge*.

Esempio 39.2. La funzione $f(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$, $\alpha > 0$, è integrabile in senso generalizzato in $[a,b)$, per ogni $a < b$, se $0 < \alpha < 1$. Infatti

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{c\to b^-} \int_a^c (b-x)^{-\alpha}\,dx = \lim_{c\to b^-} \frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{\alpha-1}\Bigg|_a^c =$$

$$= \frac{1}{\alpha-1} \lim_{c\to b^-} \frac{1}{(b-x)^{\alpha-1}}\Bigg|_a^c = \frac{1}{\alpha-1} \lim_{c\to b^-} \left(\frac{1}{(b-c)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right)\,,$$

tale limite esiste finito (è uguale a $\dfrac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}}$) se $\alpha - 1 < 0$, i.e. se $0 < \alpha < 1$; altrimenti se $\alpha > 1$ l'integrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ diverge.

Se invece $\alpha = 1$ allora

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c (b-x)^{-1}\,dx = \lim_{c\to b^-} \log\frac{1}{b-x}\Bigg|_a^c =$$

$$= \lim_{c\to b^-} \left(\log\frac{1}{b-c} - \log\frac{1}{b-a}\right) = +\infty$$

e dunque la funzione $\dfrac{1}{b-x}$ non è integrabile in $[a,b)$, per ogni $a \in \mathbb{R}$, ovvero l'integrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{b-x}$ diverge.

Definizione 39.6. Una funzione $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ è *assolutamente integrabile* in senso generalizzato in $[a,b)$ se la funzione $|f|$ è integrabile in senso generalizzato in $[a,b)$.

Si dimostra come la Proposizione 39.1 la seguente

Proposizione 39.3. *Una funzione f assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[a,b)$ è ivi integrabile in senso generalizzato e*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Proposizione 39.4. *Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a,c)$, con $a \le c < b$. Se esiste una funzione positiva $\varphi : [a,b) \to \mathbb{R}$ integrabile in senso generalizzato in $[a,b)$ tale che $|f(x)| \le \varphi(x)$, per ogni $x \in [a,b)$, allora f è assolutamente integrabile in $[a,b)$.*

Dimostrazione. Siano $a < c' < c'' < b$, allora

$$0 \leq \int_{c'}^{c''} |f(x)|\, dx \leq \int_{c'}^{c''} \varphi(x)\, dx \; .$$

Il risultato allora segue dal criterio di Cauchy. $\square$

Teorema 39.2. *Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a,c)$ con $a \leq c < b$. Se esiste finito*

$$\lim_{x\to b^-} (b-x)^\alpha f(x)$$

per qualche $\alpha \in (0,1)$ allora f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[a,b)$.

Dimostrazione. Usando la definizione di limite, si procede come nella dimostrazione del Teorema 39.1. $\square$

Osservazione 39.3. Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a,c)$ con $a \leq c < b$. Se $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$ di ordine $0 < \alpha < 1$ allora f è integrabile in senso generalizzato in $[a,b)$. Infatti in tal caso esiste $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$ tale che

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{(b-x)^\alpha}} = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to b^-} (b-x)^\alpha f(x) = \ell \neq 0$$

e poiché $0 < \alpha < 1$, f è assolutamente integrabile e dunque integrabile (in senso generalizzato) in $[a,b)$.

• In modo analogo sia $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $(c,b]$ per $a < c \leq b$.

Definizione 39.7. Si dice che una tale funzione f è *integrabile in senso generalizzato* o *improprio*) in $(a,b]$ se esiste finito il

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\, dx \; .$$

Tale limite si indica con

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{39.5}$$

• Se f è integrabile in senso generalizzato in $(a,b]$ allora si dice che l'*integrale generalizzato* (o *improprio*) (39.5) *converge*; se questo non accade si dice che l'integrale generalizzato (39.5) *diverge.*

• Una funzione $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ è *assolutamente integrabile in senso generalizzato* in $(a,b]$ se la funzione $|f|$ è integrabile in senso generalizzato in $(a,b]$.

Si dimostrano in modo simile le analoghe delle Proposizioni 39.3 e 39.4 e del Teorema 39.2, e precisamente si hanno i seguenti risultati:

Proposizione 39.5. *Una funzione f assolutamente integrabile in senso generalizzato in $(a,b]$ è ivi integrabile in senso generalizzato e*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \; .$$

Proposizione 39.6. *Sia $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $(c,b]$, con $a<c\le b$. Se esiste una funzione positiva $\varphi:(a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile in senso generalizzato in $(a,b]$ tale che $|f(x)|\le\varphi(x)$, per ogni $x\in(a,b]$, allora f è assolutamente integrabile in $(a,b]$.*

Teorema 39.3. *Sia $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $(c,b]$ con $a<c\le b$. Se esiste finito*

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^\alpha f(x)$$

per qualche $\alpha\in(0,1)$ allora f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $(a,b]$.

39.1. **Gli integrali di Eulero.**

• Si chiama *integrale di Eulero di prima specie* o *funzione beta di Eulero* l'integrale

$$B(u,v)=\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\,dx$$

per $u,v\in\mathbb{R}$. Si osservi che se $u,v\ge 1$ l'integrale $B(u,v)$ è l'integrale secondo Riemann su $[0,1]$ della funzione continua $f(x)=x^{u-1}(1-x)^{v-1}$ e quindi in tal caso $B(u,v)$ è perfettamente definito. Se invece $u-1$, $v-1$ sono negativi allora $B(u,v)$ è un integrale generalizzato che converge se contemporaneamente è $1-u<1$, $1-v<1$, cioè se $u,v>0$. In definitiva la funzione di Eulero di prima specie $B(u,v)$ è definita per $u,v>0$.

Osservazione 39.4. **(i)** Si ha che

$$B(u,1)=\frac{1}{u}\ . \tag{39.6}$$

Infatti il conto diretto dà

$$\begin{aligned}
0<u<1:\quad & B(u,1)=\int_0^1 x^{u-1}\,dx=\lim_{b\to 0^+}\int_b^1 x^{u-1}\,dx=\lim_{b\to 0^+}\frac{x^u}{u}\Big|_b^1=\\
&=\lim_{b\to 0^+}\left(\frac{1}{u}-\frac{b^u}{u}\right)=\frac{1}{u}\ ,\\
u=1:\quad & B(u,1)=B(1,1)=\int_0^1 dx=x\Big|_0^1=1=\frac{1}{u}\ ,\\
u>1:\quad & B(u,1)=\int_0^1 x^{u-1}\,dx=\frac{x^u}{u}\Big|_0^1=\frac{1}{u}\ .
\end{aligned}$$

(ii) $B(u,v)$ è commutativo.

Infatti posto $t=1-x$ si ha $t=0$ per $x=1$ e $t=1$ per $x=0$ da cui

$$\begin{aligned}
B(v,u)=\int_0^1 x^{v-1}(1-x)^{u-1}\,dx&=-\int_1^0 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt=\\
&=\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt=B(u,v)\ .
\end{aligned}$$

In particolare $B(1,v)=B(v,1)=\dfrac{1}{v}$.

(iii) Sia $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, allora

$$B(u,n)=\frac{n-1}{u}\,B(u+1,n-1)\ . \tag{39.7}$$

Infatti, per $n \geq 2$, integrando per parti si ha

$$B(u+1, n-1) = \int_0^1 x^u (1-x)^{n-2}\, dx =$$

$$= -\frac{x^u (1-x)^{n-1}}{n-1}\Bigg|_0^1 + \frac{u}{n-1} \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{n-1}\, dx = \frac{u}{n-1}\, B(u,n)\ .$$

Dalla (39.7) si ricava facilmente che per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, è

$$B(u,n) = \frac{(n-1)!}{u(u+1)\cdots(u+n-1)}\ . \tag{39.8}$$

perché per $n = 1$ è ovvia, essendo

$$B(u,1) = \frac{1}{u} = \frac{0!}{u}\ ,$$

e per $n \geq 2$, applicando la (39.7) ripetutamente, si ha

$$B(u,n) = \frac{n-1}{u}\, B(u+1, n-1) = \frac{n-1}{u}\, \frac{n-2}{u+1}\, B(u+2, n-2) = \cdots =$$

$$\underset{(n-1)\text{-passi}}{=} \frac{n-1}{u}\, \frac{n-2}{u+1} \cdots \frac{n-(n-1)}{u+n-2}\, B(u+n-1, 1) =$$

$$= \frac{n-1}{u}\, \frac{n-2}{u+1} \cdots \frac{1}{u+n-2}\, \frac{1}{u+n-1} = \frac{(n-1)!}{u(u+1)\cdots(u+n-1)}\ .$$

• Si chiama *integrale di Eulero di seconda specie* o *funzione gamma di Eulero* l'integrale generalizzato

$$\Gamma(u) = \int_0^{+\infty} x^{u-1} e^{-x}\, dx$$

per $u \in \mathbb{R}$. Si osservi che la funzione integranda non è definita in $x = 0$ per $u - 1 < 0$ e dunque

$$\int_0^{+\infty} x^{u-1} e^{-x}\, dx = \int_0^a x^{u-1} e^{-x}\, dx + \int_a^{+\infty} x^{u-1} e^{-x}\, dx\ .$$

Ora

$$\lim_{x \to +\infty} x^{u-1} e^{-x} = 0$$

per ogni $u \in \mathbb{R}$, e la funzione $x^{u-1}e^{-x}$ è infinitesima di ordine superiore ad ogni numero positivo. Dunque il secondo integrale converge sempre; mentre

$$\lim_{x \to 0^+} x^{u-1} e^{-x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{1-u} e^x} = \infty$$

di ordine $1 - u$ e quindi il primo integrale converge se $1 - u < 1$, i.e. per $u > 0$. Pertanto la funzione di Eulero di seconda specie $\Gamma(u)$ è definita per $u > 0$.

Osservazione 39.5. $\Gamma(1) = 1$. Infatti

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a e^{-x}\, dx = \lim_{a \to +\infty} \left[-e^{-x}\Big|_0^a \right] =$$

$$= \lim_{a \to +\infty} -e^{-a} + 1 = 1\ .$$

Proposizione 39.7. *Per ogni $u > 0$ è*

$$\Gamma(u+1) = u\Gamma(u) \ .$$

Dimostrazione.

$$\Gamma(u+1) = \int_0^{+\infty} x^u e^{-x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b x^u e^{-x}\, dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[-x^u e^{-x}\Big|_0^b + u\int_0^b x^{u-1} e^{-x}\, dx \right] =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-b^u e^{-b}\right) + u \lim_{b\to+\infty} \int_0^b x^{u-1} e^{-x}\, dx = u\int_0^{+\infty} x^{u-1} e^{-x}\, dx = u\Gamma(u) \ .$$

□

Osservazione 39.6.

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ è

(39.9) $$\Gamma(n+1) = n! \ .$$

Infatti per $n = 0$, $\Gamma(1) = 1 = 0!$. Ammessa vera l'uguaglianza per n, $\Gamma(n+1) = n!$, la proposizione precedente per $u = n+1$ dà:

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)! \ .$$

(ii) La funzione di Eulero di seconda specie è determinata dai valori che essa assume nell'intervallo $(0,1]$. Infatti sia $u > 1$: se $u \in \mathbb{N}$ allora $\Gamma(u)$ è univocamente determinata dalla (39.9); se $u \notin \mathbb{N}$ allora $u = v + n$ con $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ parte intera di u e $v \in (0,1)$. Quindi

$$\Gamma(u) = \Gamma(v+n) = (v+n-1)\Gamma(v+n-1) = \cdots =$$
$$= (v+n-1)(v+n-2)\cdots v\Gamma(v)$$

e dunque basta conoscere il valore $\Gamma(v)$ per avere $\Gamma(u)$. In particolare[22]

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

ovvero

$$\int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x}\, dx = \sqrt{\pi} \ .$$

Con la sostituzione $x = t^2$ si ricava che

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ .$$

[22]Si dimostra che

(39.10) $$\Gamma(v)\Gamma(1-v) = \frac{\pi}{\sin v\pi} \ ;$$

per $v = 1/2$ si ha

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi \ ,$$

da cui

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \ .$$

Questo integrale generalizzato è chiamato *integrale di Poisson.*

• Esiste un legame tra le funzioni beta e gamma di Eulero e precisamente se $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 1$, allora

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \; .$$

Infatti dalle (39.8) e (39.9) è

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!}{m(m+1)\cdots(m+n-1)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \; .$$

Si dimostra che in realtà vale sempre

$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \tag{39.11}$$

per ogni $u, v > 0$.

• Si consideri l'integrale

$$F(u,v,w) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x^w)^{\frac{v}{w}-1}\, dx \; .$$

Se $u, v, w > 0$ l'integrale $F(u,v,w)$ converge e quindi $F(u,v,w)$ è ben definito. Posto $x^w = y$ è $y = 0$ per $x = 0$ e $y = 1$ per $x = 1$, dunque

$$F(u,v,w) = \frac{1}{w}\int_0^1 y^{\frac{u}{w}-\frac{1}{w}}(1-y)^{\frac{v}{w}-1} y^{\frac{1}{w}-1}\, dy =$$

$$= \frac{1}{w}\int_0^1 y^{\frac{u}{w}-1}(1-y)^{\frac{v}{w}-1}\, dx = \frac{1}{w}\, B\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right) =$$

$$= \frac{1}{w}\, B\left(\frac{v}{w}, \frac{u}{w}\right) = F(v,u,w) \; .$$

Se $u + v = w$ allora

$$F(u,v,w) = \frac{1}{w}\, \frac{\pi}{\sin \dfrac{u\pi}{w}} \; .$$

Infatti in tal caso $\frac{u}{w}, 1 - \frac{u}{w} \in (0,1)$ e dalla (39.11) si ha

$$F(u,v,w) = \frac{1}{w}\, B\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right) = \frac{1}{w}\, \frac{\Gamma(\frac{u}{w})\Gamma(\frac{v}{w})}{\Gamma(\frac{u+v}{w})} = \frac{1}{w}\, \frac{\Gamma(\frac{u}{w})\Gamma(1-\frac{u}{w})}{\Gamma(1)}$$

che dà la formula cercata tenuto conto della (39.10).

39.2. **Integrali generalizzati e serie numeriche.** Lo studio di un integrale generalizzato può essere collegato allo studio della convergenza di una serie numerica e viceversa, come mostra la seguente

Proposizione 39.8. *Sia* $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *una funzione positiva decrescente,* $f \in \mathcal{R}([a, b))$ *per ogni* $b > a$. *Allora la serie* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n+a)$ *converge se e solo se l'integrale generalizzato* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge; la serie* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n+a)$ *diverge se e solo se l'integrale generalizzato* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverge.*

Dimostrazione. Sia $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la succesione delle somme parziali della serie a termini positivi $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(n+a)$,

$$s_n = f(a) + f(1+a) + \cdots + f(n+a) \ ;$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{s_n\} \ .$$

Posto $a_n = \displaystyle\int_a^{a+n} f(x)\,dx$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \ ;$$

inoltre, poiché $f(x) > 0$, $a_n > 0$ e

$$a_n = \int_a^{a+n} f(x)\,dx = \int_a^{a+n-1} f(x)\,dx + \int_{a+n-1}^{a+n} f(x)\,dx =$$

$$= a_{n-1} + \int_{a+n-1}^{a+n} f(x)\,dx > a_{n-1}$$

perché l'ultimo integrale è un numero positivo. Dunque la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente e quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\} \ .$$

Si noti che, essendo $f(a+j) \leq f(x) \leq f(a+j-1)$ per $x \in [a+j-1, a+j]$, $(1 \leq j \leq n)$, si ottiene

$$a_n = \int_a^{a+n} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{a+j-1}^{a+j} f(x)\,dx \geq \sum_{j=1}^{n} f(a+j) = s_n - f(a) \ ,$$

ma anche

$$a_n = \int_a^{a+n} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{a+j-1}^{a+j} f(x)\,dx \leq \sum_{j=1}^{n} f(a+j-1) = s_{n-1} \leq s_n \ .$$

Ne segue che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \{s_n\} - f(a) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \{s_n\} \ .$$

Pertanto la serie $\sum_{n\geq 0} f(a+n)$ converge (diverge) se e solo se l'integrale generalizzato $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge (diverge). $\square$

Esempio 39.3.

(i) Rivediamo un risultato già noto per le serie (cfr. Osservazione 9.3) provandolo ora usando la proposizione appena dimostrata e cioè che la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$$

converge per $p>1$ e diverge per $p\leq 1$. Infatti si ponga $m=n-1$ allora la serie data si scrive come

$$\sum_{m\geq 0} \frac{1}{(m+1)^p} = \sum_{m\geq 0} f(m+1)$$

per $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ che è una funzione positiva e decrescente per $x\geq 1$. Ora

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

converge per $p>1$ e diverge per $p\leq 1$ dunque anche la serie $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^p}$ converge per $p>1$ e diverge per $p\leq 1$.

(ii) La serie

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\log n}$$

diverge. Infatti posto $m=n-2$ la serie data diventa

$$\sum_{m\geq 0} \frac{1}{(m+2)\log(m+2)} = \sum_{m\geq 0} f(2+m)$$

per $f(x)=\dfrac{1}{x}\log x$, che per $x\geq 2$, è positiva e decrescente. Si ha

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log x} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{dx}{x\log x} = \lim_{b\to+\infty} \log\log x\Big|_2^b =$$
$$= \lim_{b\to+\infty} [\log\log b - \log\log 2] = +\infty$$

dunque l'integrale diverge e perciò diverge anche la serie data.

(iii) La serie

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}} \log\frac{n+1}{n-1}$$

converge. Infatti posto $m=n-2$ la serie diventa

$$\sum_{m\geq 0} \frac{1}{\sqrt{m+2}} \log\frac{m+3}{m+1} = \sum_{m\geq 0} f(m+2)$$

per
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \log \frac{x+1}{x-1}$$
che per $x \geq 2$ è positiva e decrescente. L'integrale
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \log \frac{x+1}{x-1}\, dx$$
converge perché[23]
$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-1/2} \log \frac{x+1}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^{\alpha+1/2}}{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)(x+1)(x-1)}$$
e quest'ultimo limite esiste finito e non nullo se $\frac{1}{2}+\alpha = 2$, cioè se $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. Dunque l'integrale generalizzato converge, perciò anche la serie data converge.

(iv) La serie
$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \log^\alpha n}$$
converge per $\alpha > 1$ e diverge per $0 < \alpha < 1$. Infatti per $m = n-2$ si ha
$$\sum_{m\geq 0} \frac{1}{(m+2)\log^\alpha(m+2)} = \sum_{m\geq 0} f(m+2)$$
per
$$f(x) = \frac{1}{x \log^\alpha x}$$
che è positiva e decrescente per $x \geq 2$. Ora
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log^\alpha x} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \log^\alpha x} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{1}{x} \log^{-\alpha} x\, dx =$$
$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \log^{1-\alpha} x \Big|_2^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \left(\log^{1-\alpha} b - \log^{1-\alpha} 2\right) \;;$$
tale integrale converge se $1-\alpha < 0$, i.e. per $\alpha > 1$, e diverge per $1-\alpha > 0$, i.e. per $0 < \alpha < 1$. La serie dunque converge per $\alpha > 1$ e diverge per $0 < \alpha < 1$.

[23] usando il teorema di de l'Hôpital.

IX - Equazioni differenziali

In questo capitolo si studiano alcune equazioni differenziali del primo ordine e precisamente le equazioni differenziali a variabili separabili, le equazioni differenziali lineari e lineari affini. Si studiano anche le equazioni differenziali di Bernoulli, di Riccati, di Clairaut, di D'Alembert-Lagrange e di Manfredi. Infine si determinano le soluzioni di un'equazione differenziale scritta in forma implicita come quoziente di due funzioni lineari affini nella variabile x e nella funzione incognita $y(x)$ (cfr. § 45).

40. Equazioni differenziali ordinarie

• Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$. Il problema di determinare le primitive di f consiste nella ricerca di funzioni $y : A \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(A)$ tali che

$$y'(x) = f(x) \quad , \quad x \in A \tag{40.1}$$

ovvero

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad , \quad x \in A$$

da cui, fissato un punto $x_0 \in A$, integrando sull'intervallo $[x_0, x] \subseteq A$, si ha

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

i.e.

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y(x_0)\ .$$

L'equazione (40.1) è detta *equazione differenziale ordinaria del I ordine*. Al variare del punto iniziale x_0 si ottengono le soluzioni $y(x)$ di tale equazione differenziale che differiscono tra loro per una costante. I grafici delle soluzioni sono detti *curve integrali* dell'equazione differenziale (40.1). Fissati i valori $x = x_0$ e $y = y_0$ si dimostra che esiste un'unica soluzione $y(x)$ della (40.1) tale che $y(x_0) = y_0$.

Esempio 40.1. Risolviamo l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$$

per $x \in (-1, 1)$. In tal caso è

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{2}{t^2 - 1}\,dt + y(x_0) = \log\frac{1 - x}{1 + x} + C \quad , \quad C = y(x_0) - \log\frac{1 - x_0}{1 + x_0}\ .$$

41. Equazioni differenziali a variabili separabili

• Si chiama *equazione differenziale ordinaria a variabili separabili* (o *separate*) l'equazione differenziale[24]

$$y'(x) = a(x)b(y(x)) \tag{41.1}$$

[24] Più brevemente $y' = a(x)\,b(y)$.

dove $a : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a(x)$, è una funzione continua in un intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$, $b : B \to \mathbb{R}$, $t \mapsto b(t)$, è una funzione continua in un intervallo B. In tal caso se l'equazione numerica $b(t) = 0$ ha una soluzione $t_0 \in B$, allora la funzione costante $y(x) = t_0$, per $x \in A$, è soluzione dell'equazione differenziale (41.1). Si supponga che $b(t)$ non sia identicamente nulla su un sottointervallo $B_1 \subseteq B$ e che esista una soluzione $y : A \to B_1$ della (41.1). Se esiste una primitiva $F : B_1 \to \mathbb{R}$ della funzione $1/b(t)$ allora, considerata la funzione $G : A \to \mathbb{R}$, $G = F \circ y$, si ha

$$G(x) - G(x_0) = \int_{x_0}^{x} G'(s)\, ds$$

ovvero

$$F\big(y(x)\big) - F\big(y(x_0)\big) = \int_{x_0}^{x} \frac{d}{ds} F(y(s))\, ds$$

dove

$$\frac{d}{ds} F(y(s)) = F'\big(y(s)\big) y'(s) = \frac{y'(s)}{b\big(y(s)\big)} = a(s)$$

da cui

$$F\big(y(x)\big) - F\big(y(x_0)\big) = \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds$$

che permette di trovare, sebbene alcune volte in forma implicita, la funzione $y(x)$.

42. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

• Si chiama *equazione differenziale lineare omogenea del I ordine* l'equazione differenziale[25]

(42.1) $$y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

dove $a : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua sull'intervallo A. Questa è riconducibile all'equazione a variabili separabili

$$y' = -a(x)y$$

(dove $b(t) = -t$, per cui $\dfrac{1}{b(t)} = -\dfrac{1}{t}$) e poiché $F(t) = -\log|t|$ è una primitiva di $-\dfrac{1}{t}$, si ha

$$\log\left|\frac{y(x_0)}{y(x)}\right| = -\log|y(x)| + \log|y(x_0)| = \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds\ .$$

Si assumano $y(x)$ e $y(x_0)$ concordi, allora passando all'esponenziale si ha

(42.2) $$y(x) = y(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\, ds}\ .$$

• Si chiama *equazione differenziale lineare affine del I ordine* l'equazione differenziale

(42.3) $$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

dove $a(x), b(x)$ sono funzioni continue sul medesimo intervallo A. Se $b(x) = 0$ si ha un'equazione differenziale lineare omogenea del I ordine, se invece $a(x) = 0$ si ha un'equazione differenziale ordinaria.

[25]Brevemente si scrive $y' + a(x)y = 0$, così come, più sotto, la (42.3) si scrive $y' + a(x)y = b(x)$.

Moltiplicando entrambi i membri della (42.3) per $e^{\int_{x_0}^x a(s)\,ds}$ si ha

$$\frac{d}{dx}\left[y(x)\,e^{\int_{x_0}^x a(s)\,ds}\right] = b(x)\,e^{\int_{x_0}^x a(s)\,ds}$$

e ponendo

$$z(x) = y(x)\,e^{\int_{x_0}^x a(s)\,ds} \quad , \quad c(x) = b(x)\,e^{\int_{x_0}^x a(s)\,ds} \; ,$$

si ottiene l'equazione differenziale ordinaria $z'(x) = c(x)$ che ha la soluzione

$$z(x) = z(x_0) + \int_{x_0}^x c(t)\,dt$$

da cui

$$y(x) = y(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^x a(s)\,ds} + \int_{x_0}^x b(t)\,e^{\int_x^t a(s)\,ds}\,dt \; . \tag{42.4}$$

Si osservi che la soluzione $y(x)$ è ottenuta come somma della generica soluzione dell'equazione differenziale lineare $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ e una soluzione particolare di $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$; inoltre ogni soluzione dell'equazione differenziale affine è definita su tutto A.

Esempio 42.1. Risolviamo l'equazioni differenziali

$$[1] \quad y' - \frac{1}{1-x}\,y - x = 0 \quad , \quad x \in (-1,1) \; .$$

$$[2] \quad y' - (\tan x)y = \sin x\ \cos^2 x \quad , \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \; .$$

Nella [1] è

$$a(x) = -\frac{1}{1-x} \quad , \quad b(x) = x \; ,$$

ed essendo la funzione $x-1$ negativa nell'intervallo $(-1,1)$, per $x, x_0 \in (-1,1)$ si ha

$$\int_{x_0}^x a(s)\,ds = \int_{x_0}^x \frac{1}{s-1}\,ds = \log\left|\frac{x-1}{x_0-1}\right| = \log\frac{1-x}{1-x_0} \; ,$$

$$\int_{x_0}^x b(t)\,e^{\int_x^t a(s)\,ds}dt = \int_{x_0}^x t\left(\frac{1-t}{1-x}\right)\,dt =$$

$$= \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\,x_0^2 - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{3}\,x_0^3\right)$$

da cui, tenuto conto della (42.4), la soluzione dell'equazione differenziale proposta è

$$y(x) = y(x_0)\,\frac{1-x_0}{1-x} + \frac{1}{1-x}\left(-\frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x_0^3 - \frac{1}{2}\,x^2\right)$$

ovvero si ha la famiglia di soluzioni

$$y(x) = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 + C\right) \quad , \quad C \in \mathbb{R} \; .$$

Nella [2] è

$$a(x) = -\tan x \qquad b(x) = \sin x \cos^2 x$$

e usando ancora la (42.4) (la funzione $f(x) = \cos x$ è positiva nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) si ottiene

$$\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds = \log \frac{\cos x}{\cos x_0} \ ,$$

$$\int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{\int_x^t a(s)\,ds}\,dt = \frac{1}{\cos x} \int_{x_0}^{x} \sin t\, \cos^3 t\, dt = \frac{\cos^4 x_0}{4 \cos x} - \frac{1}{4} \cos^3 x \ .$$

Pertanto

$$y(x) = y(x_0)\, \frac{\cos x_0}{\cos x} + \frac{\cos^4 x_0}{4 \cos x} - \frac{1}{4}\, \cos^3 x$$

ovvero

$$y(x) = \frac{C}{\cos x} - \frac{1}{4}\, \cos^3 x \quad , \quad C \in \mathbb{R} \ .$$

43. L'equazione differenziale di Bernoulli

• Si chiama *equazione differenziale di Bernoulli* un'equazione differenziale del tipo[26]

(43.1) $$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^n(x) \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \ ,$$

dove $a, b : A \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue nello stesso intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$. Se $n = 0$ si ha un'equazione differenziale lineare affine del I ordine, se $n = 1$ si ha un'equazione differenziale lineare omogenea del I ordine. Osserviamo anche che, per $n \geq 1$, $y(x) = 0$ è una soluzione. Sia $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0, 1$: supponendo che sia $y(x) \neq 0$, per ogni $x \in A$, moltiplicando la (43.1) per $(1-n)y^{-n}(x)$, si ha

$$(1-n)y^{-n}(x)\, y'(x) + (1-n)\, a(x)\, y^{1-n}(x) = (1-n)\, b(x)$$

cioè

$$\frac{d}{dx}\big(y^{1-n}(x)\big) + (1-n)\, a(x)\, y^{1-n}(x) = (1-n)\, b(x) \ .$$

Posto $z(x) = y^{1-n}(x)$, si ottiene allora un'equazione differenziale affine del I ordine la cui soluzione è

$$z(x) = z(x_0)\, e^{(n-1)\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds} + (1-n) \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{(1-n)\int_x^t a(s)\,ds}\, dt$$

da cui

(43.2) $$y(x) = \Big[y^{1-n}(x_0)\, e^{(n-1)\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds +} \\ + (1-n) \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{(1-n)\int_x^t a(s)\,ds}\, dt\Big]^{1/(1-n)} \ .$$

Questa soluzione non è necessariamente definita su tutto A: ad esempio per l'equazione differenziale $y'(x) = y^2(x)$ si hanno le soluzioni

$$y(x) = \left[\frac{1}{y(x_0)} - (x - x_0)\right]^{-1} = \frac{y(x_0)}{1 - y(x_0)(x - x_0)}$$

[26] Brevemente si scrive $y' + a(x)y = b(x)y^n$.

le quali sono definite per $x \neq x_0 + \dfrac{1}{y(x_0)}$, mentre $a(x) = 0$ e $b(x) = 1$ sono definite su $\mathbb{R}$.

44. L'equazione differenziale di Riccati

• Un'*equazione differenziale di Riccati* è un'equazione differenziale del tipo[27]

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^2(x) + c(x) \ , \tag{44.1}$$

per $a, b, c : A \to \mathbb{R}$ funzioni continue sullo stesso intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$. Se $c(x) = 0$ essa si riduce ad un'equazione di Bernoulli con $n = 2$. Sia $\widehat{y}(x)$ una soluzione particolare della (44.1), posto $z(x) = y(x) - \widehat{y}(x)$, sostituendo nella (44.1) il valore $y(x) = z(x) + \widehat{y}(x)$, si ottiene:

$$z'(x) + \widehat{y}'(x) + a(x)(z(x) + \widehat{y}(x)) = b(x)(z(x) + \widehat{y}(x))^2 + c(x)$$

da cui

$$z'(x) + (a(x) - 2b(x)\widehat{y}(x))z(x) = b(x)z^2(x) \tag{44.2}$$

che è un'equazione differenziale di Bernoulli con $n = 2$.

Esempio 44.1. Troviamo le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' + x^2y^2 - 2x^2(x+1)y + x^4 + 2x^3 + x^2 - 1 = 0 \ .$$

Questa è un'equazione differenziale di Riccati (44.1) con

$$a(x) = -2x^2(x+1) \quad , \quad b(x) = -x^2 \quad , \quad c(x) = -x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$$

e queste funzioni sono continue in $\mathbb{R}$; si verifica facilmente che $\widehat{y}(x) = x+1$ è una soluzione, dunque la (44.2) dà

$$z'(x) + [-2x^2(x+1) + 2x^2(x+1)]z = -x^2z^2$$

cioè si risolve l'equazione di Bernoulli $z'(x) = -x^2z^2(x)$ che ha la famiglia di soluzioni $z(x) = \dfrac{3}{x^3 + C}$, da cui

$$y(x) = x + 1 + \frac{3}{x^3 + C} \ .$$

45. Equazioni differenziali del tipo $y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$

• Si consideri un'equazione differenziale del tipo[28]

$$y'(x) = f\left(\frac{ax + by(x) + c}{a_1x + b_1y(x) + c_1}\right) \tag{45.1}$$

con $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ e $a_1x + b_1y(x) + c_1 \neq 0$.

Caso 1: Se

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix} \neq 0$$

si prenda

[27] Brevemente $y' + a(x)y = b(x)y^2 + c(x)$.

[28] Brevemente $y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$.

$$(45.2) \qquad \begin{cases} X = ax + by(x) + c \\ Y(X) = a_1 x + b_1 y(x) + c_1 \end{cases}$$

ed avremo che

$$\begin{cases} x = AX + BY(X) + C \\ y(x) = A_1 X + B_1 Y(X) + C_1 \end{cases}$$

dove $y(x) = y(x(X)) = y(X)$. Quindi

$$(45.3) \qquad \begin{cases} x = AX + BY(X) + C \\ y(X) = A_1 X + B_1 Y(X) + C_1 \, . \end{cases}$$

Derivando $y(X) = y\big(x(X)\big)$ rispetto a X, si ha

$$(45.4) \qquad \frac{dy}{dX}(X) = y'\big(x(X)\big)\,\frac{dx}{dX}(X)$$

e, indicata con $Y'(X)$ la derivata di Y rispetto a X, la (45.3) dà

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dX}(X) = A + BY'(X) \\[2ex] \dfrac{dy}{dX}(X) = A_1 + B_1 Y'(X) \, . \end{cases}$$

Sostituendo nella (45.4) si ottiene

$$A_1 + B_1 Y'(X) = y'\big(x(X)\big)\,(A + BY'(X))$$

da cui

$$y'\big(x(X)\big) = \frac{A_1 + B_1 Y'(X)}{A + BY'(X)} \, .$$

D'altra parte nella (45.1) è $y'(x) = y'\big(x(X)\big)$ e, tenuto conto della (45.2), l'equazione differenziale (45.1) si riscrive

$$y'(x(X)) = f\left(\frac{X}{Y(X)}\right) \, .$$

Pertanto ci si riconduce a risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{A_1 + B_1 Y'(X)}{A + BY'(X)} = f\left(\frac{X}{Y(X)}\right)$$

la quale, ad esempio per $T(X) = \dfrac{Y(X)}{X}$, fornisce un'equazione differenziale a variabili separabili nella funzione incognita $T(X)$. Una volta determinata $T(X)$, il sistema (45.2) permette di avere la soluzione dell'equazione differenziale (45.1).

Caso 2: Se

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix} = 0$$

allora $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$; si ponga $t(x) = ax + by(x)$ ottenendo $y(x) = \dfrac{t(x) - ax}{b}$ da cui $y'(x) = \dfrac{t'(x) - a}{b}$ e l'equazione differenziale diventa

$$\frac{t'(x) - a}{b} = f\left(\frac{t(x) + c}{\lambda t(x) + c_1}\right)$$

generalmente riconducibile ad un'equazione differenziale lineare affine in $t(x)$.

Esercizio 45.1. Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

$$[\mathbf{1}] \quad y' = \frac{-x + y - 1}{x + y - 1} \qquad \text{con } x + y - 1 \neq 0$$

$$[\mathbf{2}] \quad y' = \left(\frac{x - y + 1}{2x - 2y + 1}\right)^2 \qquad \text{con } 2x - 2y + 1 \neq 0 \ .$$

$$[\mathbf{3}] \quad (3x - 2y + 1)\, dx + (2x + 5y + 7)\, dy = 0 \ .$$

$$[\mathbf{4}] \quad y' = \frac{4x + 2y - 1}{2x + y - 1} \ .$$

46. L'equazione differenziale di Clairaut

• Si chiama *equazione differenziale di Clairaut* un'equazione differenziale del tipo[29]

$$y(x) = x\, y'(x) + g\big(y'(x)\big)$$

con g funzione non costante di classe $C^1(B)$, per qualche intervallo $B \subseteq \mathbb{R}$. Cercando soluzioni $y \in C^2(A)$, per A intervallo di $\mathbb{R}$, e derivando rispetto a x si ha

$$x\, y''(x) + g'\big(y'(x)\big)\, y''(x) = 0$$

da cui $y''(x)\, \big[x + g'\big(y'(x)\big)\big] = 0$. Se $y''(x) = 0$ allora $y' = a$, per $a \in \mathbb{R}$. Sostituendo nell'equazione differenziale, la famiglia di rette $y(x) = ax + g(a)$ è soluzione.
Se invece è $x + g'\big(y'(x)\big) = 0$, allora posto $y'(x) = t$, si ha l'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = -g'(t) \\ y = -tg'(t) + g(t) \end{cases}$$

(dove la seconda equazione segue dall'equazione differenziale iniziale).

Esempio 46.1. Risolviamo le seguenti equazioni differenziali:

$$[\mathbf{1}] \quad y = x\, y' + \frac{1}{y'} \ .$$

$$[\mathbf{2}] \quad y = 2x\, y' + 2y^2 y'^3 \ .$$

$$[\mathbf{3}] \quad y^2 - 2x\, y\, y' + x^2 y'^2 - 4\, y'^4 = 0 \ .$$

$$[\mathbf{4}] \quad y = x\, y' + \frac{1}{y'^2} \ .$$

[29]Brevemente $y = x\, y' + g(y')$.

Per la [1] derivando rispetto a x si ottiene l'equazione

$$y''\left(x - \frac{1}{y'^2}\right) = 0 \, .$$

Le soluzioni sono la famiglia di rette $y(x) = ax + 1/a$, per $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, e la curva parametrizzata da ($t = y'$)

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^2} \\ y = \dfrac{2}{t} \end{cases}$$

ovvero la parabola $x = \dfrac{y^2}{4}$.

Per la [2] moltiplicando per $y(x) \neq 0$ si ottiene $y^2 = 2x\,y\,y' + 2y^3y'^3$ e posto $z = y^2$ l'equazione data diventa

$$z = x\,z' + \frac{1}{4}z'^3 \, .$$

Si procede quindi nel modo descritto sopra ottenendo un'equazione parametrica.

Per la [3] risolvendo l'equazione rispetto a y si ha

$$y = x\,y' \pm 2\,y'^2$$

le quali sono due equazioni differenziali di Clairaut.

Per la [4] derivando si ottiene l'equazione

$$y''\left(x - \frac{2}{y'^3}\right) = 0 \, .$$

Perciò oltre alle rette $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, si ha la curva parametrizzata da

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{t^3} \\ y = \dfrac{3}{t^2} \end{cases}$$

cioè si ha la curva (cubica del piano) di equazione cartesiana $27x^2 - 4y^3 = 0$.

47. L'equazione differenziale di D'Alembert-Lagrange

• Si chiama *equazione differenziale di D'Alembert-Lagrange* un'equazione differenziale della forma[30]

$$y(x) = x f\big(y'(x)\big) + g\big(y'(x)\big)$$

con f, g funzioni non contemporaneamente costanti di classe $C^1(B)$ per B intervallo in $\mathbb{R}$. Cercando soluzioni $y \in C^2(A)$ in un intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$, derivando rispetto a x si ottiene

$$y'(x) = f\big(y'(x)\big) + x\,f'\big(y'(x)\big)y''(x) + g'\big(y'(x)\big)y''(x) \, .$$

Posto $t(x) = y'(x)$ (dunque $y(x) = xf(t(x)) + g(t(x))$) si ha

$$t(x) = f\big(t(x)\big) + x\,f'\big(t(x)\big)t'(x) + g'\big(t(x)\big)t'(x)$$

[30] Brevemente $y = x\,f(y') + g(y')$.

ovvero
$$t(x) - f\big(t(x)\big) = t'(x)\left[x\, f'\big(t(x)\big) + g'\big(t(x)\big)\right] \ .$$
Se $t'(x) = 0$ allora $y''(x) = 0$ da cui $y(x) = ax+b$, cioè f, g sarebbero contemporaneamente costanti. Quindi $t'(x) \neq 0$.
Se $t(x) - f\big(t(x)\big) = 0$ i.e. $f\big(t(x)\big) = t(x)$ (e quindi anche $x\, f'\big(t(x)\big) + g'\big(t(x)\big) = 0$) allora si avrebbe l'equazione differenziale di Clairaut $y(x) = x\, y'(x) + g\big(y'(x)\big)$. Perciò determineremo le soluzioni per $t(x) - f\big(t(x)\big) \neq 0$, di conseguenza anche $x\, f'\big(t(x)\big) + g'\big(t(x)\big) \neq 0$. Si ha
$$t'(x) = \frac{t(x) - f\big(t(x)\big)}{x f'\big(t(x)\big) + g'\big(t(x)\big)} \ .$$
Si assuma che la funzione $t(x)$ sia invertibile in A per cui $x = x(t)$ e $x\big(t(x)\big) = x$ da cui $x'\big(t(x)\big)t'(x) = 1$, perciò
$$x'\big(t(x)\big) = \frac{1}{t'(x)} \ ,$$
ottenendo così
$$x'(t) = \frac{x f'(t) + g'(t)}{t - f(t)}$$
ovvero l'equazione differenziale affine del primo ordine
$$x'(t) + \frac{f'(t)}{f(t) - t}\, x(t) = \frac{g'(t)}{t - f(t)}$$
che permetterà di determinare x in funzione del parametro t e dunque, tenuto conto dell'equazione differenziale iniziale, si ha la soluzione parametrica
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = x(t) f(t) + g(t) \ . \end{cases}$$

Esercizio 47.1. Risolvere le equazioni differenziali
$$[\mathbf{1}] \quad y = x\, {y'}^2 + {y'}^3 \ .$$
$$[\mathbf{2}] \quad y = -x\, y' + y' - 2 \ .$$

48. L'equazione differenziale di Manfredi

• Si chiama *equazione differenziale di Manfredi* un'equazione differenziale del tipo[31]
$$y'(x) = \varphi\big(x, y(x)\big)$$
dove $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione di due variabili reali, continua e omogenea[32] di grado 0, cioè per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ è $\varphi(\lambda x, \lambda y) = \varphi(x, y)$. In particolare per $x \neq 0$, $\varphi\big(x, y(x)\big) = \varphi\big(x \cdot 1, x \cdot \frac{y(x)}{x}\big) = \varphi\big(1, \frac{y(x)}{x}\big)$ per cui l'equazione differenziale di

[31] Brevemente $y' = \varphi(x, y)$.

[32] Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *omogenea di grado* α, per $\alpha \geq 0$, se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che
$$f(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, \cdots, x_n) \ .$$

Manfredi è riconducibile alla forma

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

dove $f : B \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Posto $t(x) = \dfrac{y(x)}{x}$, derivando la funzione $y(x) = x\,t(x)$, si ottiene

$$y'(x) = t(x) + x\,t'(x)$$

da cui

$$t(x) + x\,t'(x) = f\big(t(x)\big)$$

ovvero l'equazione differenziale a variabili separabili

$$t'(x) = \frac{1}{x}\left[f\big(t(x)\big) - t(x)\right] \ .$$

Esempio 48.1. Risolviamo l'equazione differenziale

$$2x\,y\,y' - x^2 - y^2 = 0 \ .$$

Poiché $x, y \neq 0$, riscriviamo l'equazione differenziale come

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2\,x\,y}$$

cioè

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

e posto $t = \dfrac{y}{x}$, è $y = xt$ da cui $y' = t + xt'$, avendo

$$t + xt' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + t\right) \quad \Longleftrightarrow \quad t' = \frac{1}{x}\left(\frac{1 - t^2}{2t}\right)$$

equazione differenziale a variabili separabili che integrata dà

$$\log\frac{|1 - t_0^2|}{|1 - t^2|} = \log\left|\frac{x}{x_0}\right|$$

ovvero

$$\frac{|1 - t_0^2|}{|1 - t^2|} = \left|\frac{x}{x_0}\right|$$

da cui si ricava

$$y^2(x) = x(x \pm C) \quad , \quad C = \frac{x_0^2 - y(x_0)^2}{x_0} \ .$$

49. Equazioni differenziali lineari di ordine $n \geq 2$ a coefficienti costanti

Siano $a_j : A \to \mathbb{R}$, $0 \leq j \leq n-1$, e $b : A \to \mathbb{R}$ funzioni continue in un insieme connesso $A \subseteq \mathbb{R}$. L'equazione

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \ , \tag{49.1}$$

dove $y : A \to \mathbb{R}$ è la funzione incognita di classe $C^n(A)$, si chiama *equazione differenziale lineare di ordine* n. L'equazione (49.1) la scriveremo anche come

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

o equivalentemente

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y^{(k)} = b(x) \ .$$

L'applicazione $L : C^n(A) \to C^0(A)$ tra gli spazi vettoriali $C^n(A)$ e $C^0(A)$ definita da

$$Ly = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y^{(k)}$$

è lineare: infatti se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $y, z \in C^n(A)$ allora

$$L(\lambda y + \mu z) = (\lambda y + \mu z)^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)(\lambda y + \mu z)^{(k)} =$$

$$= \lambda y^{(n)} + \mu z^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\left(\lambda y^{(k)} + \mu z^{(k)}\right) =$$

$$= \lambda y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda a_k(x)y^{(k)} + \mu z^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} \mu a_k(x)z^{(k)} =$$

$$\lambda y^{(n)} + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y^{(k)} + \mu z^{(n)} + \mu \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x)z^{(k)} = \lambda Ly + \mu Lz \ .$$

L'equazione differenziale (49.1) si riscrive dunque

$$Ly = b(x) \ .$$

Siano $y_0, y_1 \in C^n(A)$ due soluzioni della (49.1), allora $L(y_1 - y_0) = Ly_1 - Ly_0 = 0$ e dunque $u = y_1 - y_0 \in \operatorname{Ker} L$ ovvero $y_1 = y_0 + u$ per $u \in \operatorname{Ker} L$. Viceversa se $y_0 \in C^n(A)$ è una soluzione dell'equazione differenziale (49.1) e $u \in \operatorname{Ker} L$ allora la funzione $y = y_0 + u \in C^n(A)$ risolve (49.1): infatti $Ly = L(y_0 + u) = Ly_0 + Lu = Ly_0 = b(x)$. Pertanto se con $\mathcal{S} \subset C^n(A)$ indichiamo lo spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale (49.1) e $y_0 \in C^n(A)$ è una soluzione particolare di (49.1), allora

$$\mathcal{S} = y_0 + \operatorname{Ker} L := \{y \in C^n(A) : y = y_0 + u,\ Ly_0 = b(x),\ u \in \operatorname{Ker} L\} \ .$$

L'equazione differenziale

$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0 \tag{49.2}$$

o equivalentemente

$$u^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)u^{(k)} = 0$$

si chiama l'*equazione differenziale omogenea associata all'equazione differenziale* (49.1). Essa si riscrive come

$$Lu = 0$$

per cui lo spazio delle soluzioni di (49.2) è, in modo ovvio, $\operatorname{Ker} L$.

Proposizione 49.1. *Il sottospazio vettoriale* $\operatorname{Ker} L \subset C^{(n)}(A)$ *ha dimensione* n.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in A$ un punto assegnato e si considerino gli n sistemi di equazioni di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u(x_0) = 1 \\ u'(x_0) = 0 \\ u''(x_0) = 0 \\ u^{(3)}(x_0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Lu = 0 \\ u(x_0) = 0 \\ u'(x_0) = 1 \\ u''(x_0) = 0 \\ u^{(3)}(x_0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Lu = 0 \\ u(x_0) = 0 \\ u'(x_0) = 0 \\ u''(x_0) = 1 \\ u^{(3)}(x_0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad \cdots \begin{cases} Lu = 0 \\ u(x_0) = 0 \\ u'(x_0) = 0 \\ u''(x_0) = 0 \\ u^{(3)}(x_0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases}$$

di cui si dimostra che la rispettiva soluzione $u_1, \cdots, u_n$ è unica. Inoltre tali funzioni sono elementi di $\operatorname{Ker} L$ linearmente indipendenti. Infatti sia

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0 \tag{49.3}$$

una loro combinazione lineare nulla. Allora nel punto x_0 si ha

$$0 = (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n)(x_0) = \lambda_1 u_1(x_0) + \cdots + \lambda_n u_n(x_0) = \lambda_1$$

che sostituito nella (49.3) derivata e calcolata in x_0 dà

$$0 = \lambda_2 u_2'(x_0) + \cdots + \lambda_n u_n'(x_0) = \lambda_2 \ .$$

Così continuando dopo n passi si ottiene $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
$u_1, \cdots, u_n$ sono anche dei generatori di $\operatorname{Ker} L$: infatti per $u \in \operatorname{Ker} L$, sia $\lambda_k = u^{(k-1)}(x_0)$, per $1 \le k \le n$. Le funzioni $u_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$ e u risolvono il sistema

$$\begin{cases} Lv = 0 \\ v(x_0) = \lambda_1 \\ v'(x_0) = \lambda_2 \\ \vdots \\ v^{n-1}(x_0) = \lambda_n \end{cases}$$

e poiché la soluzione è unica, necessariamente $u = u_0$ ovvero $u = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k u_k$.

Questo prova che

$$\operatorname{Ker} L = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{u_1, \cdots, u_n\} \quad \text{e} \quad \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} L = n \ .$$

$\square$

• Assumiamo da ora in avanti che i coefficienti a_j, $0 \le j \le n-1$, dell'equazione differenziale (49.1) siano costanti (reali) e consideriamo il polinomio di grado n

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

detto *polinomio caratteristico* associato all'equazione differenziale lineare omogenea (49.2) (o all'equazione differenziale lineare (49.1)). Ad esso corrisponde l'*operatore differenziale* $P_D : C^n(A) \to C^0(A)$,

$$P_D = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0\, I$$

dove D denota la derivazione rispetto a x e $I : C^n(A) \to C^0(A)$ è l'operatore identità (i.e. $Iy = y$).
Allora le equazioni differenziali (49.1) e (49.2) sono rispettivamente

$$P_D y = b \quad \text{e} \quad P_D u = 0 \; .$$

Notare che P_D è un'applicazione lineare e $\operatorname{Ker} P_D = \operatorname{Ker} L$, dunque $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} P_D = n$; inoltre

$$\mathcal{S} = y_0 + \operatorname{Ker} P_D \; ,$$

$y_0 \in C^n(A)$ soluzione particolare della (49.1).

• Supponiamo che $p(\lambda)$ abbia n radici reali e distinte $\lambda_1, \cdots \lambda_n$. Allora

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n) \tag{49.4}$$

e di conseguenza avremo anche

$$P_D u = (D - \lambda_1\, I)\cdots(D - \lambda_n\, I)\, u \tag{49.5}$$

dove $(D - \lambda_j\, I)u = Du - \lambda_j\, Iu = u' - \lambda_j u$. Poiché la decomposizione (49.4) non dipende dall'ordine dei $\lambda - \lambda_j$, anche la decomposizione (49.5) non dipende dall'ordine dei $D - \lambda_j\, I$ e dunque, se ad esempio $j < k$, si scrive anche

$$P_D u = (D - \lambda_1\, I)\cdots(D - \lambda_k\, I)\cdots(D - \lambda_j\, I)\cdots(D - \lambda_n\, I)u \; .$$

È allora ovvia la seguente

Osservazione 49.1. Se per qualche j, $1 \le j \le n$, è $(D - \lambda_j\, I)u = 0$ allora $P_D u = 0$.
Infatti

$$P_D u = (D - \lambda_1\, I)\cdots(D - \lambda_n\, I)u =$$
$$= (D - \lambda_1\, I)\cdots(D - \lambda_{j-1}\, I)(D - \lambda_{j+1}\, I)\cdots(D - \lambda_n\, I)(D - \lambda_j\, I)u = 0 \; .$$

In particolare posto $u_j(x) = e^{\lambda_j x}$, per $1 \le j \le n$, poiché

$$(D - \lambda_j\, I)e^{\lambda_j x} = \left(e^{\lambda_j x}\right)' - \lambda_j e^{\lambda_j x} = \lambda_j e^{\lambda_j x} - \lambda_j e^{\lambda_j x} = 0 \; ,$$

si ha $(D - \lambda_j\, I)u_j = 0$ da cui

$$P_D u_j = 0$$

per ogni $j = 1, \cdots, n$. Inoltre le funzioni u_j sono linearmente indipendenti. Infatti dapprima si osservi che

$$(D - \lambda_k\, I)e^{\lambda_j x} = \left(e^{\lambda_j x}\right)' - \lambda_k e^{\lambda_j x} = (\lambda_j - \lambda_k)e^{\lambda_j x} \quad \text{per} \;\; k \ne j$$

da cui

$$(D-\lambda_2\,I)\cdots(D-\lambda_n\,I)e^{\lambda_j x}=\begin{cases}0 & , \quad 2\le j\le n\\ \displaystyle\prod_{k=2}^{n}(\lambda_1-\lambda_k)e^{\lambda_n x} & , \quad j=1\,.\end{cases}$$

Quindi, data una combinazione lineare nulla

$$\mu_1 e^{\lambda_1 x}+\cdots+\mu_n e^{\lambda_n x}=0\,, \tag{49.6}$$

applicando l'operatore lineare $(D-\lambda_2\,I)\cdots(D-\lambda_n\,I)$, si ha

$$0=(D-\lambda_2\,I)\cdots(D-\lambda_n\,I)\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_j e^{\lambda_j x}\right)=\sum_{j=1}^{n}\mu_j(D-\lambda_2\,I)\cdots(D-\lambda_n\,I)e^{\lambda_j x}=$$

$$=\mu_1\prod_{k=2}^{n}(\lambda_1-\lambda_k)e^{\lambda_1 x}$$

da cui, essendo $\lambda_k\neq\lambda_1$ per $2\le k\le n$, si ricava $\mu_1=0$. Sostituendo questo valore nella (49.6), si applichi l'operatore differenziale $(D-\lambda_3\,I)\cdots(D-\lambda_n\,I)$ a $\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\mu_j e^{\lambda_j x}=0$. Poiché

$$(D-\lambda_3\,I)\cdots(D-\lambda_n\,I)e^{\lambda_j x}=\begin{cases}0 & , \quad 3\le j\le n\\ \displaystyle\prod_{k=3}^{n}(\lambda_2-\lambda_k)e^{\lambda_2 x} & , \quad j=2\end{cases}$$

si otterrà $\mu_2=0$. Così continuando, in n passi, si ricava $\mu_1=\cdots=\mu_n=0$.

Pertanto $\{u_1,\cdots,u_n\}$ è una base reale per $\operatorname{Ker}P_D$, i.e.

$$\operatorname{Ker}P_D=\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\left\{e^{\lambda_1 x},\cdots,e^{\lambda_n x}\right\}\,,$$

ovvero $u_1,\cdots,u_n$ generano lo spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata (49.2) permettendo così di determinare anche lo spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale (49.1) essendo

$$\mathcal{S}=y_0+\operatorname{Ker}P_D=$$

$$=\{y\in C^n(A): y(x)=y_0(x)+\sum_{j=1}^{n}c_j\,e^{\lambda_j x},\ P_D y_0(x)=b(x),\ c_j\in\mathbb{R},\ 1\le j\le n\}\,.$$

• Se invece $p(\lambda)$ ha una radice complessa semplice che, senza perdere di generalità, potremo supporre essere l'ultima λ_n, allora poiché $p(\lambda)$ ha coefficienti reali, anche $\overline{\lambda}_n$ è radice di $p(\lambda)$. Quindi il polinomio caratteristico si decompone in

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_{n-2})(\lambda-\overline{\lambda}_n)(\lambda-\lambda_n)$$

dove $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-2}$ sono le rimanenti radici reali, ossia

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_{n-2})\big(\lambda^2-2(\Re e\,\lambda_n)\lambda+|\lambda_n|^2\big)$$

con $\lambda^2-2(\Re e\,\lambda_n)\lambda+|\lambda_n|^2>0$, cosicché

$$P_D=(D-\lambda_1\,I)\cdots(D-\lambda_{n-2}\,I)Q_D$$

dove $Q_D : C^2(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ è l'operatore differenziale dato da

$$Q_D = D^2 - 2(\Re e\, \lambda_n)D + |\lambda_n|^2\, I\ .$$

Per $1 \le j \le n-2$ si ha

$$Q_D e^{\lambda_j x} = \big(D^2 - 2(\Re e\, \lambda_n)D + |\lambda_n|^2\, I\big)e^{\lambda_j x} = \big(\lambda_j^2 - 2(\Re e\, \lambda_n)\lambda_j + |\lambda_n|^2\big)e^{\lambda_j x}\ .$$

Scritto $\lambda_n = \alpha + i\,\beta$, $\beta \neq 0$, consideriamo le funzioni (reali)

$$u_{n-1}(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad , \quad u_n(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x\ .$$

Con il calcolo diretto si ottiene:

$$Q_D u_{n-1}(x) = \big(D^2 - 2(\Re e\, \lambda_n)D + |\lambda_n|^2\, I\big)u_{n-1}(x) = 0\ ,$$
$$Q_D u_n(x) = \big(D^2 - 2(\Re e\, \lambda_n)D + |\lambda_n|^2\, I\big)u_n(x) = 0\ ,$$

pertanto $P_D u_{n-1} = P_D u_n = 0$, risultando così $u_{n-1}, u_n \in \operatorname{Ker} P_D$.
Verifichiamo che le funzioni $u_j(x) = e^{\lambda_j x} \in \operatorname{Ker} P_D$, $1 \le j \le n-2$, $u_{n-1}(x)$, $u_n(x)$ sono linearmente indipendenti. Sia

$$\mu_1\, e^{\lambda_1 x} + \cdots + \mu_{n-2}\, e^{\lambda_{n-2} x} + \mu_{n-1}\, u_{n-1}(x) + \mu_n\, u_n(x) = 0\ . \tag{49.7}$$

Applicando l'operatore differenziale

$$(D - \lambda_2\, I)\cdots(D - \lambda_{n-2}\, I)Q_D$$

si ottiene

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_2)\cdots(\lambda_1 - \lambda_{n-2})\left(\lambda_1^2 - 2(\Re e\, \lambda_n)\lambda_1 + |\lambda_n|^2\right) e^{\lambda_1 x} = 0$$

da cui $\mu_1 = 0$ (essendo $\lambda_j \neq \lambda_1$ per $2 \le j \le n-2$, $\lambda_1^2 - 2(\Re e\, \lambda_n)\lambda_1 + |\lambda_n|^2 > 0$).
La (49.7) diventa:

$$\mu_2\, e^{\lambda_2 x} + \cdots + \mu_{n-2}\, e^{\lambda_{n-2} x} + \mu_{n-1} u_{n-1}(x) + \mu_n u_n(x) = 0\ .$$

Applicando l'operatore differenziale

$$(D - \lambda_3\, I)\cdots(D - \lambda_{n-2}\, I)Q_D$$

si ottiene $\mu_2 = 0$. Così continuando, in $n-2$ passi, si ottiene $\mu_1 = \cdots = \mu_{n-2} = 0$. Nella (49.7) resta allora $\mu_{n-1}u_{n-1}(x) + \mu_n u_n(x) = 0$, ovvero

$$\mu_{n-1}\, e^{\alpha x}\cos\beta x + \mu_n\, e^{\alpha x}\sin\beta x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_{n-1}\,\cos\beta x + \mu_n\,\sin\beta x = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. In particolare per $x = 0$ si ottiene $\mu_{n-1} = 0$, di conseguenza, restando $\mu_n\,\sin\beta x = 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è anche $\mu_n = 0$. Allora

$$\operatorname{Ker} P_D = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\left\{e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_{n-2}\, x},\ e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x\right\} =$$
$$= \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\left\{e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_{n-2}\, x},\ e^{(\Re e\, \lambda_n)x}\cos(\Im m\, \lambda_n)x,\ e^{(\Re e\, \lambda_n)x}\sin(\Im m\, \lambda_n)x\right\}$$

da cui segue che lo spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale (49.1) con coefficienti costanti è

$$\mathcal{S} = \Big\{y \in C^n(A) : y(x) = y_0(x) + \sum_{j=1}^{n-2} c_j\, e^{\lambda_j x} + c_{n-1}\, e^{(\Re e\, \lambda_n)x}\cos(\Im m\, \lambda_n)x +$$
$$+ c_n\, e^{(\Re e\, \lambda_n)x}\sin(\Im m\, \lambda_n)x,\ P_D y_0(x) = b(x),\ c_j \in \mathbb{R}, 1 \le j \le n\Big\}\ .$$

• Supponiamo ora che il polinomio $p(\lambda)$ abbia tutte radici reali e distinte $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, $k < n$, ma una di esse con molteplicità. Senza perdere di generalità si può supporre che sia l'ultima radice λ_k con molteplicità m, $2 \le m \le n$ e dunque $k-1+m=n$. Il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ e l'operatore differenziale P_D si decompongono in

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_{k-1})(\lambda - \lambda_k)^m \,,$$

$$P_D\, u = (D - \lambda_1\, I)\cdots(D - \lambda_{k-1}\, I)(D - \lambda_k\, I)^m u \,.$$

Osservazione 49.2. Si prova facilmente che se $(D - \lambda_k\, I)^m u = 0$ allora $P_D u = 0$.

Sia $u_j(x) = e^{\lambda_j x}$, $1 \le j \le k-1$. Allora per $1 \le i \le k$,

$$(D - \lambda_i\, I)u_j = \begin{cases} 0 & , \quad j = i \\ (\lambda_j - \lambda_i)u_j & , \quad j \ne i \end{cases} .$$

Quindi $u_j \in \operatorname{Ker} P_D$ per $1 \le j \le k-1$ e inoltre $(D - \lambda_k\, I)u_j = (\lambda_j - \lambda_k)u_j$ da cui

$$(D - \lambda_k\, I)^m u_j = (\lambda_j - \lambda_k)^m u_j \,.$$

Sia ora $u_{kh}(x) = x^h e^{\lambda_k x}$. Da $(D-\lambda_k\, I)u_{kh}(x) = hx^{h-1}e^{\lambda_k x} = hu_{k\,h-1}(x)$, per $p \in \mathbb{N}$, $p \ge 1$, si ha

$$(D - \lambda_k\, I)^p u_{kh}(x) = h(D - \lambda_k\, I)^{p-1}u_{k\,h-1}(x) = h(h-1)(D - \lambda_k\, I)^{p-2}u_{k\,h-2}(x) = \cdots$$

$$\cdots \underset{p\text{-passi}}{=} h(h-1)\cdots(h-p+1)u_{k\,h-p}(x)$$

dunque

$$(D - \lambda_k\, I)^p u_{kh}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le h \le p-1 \\ p!\, u_{k0}(x) = p!\, e^{\lambda_k x} & , \quad h = p \end{cases}$$

In particolare per $p = m$, $(D - \lambda_k\, I)^m u_{kh} = 0$ per $0 \le h \le m-1$ ovvero $u_{kh} \in \operatorname{Ker} P_D$ per $0 \le h \le m-1$.
Ne segue che u_j, u_{kh}, $1 \le j \le k-1$, $0 \le h \le m-1$, sono n funzioni (reali) appartenenti a $\operatorname{Ker} P_D$: proviamo che sono linearmente indipendenti. Infatti, considerata una combinazione lineare nulla

$$\sum_{j=1}^{k-1} \mu_j u_j(x) + \sum_{h=0}^{m-1} \mu_{kh} u_{kh}(x) = 0 \tag{49.8}$$

si applichi l'operatore differenziale $(D - \lambda_2\, I)\cdots(D - \lambda_{k-1}\, I)(D - \lambda_k\, I)^m$ ottenendo così $\mu_1(\lambda_1 - \lambda_k)^m \prod_{j=2}^{k-1}(\lambda_1 - \lambda_j)e^{\lambda_1 x} = 0$ da cui $\mu_1 = 0$; proseguendo con la stessa tecnica adottata per le combinazioni lineari (49.6) e (49.7), in $k-1$ passi si ottiene $\mu_1 = \cdots \mu_{k-1} = 0$. Nella (49.8) resta allora

$$\sum_{h=0}^{m-1} \mu_{kh} u_{kh}(x) = 0 \,.$$

Applicando di volta in volta l'operatore differenziale $(D - \lambda_k\, I)^p$ partendo da $p = m-1$ fino a $p = 1$, si ottiene $\mu_{km-1} = \mu_{km-2} = \cdots = \mu_{k1} = 0$. Infine, poiché nella (49.8) si avrà soltanto $\mu_{k0}u_{k0}(x) = \mu_{k0}e^{\lambda_k x} = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, necessariamente è $\mu_{k0} = 0$. In conclusione,

$$\operatorname{Ker} P_D = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \cdots, x^{m-1}e^{\lambda_k x} \right\}$$

e di conseguenza

$$\mathcal{S} = \Big\{ y \in C^n(A) : y(x) = y_0(x) + \sum_{j=1}^{k} c_j\, e^{\lambda_j x} + \sum_{h=1}^{m-1} c_{kh}\, x^h\, e^{\lambda_k x},$$

$$P_D\, y_0(x) = b(x),\ c_j, c_{kh} \in \mathbb{R},\ 1 \le j \le k,\ 1 \le h \le m_k - 1 \Big\} .$$

• Infine se il polinomio $p(\lambda)$ ha una radice complessa con molteplicità $m \ge 2$, supponendo che questa sia l'ultima λ_k allora, poiché anche $\overline{\lambda}_k$ è radice di $p(\lambda)$ con molteplicità m, si ha $n = 2m + k - 2$. Il polinomio caratteristico si decompone in

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_{k-2}) \big(\lambda^2 - 2(\Re e\, \lambda_k)\lambda + |\lambda_k|^2 \big)^m$$

con $\lambda^2 - 2(\Re e\, \lambda_k)\lambda + |\lambda_k|^2 > 0$, cosicché

$$P_D = (D - \lambda_1\, I) \cdots (D - \lambda_{k-2}\, I) Q_D^m$$

dove $Q_D : C^2(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ è l'operatore differenziale

$$Q_D = D^2 - 2(\Re e\, \lambda_k) D + |\lambda_k|^2\, I\ .$$

Notare che se $Q_D^m u = 0$ allora $u \in \operatorname{Ker} P_D$.
Per $1 \le j \le k-2$, le funzioni $u_j(x) = e^{\lambda_j x} \in \operatorname{Ker} P_D$ e

$$Q_D u_j(x) = \big(\lambda_j^2 - 2(\Re e\, \lambda_k)\lambda_j + |\lambda_k|^2 \big) e^{\lambda_j x}$$

da cui

$$Q_D^m u_j(x) = \big(\lambda_j^2 - 2(\Re e\, \lambda_k)\lambda_j + |\lambda_k|^2 \big)^m e^{\lambda_j x}\ .$$

Siano

$$u_{k0}(x) = e^{(\Re e\, \lambda_k)x} \cos(\Im m\, \lambda_k)x \quad , \quad v_{k0}(x) = e^{(\Re e\, \lambda_k)x} \sin(\Im m\, \lambda_k)x$$

allora, per quanto visto in precedenza, $u_{k0}, v_{k0} \in \operatorname{Ker} P_D$ in quanto

$$Q_D u_{k0} = 0 \quad , \quad Q_D v_{k0} = 0\ .$$

Inoltre u_{k0}, v_{k0} sono linearmente indipendenti. Per $h \in \mathbb{N}$, $h \ge 1$, si considerino le funzioni

$$u_{kh}(x) = x^h u_{k0}(x) = x^h e^{(\Re e\, \lambda_k)x} \cos(\Im m\, \lambda_k)x\ ,$$

$$v_{kh}(x) = x^h v_{k0}(x) = x^h e^{(\Re e\, \lambda_k)x} \sin(\Im m\, \lambda_k)x\ .$$

Dimostriamo che, per $1 \le h \le m-1$, $u_{kh}, v_{kh} \in \operatorname{Ker} P_D$.
Banalmente $u_{kh}(x) = x u_{kh-1}(x)$, $v_{kh}(x) = x v_{kh-1}(x)$, $1 \le h \le m-1$.

Per $u \in C^2(\mathbb{R})$ si ha[33]

$$D(xu) = u + xDu$$

$$D^2(xu) = xD^2u + 2Du\ .$$

Sia $R_D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ l'operatore differenziale definito da $R_D = 2D - 2(\Re e\, \lambda_k)I$; poniamo $R_D^0 := I$ e anche $Q_D^0 := I$. Poiché Q_D commuta[34] con D, per ogni $p \in \mathbb{N}$, $p \ge 1$, anche Q_D^p commuta con R_D. Dimostreremo i Lemma che seguono per mezzo del principio di induzione matematica.

---

[33] $D^2(xu) = D(u + xDu) = Du + Du + xD^2u = xD^2u + 2Du$

[34] $Q_D R_D = \big(D^2 - 2(\Re e\, \lambda_k)D + |\lambda_k|^2 I\big)\big(2D - 2(\Re e\, \lambda_k)I\big) = 2D^3 - 2(\Re e\, \lambda_k)D^2 - 4(\Re e\, \lambda_k)D^2 + +4(\Re e\, \lambda_k)^2 D + 2|\lambda_k|^2 D - 2(\Re e\, \lambda_k)|\lambda_k|^2 I = \big(2D - 2(\Re e\, \lambda_k)I\big)D^2 - 4(\Re e\, \lambda_k)\big(D - (\Re e\, \lambda_k)I\big)D + +2|\lambda_k|^2\big(D - (\Re e\, \lambda_k)I\big) = R_D D^2 - 2(\Re e\, \lambda_k)R_D D + |\lambda_k|^2 R_D I = R_D\big(D^2 - 2(\Re e\, \lambda_k)D + |\lambda_k|^2 I\big) = = R_D Q_D$.

Lemma 49.1. *Per $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ si ha*

$$Q_D^{p+1}(xu) = xQ_D^{p+1}u + (p+1)R_D Q_D^p u$$

per ogni $p \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. (1) Per $p = 0$ si ha

$$Q_D(xu) = \big(D^2 - 2(\Re e\,\lambda_k)D + |\lambda_k|^2 I\big)(xu) = D^2(xu) - 2(\Re e\,\lambda_k)D(xu) + |\lambda_k|^2 xu =$$
$$= xD^2u + 2Du - 2(\Re e\,\lambda_k)(u + xDu) + |\lambda_k|^2 xu =$$
$$= x\big(D^2u - 2(\Re e\,\lambda_k)Du + |\lambda_k|^2 u\big) + 2Du - 2(\Re e\,\lambda_k)u = xQ_D u + R_D u$$

essendo, quanto ottenuto, esattamente il secondo membro, per $p = 0$, della formula da dimostrare.
(2) Ammessa vera la formula per p, dimostriamola per $p+1$. Si ha

$$Q_D^{p+2}(xu) = Q_D\big(Q_D^{p+1}(xu)\big) = Q_D\big(xQ_D^{p+1}u + (p+1)R_D Q_D^p u\big) =$$
$$= Q_D\big(xQ_D^{p+1}u\big) + (p+1)R_D Q_D^{p+1}u \underset{(1)}{=} xQ_D^{p+2}u + R_D Q_D^{p+1}u + (p+1)R_D Q_D^{p+1}u =$$
$$= xQ_D^{p+2}u + (p+2)R_D Q_D^{p+1}u \ .$$

Quindi per il principio di induzione, la formula è vera per ogni $p \in \mathbb{N}$. □

Indichiamo con $\alpha = \Re e\,\lambda_k$ e $\beta = \Im m\,\lambda_k$.

Lemma 49.2.

$$(i) \quad R_D u_{k0} = -2\beta v_{k0} \quad , \quad R_D v_{k0} = 2\beta u_{k0} \ ,$$

e per ogni $p \in \mathbb{N}$

$$(ii) \quad R_D^{2p} u_{k0} = (-1)^p (2\beta)^{2p} u_{k0} \quad , \quad R_D^{2p} v_{k0} = (-1)^p (2\beta)^{2p} v_{k0} \ ,$$
$$(iii) \quad R_D^{2p+1} u_{k0} = (-1)^{p+1} (2\beta)^{2p+1} v_{k0} \quad , \quad R_D^{2p+1} v_{k0} = (-1)^p (2\beta)^{2p+1} u_{k0} \ .$$

Si noti che la (iii) per $p = 0$ ritrova la (i).

Dimostrazione. Per la (i) si ha:

$$R_D u_{k0}(x) = 2D\big(e^{\alpha x}\cos\beta x\big) - 2\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x =$$
$$= 2\big(\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x\big) - 2\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x = -2\beta e^{\alpha x}\sin\beta x = -2\beta v_{k0} \ .$$

Con analoghi calcoli si prova $R_D v_{k0} = 2\beta u_{k0}(x)$.

Proviamo (ii) per induzione su p. (1) Per $p = 0$, $R_D^0 u_{k0} = I u_{k0} = u_{k0}$ e il membro destro della prima delle (ii) per $p = 0$ è esattamente u_{k0}.
(2) Ammessa vera l'uguaglianza per p, i.e. $R_D^{2p} u_{k0} = (-1)^p (2\beta)^{2p} u_{k0}$, dimostriamola per $p+1$:

$$R_D^{2(p+1)} u_{k0} = R_D^{2p+2} u_{k0} = R_D^2\big(R_D^{2p} u_{k0}\big) = (-1)^p (2\beta)^{2p} R_D^2 u_{k0} \underset{(i)}{=}$$
$$= (-1)^p (2\beta)^{2p} R_D(-2\beta v_{k0}) = (-1)^{p+1} (2\beta)^{2p+1} R_D v_{k0} \underset{(i)}{=} (-1)^{p+1} (2\beta)^{2p+2} u_{k0} =$$
$$= (-1)^{p+1} (2\beta)^{2(p+1)} u_{k0} \ .$$

Pertanto dal principio di induzione, $R_D^{2p} u_{k0} = (-1)^p (2\beta)^{2p} u_{k0}$ per ogni $p \in \mathbb{N}$.
In modo analogo si prova $R_D^{2p} v_{k0} = (-1)^p (2\beta)^{2p} v_{k0}$ per ogni $p \in \mathbb{N}$.

(iii): per induzione su $p \in \mathbb{N}$, (1) $p = 0$ dà

$$R_D u_{k0} \underset{(i)}{=} -2\beta v_{k0} = (-1)(2\beta) v_{k0} \ .$$

Quindi la prima formula della (iii) è vera per $p = 0$.
(2) Ammessa vera l'uguaglianza per p, i.e. $R_D^{2p+1} u_{k0} = (-1)^{p+1}(2\beta)^{2p+1} v_{k0}$, proviamola per $p+1$, cioè che $R_D^{2p+3} u_{k0} = (-1)^{p+2}(2\beta)^{2p+3} v_{k0}$. Si ha

$$R_D^{2p+3} u_{k0} = R_D^2\big(R_D^{2p+1} u_{k0}\big) = (-1)^{p+1}(2\beta)^{2p+1} R_D^2 v_{k0} \underset{(i)}{=} (-1)^{p+1}(2\beta)^{2p+2} R_D u_{k0} \underset{(i)}{=}$$
$$= (-1)^{p+2}(2\beta)^{2p+3} v_{k0} \ .$$

Quindi ancora per il principio di induzione, la prima formula della (iii) è vera.
In modo analogo si prova la seconda formula della (iii). □

Lemma 49.3. *Per ogni* $p \in \mathbb{N}$*,*

$$(i) \quad Q_D^{p+1} u_{kp} = 0 \quad , \quad Q_D^{p+1} v_{kp} = 0 \ ,$$
$$(ii) \quad Q_D^{p} u_{kp} = p!\, R_D^p u_{k0} \quad , \quad Q_D^{p} v_{kp} = p!\, R_D^p v_{k0} \ .$$

Dimostrazione. (i): per induzione su p, (1) $p = 0$ si hanno $Q_D u_{k0}$ e $Q_D v_{k0}$ che già sappiamo essere nulle; (2) dalla veridicità della formula per p e usando il Lemma 49.1 si calcola per $p+1$:

$$Q_D^{p+2} u_{kp+1} = Q_D^{p+2}(x u_{kp}) = Q_D\big(Q_D^{p+1}(x u_{kp})\big) = Q_D\big(x Q_D^{p+1} u_{kp} + (p+1) R_D Q_D^p u_{kp}\big) =$$
$$= Q_D\big((p+1) R_D Q_D^p u_{kp}\big) = (p+1) R_D Q_D^{p+1} u_{kp} = 0 \ .$$

In modo analogo si procede per $Q_D^{p+2} v_{kp+1}$.

(ii): (1) quando $p = 0$, a primo membro si ha $Q_D^0 u_{k0} = I u_{k0} = u_{k0}$, a secondo membro si ha $0!\, R_D^0 u_{k0} = I u_{k0} = u_{k0}$; la medesima situazione vale per la funzione v_{k0}. Questo prova la veridicità della prima formula della (ii) per $p = 0$.
(2) Sia ora vera $Q_D^p u_{kp} = p!\, R_D^p u_{k0}$, allora, usando ancora il Lemma 49.1 e la parte (i), si ha

$$Q_D^{p+1} u_{kp+1} = Q_D^{p+1}(x u_{kp}) = x Q_D^{p+1} u_{kp} + (p+1) R_D Q_D^p u_{kp} =$$
$$= (p+1) p!\, R_D^{p+1} u_{k0} = (p+1)!\, R_D^{p+1} u_{k0} \ .$$

Stessi calcoli si hanno per $Q_D^{p+1} v_{kp+1}$. Dunque le formule (ii) sono provate. □

Proposizione 49.2. *Se* m *è molteplicità della radice complessa* λ_k *del polinomio caratteristico dell'equazione differenziale omogenea* (49.2) *allora*

$$Q_D^m u_{kh} = 0 \quad , \quad Q_D^m v_{kh} = 0 \quad \text{per } \ 0 \le h \le m-1 \ .$$

Dimostrazione. Dalla (i) del Lemma 49.3, per $h \ge 0$, si ha

$$Q_D^m u_{kh} = Q_D^{m-(h+1)}\big(Q_D^{h+1} u_{kh}\big) = Q_D^{m-h-1}(0) = 0$$

se $m - h - 1 \ge 0$, cioè per $0 \le h \le m-1$. Analogo risultato si ha per $Q_D^m v_{kh}$. □

Concludiamo quindi che, per $1 \le h \le m-1$, le funzioni $u_{kh}, v_{kh} \in \operatorname{Ker} P_D$. Inoltre tenuto conto del Lemma 49.2, della (ii) del Lemma 49.3 otteniamo

$$Q_D^{2p} u_{k2p} = C_{2p} u_{k0} \quad , \quad Q_D^{2p} v_{k2p} = C_{2p} v_{k0} \ .$$
$$(49.9) \qquad Q_D^{2p+1} u_{k2p+1} = -C_{2p+1} v_{k0} \quad , \quad Q_D^{2p+1} v_{k2p+1} = C_{2p-1} u_{k0}$$

dove $C_r = (-1)^{[r/2]}\, r!(2\beta)^r$, $r \in \mathbb{N}$.

Proviamo ora che le funzioni n funzioni $u_1, \cdots, u_{k-2}, u_{k0}, v_{k0}, \cdots, u_{km-1}, v_{km-1} \in \operatorname{Ker} P_D$ sono linearmente indipendenti. Consideriamo una loro combinazione lineare nulla

$$\sum_{j=1}^{k-2} \mu_j u_j + \sum_{h=0}^{m-1} \big(\mu_{1h}\, u_{kh} + \mu_{2h}\, v_{kh}\big) = 0\ .$$

Applicando l'operatore differenziale $(D-\lambda_2\, I)\cdots(D-\lambda_{k-2}\, I)Q_D^m$ si ha

$$\mu_1 \prod_{j=2}^{k-2}(\lambda_1-\lambda_j)\big(\lambda_1^2 - 2(\Re e\,\lambda_k)\lambda_1 + |\lambda_k|^2\big)^m e^{\lambda_1 x} = 0$$

da cui $\mu_1 = 0$. Della combinazione lineare nulla resta

$$\sum_{j=2}^{k-2} \mu_j u_j + \sum_{h=0}^{m-1} \big(\mu_{1h}\, u_{kh} + \mu_{2h}\, v_{kh}\big) = 0$$

e applicando a questa $(D-\lambda_3\, I)\cdots(D-\lambda_{k-2}\, I)Q_D^m$ si ottiene $\mu_2 = 0$. Così continuando, in $k-2$ passi, si ha $\mu_1 = \cdots = \mu_{k-2} = 0$. Della combinazione lineare nulla rimane

$$\sum_{h=0}^{m-1} \big(\mu_{1h}\, u_{kh} + \mu_{2h}\, v_{kh}\big) = 0\ .$$

Applichiamo Q_D^{m-1} ottenendo

$$0 = \mu_{1m-1}\, Q_D^{m-1} u_{km-1} + \mu_{2m-1}\, Q_D^{m-1} v_{km-1}\ .$$

Dalla (49.9), se $m = 2p$ allora

$$0 = C_{2p-1}\,(-\mu_{12p-1} v_{k0} + \mu_{22p-1} u_{k0}) \quad\Longleftrightarrow\quad \mu_{1m-1} v_{k0} - \mu_{2m-1} u_{k0} = 0 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\mu_{1m-1} = \mu_{2m-1} = 0\ ,$$

se $m = 2p+1$ allora

$$0 = C_{2p}\,(\mu_{12p} u_{k0} + \mu_{22p} v_{k0}) \quad\Longleftrightarrow\quad \mu_{1m-1} u_{k0} + \mu_{2m-1} v_{k0} = 0 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\mu_{1m-1} = \mu_{2m-1} = 0\ .$$

In ogni caso risulta $\mu_{1m-1} = \mu_{2m-1} = 0$. Resta allora

$$\sum_{h=0}^{m-2} \big(\mu_{1h}\, u_{kh} + \mu_{2h}\, v_{kh}\big) = 0$$

e applicando Q_D^{m-2}, procedendo come appena fatto, si ottiene $\mu_{1m-2} = \mu_{2m-2} = 0$. Così continuando in m passi avremo $\mu_{1h} = \mu_{2h} = 0$, $0 \le h \le m-1$. Ne segue quindi

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} P_D = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\Big\{ & e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_{k-2} x},\ e^{(\Re e\,\lambda_k)x}\cos(\Im m\,\lambda_k)x,\ e^{(\Re e\,\lambda_k)x}\sin(\Im m\,\lambda_k)x, \\ & x\, e^{(\Re e\,\lambda_k)x}\cos(\Im m\,\lambda_k)x,\ x\, e^{(\Re e\,\lambda_n)x}\sin(\Im m\,\lambda_k)x,\ \cdots, \\ & x^{m-1} e^{(\Re e\,\lambda_k)x}\cos(\Im m\,\lambda_k)x,\ x^{m-1} e^{(\Re e\,\lambda_k)x}\sin(\Im m\,\lambda_k)x \Big\}\end{aligned}$$

da cui lo spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale (49.1) è

$$\mathcal{S} = \Big\{ y \in C^n(A) : y(x) = y_0(x) + \sum_{j=1}^{k-2} c_j\, e^{\lambda_j x} +$$

$$+ \sum_{h=0}^{m-1} \left(c_{1h}\, x^h\, e^{(\Re e\, \lambda_k)x} \cos(\Im m\, \lambda_k)x \;+\; c_{2h}\, x^h\, e^{(\Re e\, \lambda_k)x} \sin(\Im m\, \lambda_k)x \right),$$

$$P_D y_0(x) = b(x),\ c_j, c_{1h}, c_{2h} \in \mathbb{R},\ 1 \le j \le k-2,\ 0 \le h \le m-1 \Big\} .$$

49.1. **Metodi per la determinazione di una soluzione per l'equazione differenziale** (49.1) **a coefficienti costanti.**

• Supponiamo che il dato $b(x)$ sia un polinomio di grado r e che $a_0 \neq 0$. Allora ricerchiamo una soluzione particolare $y_0(x)$ che sia un polinomio di grado r, cioè

$$y_0(x) = b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} \cdots + b_1 x + b_0$$

determinando i coefficienti b_j usando il principio di identità dei polinomi, una volta sostituito y_0 e le sue derivate in (49.1). Se invece $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$ e $a_m \neq 0$ allora ricerchiamo una soluzione particolare y_0 che sia il prodotto di x^m per un polinomio di grado r, cioè

$$y_0(x) = x^m (b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} \cdots + b_1 x + b_0)$$

e di nuovo si determinano i coefficienti b_j usando il principio di identità dei polinomi, una volta sostituito y_0 e le sue derivate in (49.1).

• Se $b(x)$ è multipla della funzione $f(x) = e^{kx}$, per $k \in \mathbb{R}$, e k non è radice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ allora ricerchiamo una soluzione particolare dello stesso tipo, cioè

$$y_0(x) = c\, e^{kx} \ ;$$

se invece k è radice di $p(\lambda)$ ed ha molteplicità $m \ge 1$ allora ricerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y_0(x) = c\, x^m e^{kx}$$

determinando c usando la (49.1).

• Se $b(x)$ è il prodotto di un polinomio di grado r e di e^{kx}, la soluzione particolare $y_0(x)$ la si cerca dello stesso tipo se k non è radice del polinomio caratteristico, mentre la si cerca del tipo

$$y_0(x) = x^m e^{kx} (b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r)$$

se k è radice del polinomio caratteristico con molteplicità m.

• Se $b(x)$ è una combinazione lineare delle funzioni $f(x) = \cos kx$ e $g(x) = \sin kx$, per $k \in \mathbb{R}$ e ik non è radice del polinomio caratteristico allora ricerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y_0(x) = c \cos kx + d \sin kx$$

determinando c e d in modo che, al solito, y_0 soddisfi la (49.1).

• In generale se $b(x)$ è una funzione qualsiasi, un metodo che è assai utile per determinare una soluzione particolare della (49.1) è quello della *variazione delle costanti.* Si determinano le n soluzioni linearmente indipendenti $u_1, \cdots, u_n$ dell'equazione differenziale omogenea (49.2) e scritta la sua generica soluzione $u(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(x)$, per $c_j \in \mathbb{R}$, si ricerca una soluzione particolare $y_0(x)$ della (49.1) della forma

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x) u_j(x)$$

dove le funzioni incognite $c_j(x)$, $1 \le j \le n$, si determinano così. Derivando successivamente si assume che

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(x) u_j^{(k-1)}(x) = 0 \tag{49.10}$$

per $1 \le k \le n-1$ in modo che

$$y_0^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x) u_j^{(k)}(x)$$

per $1 \le k \le n-1$, mentre

$$y_0^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j'(x) u_j^{(n-1)}(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x) u_j^{(n)}(x) \ .$$

Allora, tenuto conto della (49.2) per le funzioni $u_j(x)$, $1 \le j \le n$, si ha

$$y_0^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y_0^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j'(x) u_j^{(n-1)}(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x) u_j^{(n)}(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\sum_{j=1}^{n} c_j(x) u_j^{(k)}(x) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j'(x) u_j^{(n-1)}(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x) \left(u_j^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_j^{(k)}(x) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j'(x) u_j^{(n-1)}(x) \ .$$

Perciò, poiché $y_0(x)$ deve soddisfare la (49.1), si ha

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(x) u_j^{(n-1)}(x) = b(x) \ . \tag{49.11}$$

Infine il sistema di n equazioni differenziali del I ordine costituito dalle (49.10) e dalla (49.11),

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j'(x) u_j(x) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_j'(x) u_j^{(n-2)}(x) = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} c_j'(x) u_j^{(n-1)}(x) = b(x) \end{cases}$$

permette di determinare le funzioni $c_1(x), \cdots, c_n(x)$.

X - Calcolo approssimato di radici

In questo capitolo si affronta il problema della determinazione (approssimata, con approssimazione *arbitraria*) delle radici dell'equazione $f(x) = 0$ su un intervallo dove f è una funzione perloméno di classe C^1. Tuttavia non si può sperare di ottenere delle "*formule di risoluzione*" , come ad esempio nel caso delle equazioni polinomiali di primo o di secondo grado: questo è già impossibile per le equazioni polinomiali di grado ≥ 5. Neanche per il problema qui formulato (e cioè di determinare le radici in modo approssimato) vi è in realtà un metodo generale che conduca al risultato desiderato, eccetto per il caso in cui $f(x)$ sia un *polinomio*, e anche in questo caso, per i polinomi di grado ≥ 5, i metodi teorici di approssimazione delle radici potrebbero condurre a calcoli numerici di tal volume da rendere dispendioso anche il lavoro di un calcolatore elettronico. Nel presente capitolo ci si limiterà ad indicare alcuni casi particolari dei quali, sotto oppurtune ipotesi sulla $f(x)$, si dispone di mezzi (teorici e pratici) per risolvere il problema in discussione. È questo l'"ABC" di una disciplina matematica denominata *Analisi Numerica*.

50. Metodi elementari per il calcolo approssimato di radici

• Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita sull'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ di classe $C^1(I)$. Si consideri l'equazione

$$f(x) = 0 \tag{50.1}$$

di cui vogliamo determinarne le soluzioni $x \in I$. Sebbene l'intervallo I possa essere limitato, può darsi che l'equazione (50.1) abbia un'infinità di radici, ad esempio se f è identicamente nulla su qualche sottointervallo $J \subseteq I$. Comunque esistono anche esempi di funzioni come la funzione

$$f(x) = x^6 \sin \frac{1}{x} \qquad , \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

che non sono identicamente nulle in nessun intervallo ma per cui la (50.1) abbia lo stesso un'infinità di radici. Un primo passo allora sarà decomporre l'intervallo I considerandone una partizione fatta in modo che in un qualsiasi intervallo di essa si abbia o esattamente una radice della (50.1) oppure non si abbia nessuna radice. In particolare potremo raggiungere questo traguardo se la funzione f è continua nell'intervallo I (l'equazione (50.1) non ha soluzione se nell'intervallo I f non cambia di segno). Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{x - a_i} + c \quad , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$$

dove $a_1 < \cdots < a_n$ e $b_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, è definita in ciascuno degli intervalli $(-\infty, a_1)$, (a_1, a_2), $\cdots$, $(a_n, +\infty)$. Inoltre, in ciascuno di questi intervalli f è derivabile (quindi continua) e dal fatto che

$$f'(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{(x - a_i)^2} < 0$$

segue che $f \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{x_1, \cdots, x_n\})$ e anche che è monotòna decrescente. Si noti inoltre che

$$\lim_{x \to a_i} f(x) = +\infty$$

per ogni $i \in \{1, \cdots, n$. Si può concludere che per tale funzione l'equazione (50.1) ha esattamente *una* radice semplice in ciascuno degli intervalli (a_i, a_{i+1}), $1 \le i \le n-1$. Nell'intervallo $(-\infty, a_1)$ (rispettivamente nell'intervallo $(a_n, +\infty)$) l'equazione (50.1) ha una radice semplice se $c > 0$ o se $c < 0$ oppure nessuna radice se $c = 0$. Per ottenere una decomposizione dell'intervallo I nel modo su menzionato (i.e. tale da *separare le radici* dell'equazione $f(x) = 0$) sarebbe necessario, da un punto di vista teorico, studiare l'andamento della funzione f, ovvero la variazione del segno di f'. In particolare, si renderebbe necessario determinare le radici dell'equazione $f'(x) = 0$. Purtroppo, salvo per esempi semplici come quello precedente, è questo un problema difficile almeno quanto quello di risolvere $f(x) = 0$.

• Nel seguito si supporrà che $I = [a, b]$, che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$ (e quindi che $f'(x)$ abbia segno costante su I, dato che $f \in C^1(I)$) e infine che $f(a)f(b) < 0$.

50.1. **Il metodo della "regula falsi".** L'idea fondamentale per ottenere un'approssimazione della radice ξ_0 della $f(x) = 0$ in I è di rimpiazzare f con un polinomio di primo grado $P(x)$ tale che $P(a) = f(a)$ e $P(b) = f(b)$. Questo nient'altro sarà che un caso particolare dei cosidetti *polinomi di interpolazione* che il lettore avrà modo d'incontrare nel corso di *Calcolo Numerico*. L'ipotesi $P(a)P(b) < 0$ implica che l'equazione $P(x) = 0$ abbia almeno una radice $\xi \in I$ e si prenderà questa come approssimazione di ξ_0: si vuole allora trovare un metodo per controllare l'errore commesso, cioè valutare $|\xi - \xi_0|$.

Lemma 50.1. *Sia $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f \in C^2(J)$. Siano $x_0, x_1 \in J$, $x_0 \neq x_1$, e si consideri*[35]

$$P(x) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}\,(x - x_0) - \frac{f(x_0)}{x_1 - x_0}\,(x - x_1)\ .$$

Allora, per ogni $x \in J$, esiste un punto ξ (che dipende da x) nel più piccolo intervallo chiuso contenente x, x_0, x_1 tale che

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{2}\, f''(\xi)(x - x_0)(x - x_1)\ . \tag{50.2}$$

Dimostrazione. La dimostrazione risulta dal Teorema di Rolle 25.1. Infatti, sia $x \in J \setminus \{x_0, x_1\}$ e si consideri la funzione $u : J \to \mathbb{R}$ data da

$$u(t) = f(t) - P(t) - c(t - x_0)(t - x_1)\ ,$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è la costante determinata dalla condizione $u(x) = 0$. Segue che $u(x) = u(x_0) = u(x_1) = 0$. Senza perdere di generalità si può supporre che sia $x < x_0 < x_1$; allora per il teorema di Rolle applicato negli intervalli $[x, x_0]$, $[x_0, x_1]$ esistono due punti $y_1 \in (x, x_0)$ e $y_2 \in (x_0, x_1)$ tali che $u'(y_1) = 0$, $u'(y_2) = 0$. Applicando ancora il teorema di Rolle alla funzione u' nell'intervallo $[y_1, y_2]$, si ha che esiste un punto $\xi \in (y_1, y_2)$ tale che $u''(\xi) = 0$. Tuttavia $u''(t) = f''(t) - 2c$ e quindi $c = \dfrac{1}{2}\, f''(\xi)$. Si può ora sostituire l'espressione di c così ottenuta in $u(x) = 0$ per ottenere la relazione (50.2). □

[35] Si osservi che $P(x_0) = f(x_0)$ e $P(x_1) = f(x_1)$.

Proposizione 50.1 (regula falsi). *Nelle ipotesi del Lemma 50.1, se* $f'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in J$*, se* $f(\xi_0) = 0$ *e* $P(\xi) = 0$ *per qualche* $\xi_0, \xi \in J$*, allora*

$$\xi - \xi_0 = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(z')} (\xi - x_0)(\xi - x_1) \tag{50.3}$$

per qualche $z, z' \in J$*. In particolare, se* $|f'(x)| \geq m > 0$ *e* $|f''(x)| \leq M$ *per ogni* $x \in J$*, allora*

$$|\xi - \xi_0| \leq \frac{M}{2m} |\xi - \xi_0| \, |\xi - x_1| \, . \tag{50.4}$$

Dimostrazione. La proposizione risulta immediatamente dal Lemma 50.1. Infatti per tale lemma, esiste z nel più piccolo intervallo contenente x, x_0, x_1 tale che sia soddisfatta la (50.2). In particolare per $x = \xi$ si ha

$$f(\xi) = \frac{1}{2} f''(z)(\xi - x_0)(\xi - x_1)$$

dove z dipende da ξ. Inoltre, applicando il Teorema di Lagrange 25.2 alla funzione f nell'intervallo chiuso di estremi ξ_0 e ξ si ottiene

$$f(\xi) = (\xi - \xi_0) f'(z')$$

per qualche z' fra ξ_0 e ξ. Dalle due relazioni così ottenute si ha la formula desiderata. Il lettore non avrà difficoltà a dedurre la (50.4) dalla (50.3). □

• Si può dire che la relazione (50.4) *valuta* l'errore commesso (dà una maggiorazione dello stesso in termini di M, m, ξ, x_0 e x_1). Se la costante $\dfrac{M}{2m} \, |\xi - x_0| \, |\xi - x_1|$ non è sufficientemente piccola (e quindi, presumibilmente, l'errore commesso non è sufficientemente piccolo) allora si può *ripetere* il procedimento descritto. Precisamente, se ad esempio $I = [a, b]$, si calcola $f(\xi)$: a seconda del suo segno, la radice ξ_0 sta nell'intervallo $[a, \xi]$ oppure nell'intervallo $[\xi, b]$. Si ripete il procedimento descritto in quel sottointervallo contenente ξ_0 (i.e. si rimpiazza f con un polinomio di primo grado che assume agli estremi del sottointervallo i valori assunti da f) ottenendo così una nuova approssimazione ξ' di ξ_0. Applicando il metodo descritto un numero arbitrario di volte, si otterrà una successione $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ (con $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \xi'$). Infine, si può dimostrare che tale successione converge a ξ_0.

Per applicare la regula falsi è necessario conoscere a priori l'*esistenza* di una radice del problema nell'intervallo I. Sotto opportune ipotesi si possono ottenere metodi di approssimazione di una radice dell'equazione (50.1) che nello stesso tempo dimostrino anche l'esistenza della radice stessa.

50.2. **Il metodo delle approssimazioni successive.** In quel che segue si illustrerà un'idea molto importante nell'intera analisi matematica e cioè quella di *iterazione* di un processo di approssimazione (nota anche come *metodo delle approssimazioni successive*). Si può sempre scrivere la (50.1) nella forma

$$g(x) = x \tag{50.5}$$

(ponendo $g(x) = x - f(x)$). Si enuncia allora il seguente

Teorema 50.1. *Sia* $x_0 \in I$*, si supponga che esistano* $c > 0$*,* $0 < q < 1$ *tali che* $[x_0 - c, x_0 + c] \subset I$ *e*

(i) $|g'(x)| \leq q$ *per ogni* x *tale che* $|x - x_0| \leq c$,
(ii) $|g(x_0) - x_0| \leq c(1 - q)$.

Allora esiste unica una radice ξ_0 *dell'equazione* (50.5) *tale che*

$$|\xi_0 - x_0| \leq c \ .$$

Inoltre la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ *definita dalla relazione di ricorrenza*

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad , \quad n \geq 0$$

soddisfa

$$|\xi_0 - x_n| \leq c\, q^n$$

e quindi $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi_0$.

Dimostrazione. Si osservi innanzituttto che $x_n \in [x_0 - c, x_0 + c]$ per ogni $n \geq 0$. Infatti tale affermazione si può dimostrare per induzione su n. Chiaramente x_0 si trova nell'intervallo in discussione. Si supponga ora che $x_0, \cdots, x_n \in [x_0 - c, x_0 + c]$ e si consideri x_{n+1} definito da

$$x_{n+1} = g(x_n) \ .$$

Allora

$$x_{n+1} - x_n = g(x_n) - g(x_{n-1}) \ . \tag{50.6}$$

Si applichi il teorema di Lagrange alla funzione g nell'intervallo chiuso di estremi x_{n-1} e x_n; esiste dunque z fra x_{n-1} e x_n tale che

$$g(x_n) - g(x_{n-1}) = g'(z)(x_n - x_{n-1}) \ .$$

Per l'ipotesi d'induzione, il più piccolo intervallo contenente x_n e x_{n-1} è incluso in $[x_0 - c, x_0 + c]$ e quindi z stesso sta in $[x_0 - c, x_0 + c]$. Si può quindi applicare l'ipotesi (i) del Teorema 50.1 per ottenere

$$|g(x_n) - g(x_{n-1})| = |g'(z)|\, |x_n - x_{n-1}| \leq q|x_n - x_{n-1}|$$

e allora (per la (50.6))

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}|$$

e, per ricorrenza

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q^n|x_1 - x_0| = q^n|g(x_0) - x_0| \leq cq^n(1 - q)$$

tenuto conto dell'ipotesi ii). Siccome

$$x_{n+1} - x_0 = (x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_1 - x_0)$$

allora

$$|x_{n+1} - x_0| \leq c(1 - q)(1 + q + \cdots + q^n) = c(1 - q^{n+1}) \leq c \ .$$

In altre parole, anche x_{n+1} sta in $[x_0 - c, x_0 + c]$. Infine, per il principio d'induzione matematica, tutti i termini della successione $\{x_n\}_{n\geq 0}$ si trovano nell'intervallo $[x_0 - c, x_0 + c]$. La disuguaglianza

$$|x_{n+1} - x_n| \leq c\, q^n(1 - q) \tag{50.7}$$

ottenuta qui sopra, mostra che la serie $\sum_{n\geq 0}(x_{n+1} - x_n)$ è assolutamente convergente e quindi la successione $\{x_n\}_{n\geq 0}$ ha limite finito. È questo il consueto trucco che consiste nel "trasformare" la successione $\{x_n\}_{n\geq 0}$ in una serie numerica. Sia allora $\xi_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Poiché g è continua, passando al limite per n tendente all'infinito nell'uguaglianza $g(x_n) = x_{n+1}$ si ottiene $g(\xi_0) = \xi_0$ (ed è chiaro che $\xi_0 \in [x_0 - c, x_0 + c]$). Sempre dalla (50.7) si può dedurre che, per ogni $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leq \\ &\leq c\,(1-q)(q^{n+p-1} + q^{n+p-2} + \cdots + q^n) = \\ &= c\,(1-q)q^n\,\frac{1-q^p}{1-q} \leq c\,q^n\ .\end{aligned}$$

Si passi al limite per $p \to \infty$ nella disuguaglianza

$$|x_{n+p} - x_n| \leq c\,q^n$$

così da ottenere

$$|\xi_0 - x_n| \leq c\,q^n\ .$$

Resta da dimostrare soltanto l'unicità della radice ξ_0 dell'equazione $g(x) = x$ nell'intervallo $[x_0 - c, x_0 + c]$. Se ξ_1 è un'altra radice, i.e. $g(\xi_1) = \xi_1$, tale che $|\xi_1 - x_0| \leq c$, allora

$$\xi_1 - \xi_0 = g(\xi_1) - g(\xi_0)$$

e applicando nuovamente il teorema di Lagrange e l'ipotesi i) si ottiene

$$|\xi_1 - \xi_0| \leq q\,|\xi_1 - \xi_0|$$

e quindi $\xi_1 = \xi_0$ (altrimenti si otterrebbe $q \geq 1$ che è assurdo). □

50.3. **Il metodo di Newton.** L'idea di tale metodo è molto simile a quella della regula falsi, tranne per la scelta del polinomio $P(x)$ (i.e. si sceglie una parallela ad una tangente al grafico della funzione f anziché una secante). Precisamente

Teorema 50.2. *Sia $x_0 \in I$ e si considerino i numeri $c \geq 0$ e $\lambda > 0$ tali che*

(i) $|f(x_0)| \leq \dfrac{c}{2}\,\lambda$,

(ii) *per ogni $x, y \in [x_0 - c, x_0 + c] \subset I$ restino soddisfatte*

$$|f'(x)| \geq \frac{1}{\lambda} \tag{50.8}$$

$$|f'(x) - f'(y)| \leq \frac{1}{2\lambda}\ . \tag{50.9}$$

Allora esiste ed è unica una radice ξ_0 dell'equazione $f(x) = 0$ nell'intervallo $[x_0 - c, x_0 + c]$. Inoltre per una qualsiasi successione $\{z_n\}_{n\geq 0}$ di punti in $[x_0 - c, x_0 + c]$, la successione $\{x_n\}_{n\geq 0}$ definita dalla relazione di ricorrenza

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(z_n)}\ \ ,\ \ n \geq 0 \tag{50.10}$$

tende a ξ_0 per $n \to \infty$.

Dimostrazione. Innanzitutto, si verificherà (per induzione matematica) che tutti i termini della successione $\{x_n\}_{n\geq 0}$ stanno nell'intervallo $[x_0 - c, x_0 + c]$ e nel farlo, si dimostreranno anche le relazioni

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{c}{2^n} \tag{50.11}$$

$$|f(x_{n-1})| \leq \frac{c}{2^n \lambda} \tag{50.12}$$

per ogni $n \geq 1$. Infatti, si osservi che per $n = 1$, la relazione (50.12) è soddisfatta in virtù dell'ipotesi (i) del Teorema 50.2. D'altra parte

$$|x_1 - x_0| = \left| \frac{f(x_0)}{f'(z_0)} \right| \leq \frac{c}{2}$$

per l'ipotesi i) e per la disuguaglianza (50.8). Si ragioni ora per induzione, supponendo le (50.11) e (50.12) vere. Si ha (per la (50.10)) che

$$f(x_n) = f(x_n) - f(x_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})f'(z_{n-1}) \; .$$

A questo punto si adoperi la disuguaglianza

$$|f(x) - f(y) - f'(z)(x - y)| \leq (x - y) \sup_{x \leq t \leq y} |f'(t) - f'(z)| \tag{50.13}$$

vera per tutti gli $x, y, z \in I$ con $y < x$ (un corollario immediato del teorema di Lagrange). Si ottiene:

$$|f(x_n)| \leq \frac{1}{2\lambda} \; |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{c}{2^{n+1}\lambda}$$

e la (50.12) (con n rimpiazzato da $n + 1$) è verificata. D'altra parte si ha

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{f(x_n)}{f'(z_n)} \right| \leq \frac{c}{2^{n+1}}$$

per la (50.8) e per il risultato precedente. Risulta cioè la (50.11) (con n rimpiazzato da $n + 1$). Si deduce che

$$|x_{n+1} - x_0| \leq c \sum_{j=1}^{n+1} 2^{-j} \leq c$$

e quindi $x_{n+1} \in [x_0 - c, x_0 + c]$. Dalla (50.11) si deduce subito che $\sum_{n \geq 1} (x_n - x_{n-1})$ è assolutamente convergente e quindi esiste $\xi_0 \in [x_0 - c, x_0 + c]$ tale che $\lim_{n \to \infty} x_n = \xi_0$. Rimane da verificare l'unicità della radice dell'equazione $f(x) = 0$ nell'intervallo $[x_0 - c, x_0 + c]$. Se ξ_1 è una di queste radici, allora (dalle (50.13) e (50.9))

$$\begin{aligned} |f'(z_n)(\xi_1 - x_{n+1})| = |f(\xi_1) - f(x_n) - f'(z_n)(\xi_1 - x_n)| \leq \\ \leq \frac{1}{2\lambda} \; |\xi_1 - x_n| \end{aligned}$$

e quindi (dalla (50.8)):

$$|\xi_1 - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \; |\xi_1 - x_n| \; .$$

Per $n \to \infty$ si ottiene:

$$|\xi_1 - \xi_0| \leq \frac{1}{2} \; |\xi_1 - \xi_0|$$

cioè $\xi_1 = \xi_0$. □

Appendice

• Sia A un insieme; si dice *relazione su* A ogni sottoinsieme $\mathcal{R}$ di $A^2 = A \times A$.
Sia $\mathcal{R} \subseteq A^2$ una relazione in A; se $(x, y) \in \mathcal{R}$ allora si dice che *gli elementi* x *ed* y *sono nella* (o *in*) *relazione* $\mathcal{R}$ e spesso si scrive anche

$$x\,\mathcal{R}\,y\ .$$

• Sia A un insieme ed $\mathcal{R}$ una relazione in A; si dice che $\mathcal{R}$ è una *relazione di ordine* in A se $\mathcal{R}$ è

- *riflessiva*, cioè per ogni $a \in A$ è $a\,\mathcal{R}\,a$;
- *antisimmetrica*, cioè se per ogni $a, b \in A$ per cui $a\,\mathcal{R}\,b$ e $b\,\mathcal{R}\,a$ segue che $a = b$;
- *transitiva*, cioè per ogni $a, b, c \in A$ per cui $a\,\mathcal{R}\,b$ e $b\,\mathcal{R}\,c$ segue che $a\,\mathcal{R}\,c$.

• Un *insieme ordinato* è una coppia $(A, \mathcal{R})$ costituita da un insieme A e da un relazione di ordine $\mathcal{R}$ in A.
• Sia $(A, \mathcal{R})$ un insieme ordinato. Due elementi $a, b \in A$ si dicono *confrontabili* se $a\,\mathcal{R}\,b$ oppure $b\,\mathcal{R}\,a$.
• Se comunque si scelgano due elementi di $(A, \mathcal{R})$, essi sono sempre confrontabili, allora $\mathcal{R}$ si dice una *relazione di ordine totale*; inoltre $(A, \mathcal{R})$ si dice un insieme *totalmente ordinato.*

Esempio 50.1.

(i) Sia A un insieme, $A \neq \emptyset$. Allora la relazione di inclusione debole "$\subseteq$" è una relazione di ordine sull'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di A. In generale "$\subseteq$" non è una relazione di ordine totale. Infatti per $A = \{1, 2, 3\}$ i sottoinsiemi $\{1, 2\}$ e $\{2, 3\}$ sono due elementi di $\mathcal{P}(A)$ non confrontabili.

(ii) In $\mathbb{R}$ si consideri la relazione definita da:

$$x\,\mathcal{R}\,y \iff x \leq y\ .$$

È facile verificare che $(\mathbb{R}, \leq)$ è un insieme totalmente ordinato. Analogamente per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$, $(A, \leq)$ è un insieme totalmente ordinato.

(iii) $\mathbb{R}$ con la relazione definita da

$$x\,\mathcal{R}\,y \iff x \geq y$$

è un insieme totalmente ordinato e lo è anche $(A, \geq)$ per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$.

• Sia $(A, \mathcal{R})$ un insieme ordinato. Un elemento $a_0 \in A$ si dice un *primo elemento di* A se per ogni $a \in A$ tale che $a\,\mathcal{R}\,a_0$ segue che $a = a_0$.

Proposizione 50.2. *Sia $(A, \mathcal{R})$ un insieme totalmente ordinato. Se A ammette un primo elemento allora esso è unico.*

Dimostrazione. Siano $a_0, a_0' \in A$ due primi elementi di A. Siccome A è totalmente ordinato, si presentano due casi: I) $a_0\,\mathcal{R}\,a_0'$ oppure II) $a_0'\,\mathcal{R}\,a_0$. Se vale il primo allora, essendo a_0' un primo elemento di A, è $a_0 = a_0'$, se invece vale il secondo allora, essendo a_0 un primo elemento di A, è $a_0' = a_0$. In ogni caso $a_0' = a_0$. □

Corollario 50.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme. Se A ha minimo allora esso è unico. Analogamente, se A ha massimo allora esso è unico.*

Dimostrazione. Si consideri l'insieme totalmente ordinato $(A, \leq)$ e sia $m_0 = \min A$. Dunque per ogni $a \in A$ è $m_0 \leq a$ e quindi se esistesse un elemento $a_0 \in A$ per cui $a_0 \leq m_0$, necessariamente sarebbe $a_0 = m_0$. Pertanto m_0 è un primo elemento di $(A, \leq)$. Dalla Proposizione 50.2, m_0 è unico.
In modo analogo, se $M_0 = \max A$ allora[36] M_0 è un primo elemento dell'insieme totalmente ordinato $(A, \geq)$ e perciò M_0 è unico. $\square$

Osservazione 50.1. Un insieme ordinato ma *non* totalmente ordinato può avere più di un primo elemento. Ad esempio sia $A = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\}\}$; $(A, \subseteq)$ è un insieme ordinato ma non è totalmente ordinato in quanto $\{1,2\}$ e $\{1,3\}$ non sono confrontabili. Si noti che $(A, \subseteq)$ ha due primi elementi che sono $\{1,2\}$ e $\{1,3\}$.

Definizione 50.1. Si chiama *sezione* di un insieme totalmente ordinato $(A, \mathcal{R})$ una coppia ordinata (B, C) di sottoinsiemi B e C di A tali che $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$ e comunque si scelgano $b \in B$ e $c \in C$ è sempre $b \, \mathcal{R} \, c$.

• La definizione di estremo superiore di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ci permette di dimostrare

Proposizione 50.3 (disuguaglianza di Archimede). *Per ogni coppia di numeri reali positivi distinti $x, y \in \mathbb{R}$ esiste $n_0 \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ tale che $n_0 x > y$.*

Dimostrazione. Si supponga per assurdo che la proprietà non sia vera. Allora esistono due numeri reali positivi x_0 e y_0 tali che per ogni $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ sia $n x_0 \leq y_0$. Si ha che y_0 è un maggiorante dell'insieme $A = \{x_0, \ 2x_0, \ 3x_0, \ \cdots, \ n x_0, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ che dunque risulta essere limitato superiormente. Sia $M = \sup A$; allora per ogni $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ è $n x_0 \leq M$: in particolare è anche $(n+1)x_0 \leq M$, per ogni $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, da cui $n x_0 \leq M - x_0$, per ogni $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Quindi $M - x_0$ è un maggiorante di A e $M - x_0 < M$. Assurdo, perché M è il minimo dei maggioranti di A. $\square$

• Proviamo la seguente caratterizzazione delle funzioni monotòne continue.

Proposizione 50.4. *Sia $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione monotòna nel connesso $A \subseteq \mathcal{D}(f)$. f è continua in A se e solo se $f(A)$ è connesso.*

Dimostrazione. Se f è continua nel connesso A allora $f(A)$ è connesso (cfr. Proposizione 21.2). Viceversa sia $f(A)$ connesso. Per $x_0 \in A$ e $\varepsilon > 0$ si consideri l'intorno $I(f(x_0), \varepsilon)$. Dalle proprietà degli estremi esistono $y', y'' \in f(A)$ tali che

$$\inf_A f \leq y' < f(x_0) < y'' \leq \sup_A f \ .$$

Se fosse $y' \notin I(f(x_0), \varepsilon)$ allora $|y' - f(x_0)| \geq \varepsilon$ e poiché $y' < f(x_0)$, necessariamente sarebbe $y' \leq f(x_0) - \varepsilon$. D'altra parte siccome $f(A)$ è connesso, è $[y', f(x_0)] \subset f(A)$, inoltre $f(x_0) - \varepsilon \in [y', f(x_0)]$, dunque $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0)) \subset [f(x_0) - \varepsilon, f(x_0)] \subset [y', f(x_0)] \subset f(A)$. Quindi se $|y' - f(x_0)| \geq \varepsilon$ allora ogni elemento $y \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0))$ è tale che

$$\inf_A f \leq y' < y < f(x_0) \quad , \quad y \in f(A) \cap I(f(x_0), \varepsilon) \ .$$

In modo analogo se $y'' \notin I(f(x_0), \varepsilon)$ e cioè $|y'' - f(x_0)| \geq \varepsilon$ allora ogni elemento $y \in (f(x_0), f(x_0) + \varepsilon)$ è tale che

$$f(x_0) < y < y'' \leq \sup_A f \quad , \quad y \in f(A) \cap I(f(x_0), \varepsilon) \ .$$

[36] Per ogni $a \in A$ è $M_0 \geq a$ e quindi se esistesse un elemento $a_0 \in A$ per cui $a_0 \geq M_0$ necessariamente sarebbe $a_0 = M_0$.

In definitiva esisteranno $y'_\varepsilon, y''_\varepsilon \in f(A) \cap I(f(x_0), \varepsilon)$ tali che

$$\inf_A f \leq y'_\varepsilon < f(x_0) < y''_\varepsilon \leq \sup_A f \ , \tag{50.14}$$

$y'_\varepsilon = f(x'_\varepsilon)$, $y''_\varepsilon = f(x''_\varepsilon)$, $x'_\varepsilon, x''_\varepsilon \in A$. Se f è decrescente allora $x''_\varepsilon < x_0 < x'_\varepsilon$: infatti se fosse $x''_\varepsilon = x_0$ sarebbe $y''_\varepsilon = f(x''_\varepsilon) = f(x_0)$ che contraddirebbe la (50.14). Se fosse $x''_\varepsilon > x_0$ allora sarebbe $y''_\varepsilon = f(x''_\varepsilon) \leq f(x_0)$ che ancora contraddirebbe la (50.14). Similmente non può essere $x'_\varepsilon \leq x_0$. Sia $\delta_\varepsilon = \min\{|x''_\varepsilon - x_0|, |x'_\varepsilon - x_0|\} > 0$. Ogni $x \in I(x_0, \delta_\varepsilon)$ è tale che $f(x) \in I(f(x_0), \varepsilon)$. Infatti in tal caso

$$x''_\varepsilon < x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon < x'_\varepsilon$$

cioè $x \in [x''_\varepsilon, x'_\varepsilon]$. Allora $f(x) \in f([x''_\varepsilon, x'_\varepsilon]) \subseteq [f(x'_\varepsilon), f(x''_\varepsilon)] \subset I(f(x_0), \varepsilon)$. Questo prova la continuità di f in x_0 che essendo un arbitrario punto di A dà la continuità di f in A. Analogamente si procede se f è crescente. $\square$

• Sappiamo che se $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, allora $\dfrac{1}{z} := \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$. Dalla (34.2), tenuto conto che $\overline{z} = |z|e^{-i\operatorname{Arg} z}$, si ha

$$z^{-1} = e^{-\log z} = e^{-[\log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)]} = e^{-\log|z|} e^{-i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)} =$$
$$= \frac{1}{|z|}\, e^{-i\operatorname{Arg} z} = \frac{1}{|z|}\, \frac{\overline{z}}{|z|} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Quindi se $z \neq 0$ allora, come nel caso reale,

$$z^{-1} = \frac{1}{z} \ .$$

• Siano $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, allora $\log z^w \neq w \log z$.
Infatti se ad esempio $z = w = i$ allora dalla (34.2) si ha

$$i^i = e^{i \log i}$$

dove

$$\log i = \log|i| + i(\operatorname{Arg} i + 2k\pi) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

i.e.

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2} + 2h\pi} \quad , \quad h = -k \in \mathbb{Z}$$

da cui

$$\log i^i = \log e^{-\frac{\pi}{2}+2h\pi} = \log\left|e^{-\frac{\pi}{2}+2h\pi}\right| + i\left(\operatorname{Arg} e^{-\frac{\pi}{2}+2h\pi} + 2m\pi\right) =$$
$$= \log e^{-\frac{\pi}{2}+2h\pi} + 2m\pi\, i \quad , \quad h, m \in \mathbb{Z}$$

i.e.

$$\log i^i = -\frac{\pi}{2} + 2(h + mi)\pi \quad , \quad h, m \in \mathbb{Z}$$

mentre

$$i \log i = i\left(i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) = -\frac{\pi}{2} + 2h\pi \quad , \quad h = -k \in \mathbb{Z} \ .$$

Si osservi che mentre $i \log i$ è un numero reale, $\log i^i$ ha parte immaginaria non nulla.

In modo simile, se
• $z, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, allora $(z^{w_1})^{w_2} \neq z^{w_1 w_2}$.

Infatti prendiamo $z = w_1 = w_2 = i$, si ha

$$\left(i^i\right)^i = e^{i \log i^i}$$

quindi dalle formule precedenti

$$\left(i^i\right)^i = e^{i\left[-\frac{\pi}{2}+2(h+mi)\pi\right]} = e^{-2m\pi+i(-\frac{\pi}{2}+2h\pi)} =$$
$$= e^{-2m\pi}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -ie^{-2m\pi} \quad , \quad h, m \in \mathbb{Z} \, ,$$

mentre

$$i^{i\cdot i} = i^{i^2} = i^{-1} = \frac{1}{i} = -i \, .$$

• Abbiamo visto nel capitolo VII il teorema della media integrale (cfr. Teorema 37.1) noto anche come *I teorema della media integrale.* Diamo adesso un teorema a esso simile detto *II teorema della media integrale.* In realtà esso, come vedremo, risulta essere un'immediata conseguenza della seguente

Proposizione 50.5 (formula di Bonnet). *Siano $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione decrescente non negativa e $g \in \mathcal{R}([a,b))$. Allora esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^{x_0} g(x)\,dx \, . \tag{50.15}$$

Dimostrazione. Poiché f è monotòna e non negativa su $[a,b)$, f è limitata[37] dunque $f \in \mathcal{R}([a,b))$. Sia Δ una partizione dell'intervallo $[a,b)$,

$$\Delta : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

cosicché

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,dx$$

qualunque sia il numero n della partizione scelta. Passando al limite per $n \to \infty$ si ha

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,dx \, . \tag{50.16}$$

Ora

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_{i-1})]g(x)\,dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)\,dx$$

dove

$$\sup_{[x_{i-1},x_i)} |f(x) - f(x_{i-1})| = f(x_{i-1}) - f(x_i) = \sup_{[x_{i-1},x_i)} f - \inf_{[x_{i-1},x_i)} f = M_i - m_i \, .$$

Posto $L = \sup_{[a,b)} |g|$, si ha

$$\left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_{i-1})]g(x)\,dx \right| \le L \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (M_i - m_i)\,dx \le L(S_\Delta - s_\Delta) < \varepsilon$$

[37]Se non lo fosse per ogni $M > 0$ esisterebbe un punto $x_M \in [a,b)$ tale che $|f(x_M)| = f(x_M) > M$. In particolare per ogni $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ esisterebbe $x_n \in [a,b)$ tale che $f(x_n) > n$. Allora $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$. Di conseguenza per ogni $M > 0$ esisterebbe $n_M \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n_M$ si avrebbe $f(x_n) > M$. Siccome f è decrescente e $a \le x_n$, sarebbe $f(a) \ge f(x_n) > M$ per ogni $M > 0$ e questo è assurdo.

per ogni $\varepsilon > 0$ e per $n > n_\varepsilon$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_{i-1})]g(x) = 0 \ . \tag{50.17}$$

Si consideri la funzione integrale di g

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

allora

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})[G(x_i) - G(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} G(x_i)f(x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} G(x_{i-1})f(x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)f(x_{i-1}) + G(b)f(x_{n-1}) - G(a)f(a) - \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)f(x_i) =$$

$$= G(b)f(x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)[f(x_{i-1}) - f(x_i)] \ .$$

Se

$$m = \min_{[a,b]} G \quad , \quad M = \max_{[a,b]} G$$

allora

$$mf(x_{n-1}) + m\sum_{i=1}^{n-1} [f(x_{i-1}) - f(x_i)] \le \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)\,dx \le$$

$$\le Mf(x_{n-1}) + M\sum_{i=1}^{n-1} [f(x_{i-1}) - f(x_i)]$$

cioè

$$mf(a) \le \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)\,dx \le Mf(a) \ ;$$

passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene

$$mf(a) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)\,dx \le Mf(a)$$

che dalle considerazioni fatte è equivalente a

$$mf(a) \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le Mf(a) \ .$$

Dunque

$$\frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,dx \in [m, M]$$

ovvero esiste un punto $y_0 \in [m, M]$ tale che

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = y_0 f(a) \ .$$

D'altra parte, essendo la funzione integrale G lipschitziana su $[a, b]$, esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $G(x_0) = y_0$ ed allora si ha

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(a) \int_a^{x_0} g(t)\, dt \; .$$

□

Teorema 50.3 (II teorema della media integrale). *Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotòna in $[a, b]$ e $g \in \mathcal{R}([a, b)$. Allora esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(a) \int_a^{x_0} g(x)\, dx + f(b) \int_{x_0}^b g(x)\, dx \; .$$

Dimostrazione. Basta applicare la formula di Bonnet (50.15) considerando la funzione decrescente e non negativa

$$h(x) = f(x) - f(b)$$

se f è decrescente e la funzione $-h(x)$ se invece f è crescente. □

Il Teorema 50.3 ci permette di provare un criterio per la convergenza degli integrali generalizzati, e precisamente abbiamo

Proposizione 50.6. *Siano $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione monotòna in $[a, +\infty)$ con $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che*

(i) *$g \in \mathcal{R}([b, c))$ per ogni $b, c > a$,*

(ii) *esista una costante $M > 0$ per cui*

$$\left| \int_c^b g(x)\, dx \right| < M$$

per ogni $b, c > a$.

Allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\, dx$$

converge.

Dimostrazione. Siano $b', b'' > a$ con $b' < b''$; dal II teorema della media integrale (Teorema 50.3) esiste un punto $\xi \in [b', b'']$ tale che

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x)g(x)\, dx \right| = \left| f(b') \int_{b'}^{\xi} g(x)\, dx + f(b'') \int_{\xi}^{b} g(x)\, dx \right| \; .$$

Poiché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon > a$ tale che per ogni $x > x_\varepsilon$ si abbia $|f(x)| < \varepsilon$; in particolare per $b', b'' > x_\varepsilon$ si avrà

$$|f(b')| < \varepsilon \quad , \quad |f(b'')| < \varepsilon$$

dunque

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x)g(x)\, dx \right| < \varepsilon \left(\left| \int_{b'}^{\xi} g(x)\, dx \right| + \left| \int_{\xi}^{b''} g(x)\, dx \right| \right) < 2M\varepsilon$$

e dal teorema di Cauchy per i limiti si ha l'asserto. □

Bibliografia

[1] E. Barletta & S. Dragomir, *Lezioni di Analisi Matematica I*, Edizioni Ermes, Potenza, 1999.
[2] E. Giusti, *Analisi Matematica I*, Bollati Boringhieri Ed., Torino, 1989.
[3] E. Giusti, *Esercizi e complementi di Analisi matematica I*, Bollati Boringhieri Ed., Torino, 1991.

ALFABETO GRECO

Nome	*Maiuscola*	*Minuscola*
Alfa (o Alpha)	A	α
Beta	B	β
Gamma	Γ	γ
Epsilon	E	$\varepsilon,\ \epsilon$
Zita (o Zeta)	Z	ζ
Eta	H	η
Theta	Θ	$\theta,\ \vartheta$
Iota	I	ι
Kappa	K	κ
Lambda	Λ	λ
Mi (o Mu)	M	μ
Ni (o Nu)	N	ν
Xi	Ξ	ξ
Omicron	O	o
Pi	Π	π
Ro (o Rho)	P	ρ
Sigma	Σ	$\sigma,\ \varsigma$
Tau	T	τ
Upsilon	Υ	υ
Fi (o Phi)	Φ	$\phi,\ \varphi$
Chi	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Omega	Ω	ω

MATEMATICI

BERNOULLI Jacques I, Basilea 1654 - 1705.

BERNOULLI Jean, Basilea 1667 - 1748.

BOLZANO Bernhard, Praga 1781 - 1848.

BOREL Emile, Saint-Affrique (Aveyron) 1871 - Parigi 1956.

CAUCHY Augustin (barone), Parigi 1789 - Sceaux (Parigi) 1857.

EULER Leonhard, Basilea 1707 - Pietroburgo 1783.

HEINE Heinrich Eduard, Berlino 1821 - Halle 1881.

HESSE Ludwig Otto, Königsberg 1811 - Monaco 1874 (allievo di C. Jacobi).

de l'HÔPITAL Guillaume Franois Antoine (marchese de l'Hpital), Parigi 1661 Parigi 1704.

JACOBI Carl, Potsdam 1804 - Berlino 1851.

LAGRANGE Giuseppe Luigi, Torino 1736 - Parigi 1813.

RICCATI Iacopo Francesco, Venezia 1676 - Treviso 1754.

RIEMANN Bernhard, Breselenz (Hannover) 1826 - Selasca 1866.

SCHWARTZ Laurent, Parigi 1915 (distribuzioni).

SCHWARZ Karl Hermann Amandus, Hermsdorf (Slesia) 1843 - Berlino 1921.

WEIERSTRASS Karl Theodor Wilhelm, Ostenfelde (Münster) 1815 - Berlino 1897.