Esercizi e complementi relativi al corso

Analisi Matematica I

(12 C.F.U.)

Elisabetta Barletta

Indice

1. Esercizi sul principio di induzione matematica

Teorema 1.1 (Principio d'induzione matematica). *Sia $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di proposizioni enunciate ciascuna per il naturale $n \in \mathbb{N}$. Se*

(i) *$P(0)$ è vera,*
(ii) *per $n \in \mathbb{N}$ l'implicazione "$P(n) \Rightarrow P(n+1)$" è vera,*

allora la proposizione $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dal principio d'induzione matematica segue il seguente

Corollario 1.1. *Sia $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di proposizioni enunciate ciascuna per il naturale $n \in \mathbb{N}$. Se*

(i) *$P(n_0)$ è vera per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$,*
(ii) *l'implicazione "$P(n) \Rightarrow P(n+1)$" è vera per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$,*

allora la proposizione $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Esercizio 1.1. *Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ è:*

(i) $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,
(ii) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$,
(iii) $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

■ *Soluzione di* (i). Sia $P(n)$ data da:

$$P(n) \ : \ 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

Per dimostrare la formula data, basta usare il principio d'induzione matematica. A tal fine verifichiamo la veridicità della $P(0)$. È ovvio che per $n = 0$ i membri dell'uguaglianza scritta sopra sono entrambi uguali a 0 e dunque $P(0)$ è soddisfatta.
Supponiamo ora che $P(n)$ sia soddisfatta; vogliamo provare che anche $P(n+1)$ è soddisfatta. Essa afferma che

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ .$$

Si ha:

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \ \overset{P(n)}{=} \ \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 =$$
$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ .$$

Dunque il principio d'induzione matematica ci permette di affermare che la formula

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione di (ii). Sia ora $P(n)$ data da:

$$P(n) \ : \ 1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2 \ .$$

Per dimostrare la formula data, anche qui basta usare il principio d'induzione matematica. Verifichiamo la veridicità della $P(0)$. Per $n = 0$ i membri dell'uguaglianza scritta sopra

sono entrambi uguali a 1 e dunque $P(0)$ è soddisfatta.
Supponiamo ora che $P(n)$ sia soddisfatta; vogliamo provare che anche $P(n+1)$ è soddisfatta, e cioè che

$$P(n+1)\ :\ 1+3+\cdots+(2n+1)+(2n+3)=(n+2)^2\ .$$

Si ha:

$$\begin{aligned}1+3+\cdots+(2n+1)+(2n+3) &\overset{P(n)}{=} (n+1)^2+2n+3= \\ &= n^2+2n+1+2n+3=n^2+4n+4=(n+2)^2\ .\end{aligned}$$

Dunque il principio d'induzione matematica ci permette di affermare che la formula

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$$

è vera per ogni $n\in\mathbb{N}$.

Soluzione di (iii). Sia $P(n)$ data da:

$$P(n)\ :\ 1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ .$$

Usiamo anche qui il principio d'induzione matematica. Per $n=0$ i membri dell'uguaglianza scritta sopra sono entrambi uguali a 0 e dunque $P(0)$ è soddisfatta.
Supponiamo ora che $P(n)$ sia soddisfatta; vogliamo provare che anche $P(n+1)$ è soddisfatta, e cioè che

$$P(n+1)\ :\ 1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\ .$$

Si ha:

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &\overset{P(n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2= \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}= \\ &= \frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+4n+3n+6)}{6}= \\ &= \frac{(n+1)[2n(n+2)+3(n+2)]}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\ .\end{aligned}$$

Dunque il principio d'induzione matematica ci permette di affermare che la formula

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

è vera per ogni $n\in\mathbb{N}$. ■

Esercizio 1.2. *Dimostrare che per ogni $a,b\in\mathbb{R}$ e $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ è:*

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k}\ .$$

■ *Soluzione.* Poniamo

$$P(n)\ :\ a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k}\ .$$

Per $n=1$ il primo membro dell'uguaglianza è $a-b$, così come lo è il secondo. Quindi $P(1)$ è soddisfatta.
Supponiamo vera $P(n)$ e proviamo $P(n+1)$, cioè che

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}\ .$$

Scriviamo

$$a^{n+1}-b^{n+1}=a^{n+1}-a^n b+a^n b-b^{n+1}=$$

$$=a^n(a-b)+b(a^n-b^n)\overset{P(n)}{=}(a-b)\left[a^n+b\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-1-k}\right]=$$

$$=(a-b)[a^n+b^n+ab^{n-1}+\cdots a^{n-1}b]=(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}\ .$$

Pertanto per il principio d'induzione matematica, la formula proposta è vera. ■

Esercizio 1.3. *Dimostrare la* **disuguaglianza di Bernoulli**, *e cioè, per* $a\in\mathbb{R}, a>-1$ *e per* $n\in\mathbb{N}$ *si ha*

$$(1+a)^n\geq 1+na\ .$$

■ *Soluzione.* Posto

$$P(n)\ :\ (1+a)^n\geq 1+na\ ,$$

per $n=0$ la disuguaglianza è soddisfatta (in tal caso vale l'uguaglianza). Tenuto conto che $1+a>0$ si ha che

$$(1+a)^{n+1}=(1+a)(1+a)^n\overset{P(n)}{\geq}(1+a)(1+na)=1+na+a+na^2>$$

$$>1+(n+1)a$$

e di conseguenza $P(n)$ implica $P(n+1)$. Dal principio d'induzione matematica si ottiene allora la disuguaglianza scritta. ■

Esercizio 1.4. *Dimostrare la* **formula del binomio di Newton** *e cioè che per ogni* $a,b\in\mathbb{R}$ *e* $n\in\mathbb{N}$ *è*

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\ .$$

■ *Soluzione.* Per $n=0$ la formula è banalmente verificata. Posto

$$P(n)\ :\ (a+b)^n=\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^h b^{n-h}$$

si ha che

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n\overset{P(n)}{=}(a+b)\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^h b^{n-h}=$$

$$=\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^{h+1}b^{n-h}+\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^h b^{n+1-h}\ . \tag{1.1}$$

Nella prima sommatoria di (1.1) poniamo $k = h + 1$ cosicché $h = k - 1$ e

$$\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} a^{h+1} b^{n-h} = \sum_{k-1=0}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} .$$

Quindi sostituendo otteniamo

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} =$$

$$= \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} .$$

Ora

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!k + n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

e quindi

$$(a+b)^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

che dà la veridicità della $P(n+1)$. ■

Esercizio 1.5. *Dimostrare che* $2^n n! < n^n$ *per* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$.

■ *Soluzione.* Sia

$$P(n) \ : \ 2^n n! < n^n .$$

Per $n = 6$ si ha che $2^n n! = 2^6 6! = 46.080$ mentre $n^n = 6^6 = 46.656$ e dunque la disuguaglianza è verificata. (Si osservi che per $1 \leq n \leq 5$ la disuguaglianza è falsa.) Supposta ora vera $P(n)$, proviamo $P(n+1)$. Si ha:

$$(n+1)^{n+1} = (1+n)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} n^{n+1-k} \geq$$

$$\geq \binom{n+1}{0} n^{n+1} + \binom{n+1}{1} n^n + \binom{n+1}{2} n^{n-1} =$$

$$= n^{n+1} + (n+1)n^n + \frac{1}{2}(n+1)n^n = n^n \left[n + \frac{3}{2}(n+1) \right] =$$

$$= n^n \left(\frac{5}{2} n + \frac{3}{2} \right) = n^n \left(2n + \frac{n+3}{2} \right) \geq n^n \left(2n + \frac{9}{2} \right) > n^n (2n+4) = 2n^n (n+2)$$

cioè abbiamo

$$2(n+2)n^n < (n+1)^{n+1} . \tag{1.2}$$

Si osservi che, dall'ipotesi di induzione,

$$2^{n+1}(n+1)! = 2(n+1)\, 2^n\, n! < 2(n+1)n^n$$

per cui, tenuto conto della (1.2),

$$2^{n+1}(n+1)! < 2(n+1)n^n < 2(n+2)n^n < (n+1)^{n+1}$$

che è l'asserto della $P(n+1)$. ∎

2. Esercizi sulle successioni e serie di numeri reali

Esercizio 2.1. *Dimostrare che*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

per $a \in \mathbb{R}, a > 0$.

■ *Soluzione.* L'asserto è banalmente vero se $a = 1$.
Se $a > 1$ allora $\sqrt[n]{a} > 1$ e dunque potremo scrivere $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$, con $a_n > 0$. Allora $a = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n > na_n$ da cui $a_n < \frac{a}{n}$. Pertanto

$$0 < a_n < \frac{a}{n}$$

e dal teorema dei due carabinieri si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n) = 1 \ .$$

Se $0 < a < 1$ allora $0 < \sqrt[n]{a} < 1$ e $\frac{1}{a} > 1$. Si pone $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{1 + a_n}$, con $a_n > 0$. Allora $a = \frac{1}{(1 + a_n)^n}$ e siccome ancora $(1 + a_n)^n \geq 1 + na_n > na_n$, segue che $a_n < \frac{1}{na}$.
Pertanto

$$0 < a_n < \frac{1}{na}$$

e dal teorema dei due carabinieri si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + a_n} = 1 \ . \qquad ■$$

Esercizio 2.2. *Dimostrare che*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \ .$$

■ *Soluzione.* Si scriva $\sqrt[n]{n} = \left(\sqrt{\sqrt[n]{n}}\right)^{!2} = \left(\sqrt[n]{\sqrt{n}}\right)^2$. Siccome $n > 1$, allora $\sqrt[n]{\sqrt{n}} > 1$ e scriviamo $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + a_n$, con $a_n > 0$. Ne segue che

$$\sqrt{n} = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n > na_n$$

da cui $0 < a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ e, per il teorema dei due carabinieri, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Si ha allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\sqrt{n}}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^2 = 1 \ . \qquad ■$$

Esercizio 2.3. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} a^n$$

per $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

■ *Soluzione.* Se $a = 1$ il limite proposto è 1. Se $a = -1$ si ottiene la successione $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ il cui limite non esiste.

Se $0 < a < 1$, poniamo $a = \dfrac{1}{1+h}$, con $h > 0$. Allora
$$0 < a^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}$$
e dal teorema dei due carabinieri segue che il limite proposto è 0.

Se $-1 < a < 0$ allora $0 < |a| < 1$ e per quanto visto $\lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$. Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq n_\varepsilon$ sia $\big||a|^n\big| = |a|^n < \varepsilon$. Ora
$$|a|^n = \underbrace{|a| \cdots |a|}_{n\text{-volte}} = |\underbrace{a \cdots a}_{n\text{-volte}}| = |a^n|\ ,$$
dunque per $n \geq n_\varepsilon$ è $|a^n| < \varepsilon$. Da questo segue che $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ anche nel caso $-1 < a < 0$.

Se $a > 1$ allora scriviamo $a = 1 + h$, con $h > 0$ e quindi $a^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh > nh$. Siccome $\lim_{n\to\infty} nh = +\infty$, per ogni $K > 0$ esiste $n_K \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_K$, si abbia $nh > K$ e di conseguenza per lo stesso n_K, se $n > n_K$, si ha che $a^n > K$ ovvero che $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$.

Se infine $a < -1$, scriviamo $a = -b$, per $b > 1$. Ne segue che $a^n = (-1)^n b^n$ e il limite della successione $\{(-1)^n b^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non esiste in quanto le due sottosuccessioni $\{(-1)^{2k} b^{2k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{b^{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{(-1)^{2k+1} b^{2k+1}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{-b^{2k+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ divergono rispettivamente a $+\infty$ e $-\infty$.

Ricapitolando si ha
$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{se } \ 0 < |a| < 1 \\ 1 & \text{se } \ a = 1 \\ +\infty & \text{se } \ a > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } \ a \leq -1\ . \end{cases}$$
■

Osservazione 2.1. Per $a = 0$ si ha la successione costantemente nulla ed è ovvio che $\lim_{n\to\infty} a^n$.

Esercizio 2.4. *Dimostrare che*
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$
per $\alpha \in \mathbb{R}$.

■ *Soluzione.* Per $\alpha = 0$ è ovvio. Se $\alpha \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, i.e. $\alpha = m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, allora
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^m} = \underbrace{\big(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\big) \cdots \big(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\big)}_{m} = 1\ .$$

Se invece $\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ allora si pone $\alpha = -m$, per $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, e
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-m}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^m}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n^m}\right)} = 1\ .$$

In ogni caso per $\alpha \in \mathbb{Z}$ è $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$.

Infine se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, tenuto conto che $[\alpha] \leq \alpha \leq [\alpha]+1$, con $[\alpha] \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\sqrt[n]{n^{[\alpha]}} \leq \sqrt[n]{n^\alpha} \leq \sqrt[n]{n^{[\alpha]+1}}$$

e dal teorema dei due carabinieri si ricava l'asserto. ■

Esercizio 2.5. *Calcolare, per $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n}$.

■ *Soluzione*. Se $0 < a < 1$ allora $\dfrac{1}{a} > 1$ e dunque $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{a}\right)^n = +\infty$. Poichè anche $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$, per $0 < a < 1$ si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{a^n} = +\infty\ .$$

Se invece $-1 < a < 0$ allora $a = -b$ con $0 < b < 1$. La sottosuccessione

$$\left\{\frac{2k}{(-1)^{2k}b^{2k}}\right\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{2k}{b^{2k}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

diverge a $+\infty$, mentre la sottosuccessione

$$\left\{\frac{2k+1}{(-1)^{2k+1}b^{2k+1}}\right\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{-\frac{2k+1}{b^{2k+1}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

diverge a $-\infty$. Di conseguenza non esiste il $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n}$ per $-1 < a < 0$.

Anche per $a = -1$ questo limite non esiste, mentre per $a = 1$ il limite è $+\infty$.

Se $a > 1$ allora $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n}$ si presenta nella forma indeterminata "$\dfrac{\infty}{\infty}$". In questo caso $\sqrt{a} > 1$ e scriviamo $\sqrt{a} = 1 + h$, con $h > 0$. Allora

$$(\sqrt{a})^n = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh$$

da cui $a^n > n^2h^2$ e quindi

$$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{1}{nh^2}\ .$$

Applicando il teorema dei due carabinieri si ricava che $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0$ per $a > 1$.

Se invece $a < -1$ allora si pone $a = -b$, con $b > 1$, e $0 \leq \left|\dfrac{n}{a^n}\right| = \dfrac{n}{b^n} < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, per $n > n_\varepsilon$, essendo $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{b^n} = 0$. Ne segue che $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0$ per $a < -1$.

Ricapitolando,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ 0 < a \leq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } \ -1 \leq a < 0 \\ 0 & \text{se } \ a > 1,\ a < -1\ . \end{cases}$$

■

Osservazione 2.2. Si noti che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty \quad \text{se} \;\; a > 1$$

(essendo in tal caso $a^n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) mentre non esiste se $a < -1$.

Più in generale,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$$

per $a > 1$ e $\alpha > 0$.

Infatti

$$\frac{a^n}{n^\alpha} = \left(\frac{a^{n/\alpha}}{n}\right)^\alpha = \left(\frac{(a^{1/\alpha})^n}{n}\right)^\alpha = \left(\frac{b^n}{n}\right)^\alpha$$

dove si è posto $b = a^{1/\alpha}$ e $b > 1$. Per ogni $K > 0$ si consideri $K^{1/\alpha} > 0$ e poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n} = +\infty$, si ha che esiste $n_K \in \mathbb{N}$ tale che, per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_K$, sia $\frac{b^n}{n} > K^{1/\alpha}$. Quindi anche $\left(\frac{b^n}{n}\right)^\alpha > K$ e perciò $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b^n}{n}\right)^\alpha = +\infty$.

Esercizio 2.6. *Dimostrare che*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \; ,$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$.

■ *Soluzione.* Se $|a| < 1$ allora $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$, dunque $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Se $a = 1$ allora banalmente il limite proposto è nullo; se $a = -1$, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$\left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| = \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

per $n > n_\varepsilon$, $n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$. Dunque ancora $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Se $a > 1$ poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, si abbia $\frac{a}{n} < \varepsilon$. In particolare per $\varepsilon = \frac{1}{2}$ si può prendere $n > [2a] + 1$.
Supponiamo allora di aver fissato $k \in \mathbb{N}$ con $k > [2a] + 1$. Ogni $n \in \mathbb{N}, n > k$, è un naturale maggiore di $[2a] + 1$ e anche $k + 1 > [2a] + 1$, e così via i suoi successivi fino a n. Ne segue che $\frac{a}{k+1} < \frac{1}{2}$, $\frac{a}{k+2} < \frac{1}{2}$, ecc., $\frac{a}{n} < \frac{1}{2}$, da cui

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} \frac{a^{n-k}}{\underbrace{(k+1)\cdots n}_{n-k}} = \frac{a^k}{k!} \frac{a}{k+1} \frac{a}{k+2} \cdots \frac{a}{n} <$$

$$< \frac{a^k}{k!} \underbrace{\frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{n-k} = \frac{a^k}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{(2a)^k}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Ora $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, dunque l'asserto segue dal teorema dei due carabinieri.

Se $a < -1$, posto $a = -b$, con $b > 1$, allora $\dfrac{a^n}{n!} = (-1)^n \dfrac{b^n}{n!}$ e poiché $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b^n}{n!} = 0$, si ottiene che anche il limite proposto per $a < -1$ è nullo. ■

Esercizio 2.7. *Dimostrare che*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty\ .$$

■ *Soluzione.* Sia $K > 0$, allora sappiamo che $\lim_{n\to\infty} \dfrac{K^n}{n!} = 0$. Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n_\varepsilon$ si abbia $\dfrac{K^n}{n!} < \varepsilon$. In particolare per $\varepsilon = 1$ esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ per cui per $n > n_1$ sia $\dfrac{K^n}{n!} < 1$. Questo accade se e solo se per $n > n_1$ è $n! > K^n$ ovvero se per $n > n_1$ è $\sqrt[n]{n!} > K$. Dalla scelta arbitraria di $K > 0$ segue allora che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty\ .$$ ■

Esercizio 2.8. *Dimostrare che*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0\ .$$

■ *Soluzione.* Sappiamo che per $n \geq 6$ è $2^n n! < n^n$; allora

$$0 < \frac{n!}{n^n} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

e pertanto l'asserto segue dal teorema dei due carabinieri. ■

Esercizio 2.9. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\ .$$

■ *Soluzione.* Basta scrivere

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

da cui si ricava che

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0\ .$$ ■

Esercizio 2.10. *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione divergente a* $+\infty$*. Se* $b > 1$ *dimostrare che*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b^{a_n}} = 0\ .$$

■ *Soluzione.* Senza perdere di generalità, si può supporre che sia $a_n > 1$, cosicché la parte intera $[a_n] \geq 1$. Di conseguenza

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[a_n]}{b^{[a_n]}} = 0\ .$$

Poiché

$$\frac{[a_n]}{b^{[a_n]+1}} \leq \frac{a_n}{b^{a_n}} \leq \frac{[a_n]+1}{b^{[a_n]}}\ ,$$

passando al limite per n tendente all'infinito, dal teorema dei due carabinieri si ha la tesi.

Da questo segue anche che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^\beta}{b^{a_n}} = 0$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. ■

Esercizio 2.11. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha} \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha (\log n)^\beta}{a^n} \ ,$$

per $a > 1$, $\alpha, \beta > 0$.

■ *Soluzione.* Per il primo limite, posto $a_n = \log n$, si ha che $n = e^{a_n}$ e dunque, dall'esercizio precedente, segue che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^\beta}{(e^\alpha)^{a_n}} = 0 \ .$$

Per il secondo limite, posto $a^n = \left((\sqrt{a})^n\right)^2$, siccome $\sqrt{a} > 1$, si ha

$$\frac{n^\alpha (\log\, n)^\beta}{a^n} = \frac{n^\alpha}{(\sqrt{a})^n} \, \frac{(\log\, n)^\beta}{(\sqrt{a})^n} = \frac{n^\alpha}{(\sqrt{a})^n} \, \frac{(\log\, n)^\beta}{n} \, \frac{n}{(\sqrt{a})^n}$$

e ciascun fattore è il termine generale di una successione convergente a 0. ■

Esercizio 2.12. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \ .$$

■ *Soluzione.* Osserviamo che

$$\left| \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \right| \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, si abbia $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Allora per $n > n_\varepsilon$, è $\left| \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon$, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0 \ .$$ ■

Esercizio 2.13. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 3) \ .$$

Esercizio 2.14. *Sia* $r \in \mathbb{Q}$ *e* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione per cui* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+a_n)^r - 1}{a_n} = r \ .$$

■ *Soluzione.* Per $r = 0$ è banalmente vero. Per $r = p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ si ha

$$(1+a_n)^p - 1 = a_n \sum_{k=0}^{p-1} (1+a_n)^k \quad \Longrightarrow \quad \frac{(1+a_n)^p - 1}{a_n} = \sum_{k=0}^{p-1} (1+a_n)^k$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+a_n)^p-1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{p-1}(1+a_n)^k=\sum_{k=0}^{p-1}\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^k=\sum_{k=0}^{p-1}1=p\ .$$

Per $r\in\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, posto $r=-p$, $p\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+a_n)^{-p}-1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+a_n)^p}{a_n(1+a_n)^p}=$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{(1+a_n)^p-1}{a_n(1+a_n)^p}=-\left(\lim_{n\to\infty}\frac{(1+a_n)^p-1}{a_n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+a_n)^p}\right)=-p\ .$$

Per $r\in\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$, poniamo $r=\dfrac{p}{q}$ con $p,q\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, p e q primi fra loro; senza perdere di generalità, possiamo assumere $p>0$. Si ha

$$\frac{(1+a_n)^{p/q}-1}{a_n}=\frac{\left[(1+a_n)^{1/q}\right]^p-1}{(1+a_n)^{1/q}-1}\cdot\frac{(1+a_n)^{1/q}-1}{a_n}$$

dove

$$\left[(1+a_n)^{1/q}\right]^p-1=\left[(1+a_n)^{1/q}-1\right]\sum_{k=0}^{p-1}(1+a_n)^{k/p}\ ,$$

quindi

$$\frac{(1+a_n)^{p/q}-1}{a_n}=\frac{(1+a_n)^{1/q}-1}{a_n}\ \sum_{k=0}^{p-1}(1+a_n)^{k/p}\ . \tag{2.1}$$

Scriviamo $a_n=1+a_n-1=\left[(1+a_n)^{1/q}\right]^q-1$.

Se $q>0$ allora

$$a_n=[(1+a_n)^{1/q}-1]\sum_{k=0}^{q-1}(1+a_n)^{k/q}\ .$$

Se invece $q<0$, posto $q=-m$, $m>0$, si ha

$$a_n=[(1+a_n)^{1/m}]^m-1=[(1+a_n)^{1/m}-1]\sum_{k=0}^{m-1}(1+a_n)^{k/m}=$$

$$=[(1+a_n)^{-1/q}-1]\sum_{k=0}^{-q-1}(1+a_n)^{-k/q}=\frac{1-(1+a_n)^{1/q}}{(1+a_n)^{1/q}}\ \sum_{k=0}^{-q-1}(1+a_n)^{-k/q}$$

i.e.

$$a_n=-\frac{(1+a_n)^{1/q}-1}{(1+a_n)^{1/q}}\ \sum_{k=0}^{-q-1}(1+a_n)^{-k/q}\ .$$

Ne segue che

$$\frac{(1+a_n)^{p/q}-1}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(1+a_n)^{k/q}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1}(1+a_n)^{k/q}} & , \quad q>0 \\[4ex] -(1+a_n)^{1/q}\ \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(1+a_n)^{k/p}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{-q-1}(1+a_n)^{-k/q}} & , \quad q<0\ . \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+a_n)^{p/q}-1}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1}1} = \dfrac{p}{q} & , \quad q>0 \\[4ex] -\dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{-q-1}1} = -\dfrac{p}{(-q)} = \dfrac{p}{q} & , \quad q<0\ . \end{cases}$$

In ogni caso

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+a_n)^{p/q}-1}{a_n} = \frac{p}{q}\ . \qquad \blacksquare$$

Osservazione 2.3. Più in generale per $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+a_n)^{\alpha}-1}{a_n} = \alpha\ .$$

Esercizio 2.15. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\ .$$

■ *Soluzione.* Poiché $1-\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{k^2-1}{k^2} = \dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2}$, si ha

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\dots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2} = \frac{n+1}{2n}$$

e pertanto

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\ . \qquad \blacksquare$$

Esercizio 2.16. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}\right) .$$

■ *Soluzione.* Si ha

$$\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} ,$$

inoltre $(k+1)^2-(k+1)+1=k^2+k+1$ e dunque

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}\right)=$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)}{3\cdot\cdots\cdot(n+1)}\cdot\frac{3^2-3+1}{2^2-2+1}\cdot\frac{4^2-4+1}{3^2-3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{n^2-n+1}=$$

$$=\frac{2(n-1)![(n+1)^2-(n+1)+1]}{3(n+1)!}=\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)} .$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}\right)=\frac{2}{3} .$$ ■

Esercizio 2.17. *Sia $a\in\mathbb{R}$, $|a|<1$. Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a^k .$$

■ *Soluzione.* Dal fatto che

$$1-a^{n+1}=(1-a)\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}=(1-a)(a^n+a^{n-1}+\cdots+a+1)=(1-a)\sum_{k=0}^{n}a^k$$

segue che $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a^k=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ e siccome $|a|<1$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a^k\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-a}=\frac{1}{1-a} .$$ ■

Si noti che questo fatto permette di dire che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a^n$$

detta *serie geometrica di ragione a*, converge per $|a|<1$ ed ha somma $S=\dfrac{1}{1-a}$ ovvero

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a^n=\frac{1}{1-a}\quad , \quad |a|<1 \tag{2.2}$$

mentre diverge per $|a|\geq 1$. ■

Esercizio 2.18. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right) .$$

■ *Soluzione.* Si noti che per ogni $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ è

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} ,$$

pertanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right) = 1 .$$ ■

Si noti che questo fatto permette di dire che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

detta *serie di Mengoli* converge ed ha somma 1.

Esercizio 2.19. *Verificare che la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$$

converge.

■ *Soluzione.* Poiché $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$, segue che per $\varepsilon = 1$ si ha che esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n_1$, sia $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e dal criterio del confronto, poiché la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge, si ottiene la convergenza della serie proposta. ■

La serie convergente

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} \tag{2.3}$$

si chiama *serie esponenziale* e la sua somma si chiama il *numero di Nepero* che si indica con e, ovvero

$$e := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} .$$ ■

Esercizio 2.20. *Provare che la successione*

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}$$

è strettamente crescente.

■ *Soluzione.* Osserviamo dapprima che

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)n!}{k!(n-k+1)(n-k)!} = \frac{n+1}{n-k+1}\binom{n}{k}$$

da cui

$$\binom{n}{k} = \frac{n+1-k}{n+1}\binom{n+1}{k} \quad \Longrightarrow \quad \binom{n}{k} = \left(1-\frac{k}{n+1}\right)\binom{n+1}{k}.$$

Siccome $-\dfrac{1}{n+1} > -1$, si ha che

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1-\frac{k}{n+1}$$

e quindi

$$\binom{n}{k} \leq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k \binom{n+1}{k}$$

ovvero

$$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \binom{n+1}{k}$$

cioè

$$\binom{n+1}{k} \geq \frac{(n+1)^k}{n^k}\binom{n}{k}.$$

Allora

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} + \binom{n+1}{n+1}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} >$$

$$> \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)^k}{n^k}\binom{n}{k}\frac{1}{(n+1)^k} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

cioè $a_{n+1} > a_n$. ■

Esercizio 2.21. *Dimostrare che*[1]

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

[1] E. Giusti, *Analisi Matematica I*, Bollati Boringhieri, Torino 1988, pp. 76-77

■ *Soluzione*. Dallo sviluppo del binomio di Newton si ha:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\ \frac{1}{n^k} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{n^k(n-k)!}$$

cioè

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\ . \tag{2.4}$$

Se s_n è la somma parziale n-esima della serie esponenziale allora $e = \lim_{n\to\infty} s_n$. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$ si ha $e - \varepsilon < s_m < e + \varepsilon$.
Dalla (2.4) si ottiene

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = s_m > e - \varepsilon\ .$$

Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ è

$$\sup_n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > e - \varepsilon$$

che, dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, dà

$$\sup_n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \geq e \iff \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq e\ .$$

D'altra parte

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\ \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!}$$

per cui dalla (2.4)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n\ .$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sup_n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \leq \sup_n\{s_n\} = e\ .$$

Allora

$$e \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \iff \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\ .$$ ■

Esercizio 2.22. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\ .$$

■ *Soluzione.* Si ha che

$$1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}=\frac{1}{\dfrac{n}{n-1}}=\frac{1}{\dfrac{n-1+1}{n-1}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{n-1}}\ ,$$

di conseguenza si scrive

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)}$$

e tenuto conto dell'osservazione precedente, si ha che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n-1}}\right)=\frac{1}{e}\ .$$ ■

Esercizio 2.23. *Sia $r\in\mathbb{Q}$, $r>0$. Provare che*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{rn}\right)^{rn}=e\ .$$

■ *Soluzione.* Dal fatto che $0\le[rn]\le rn\le[rn]+1$, si ha

$$\left(1+\frac{1}{[rn]+1}\right)^{[rn]}\le\left(1+\frac{1}{rn}\right)^{[rn]}\le\left(1+\frac{1}{rn}\right)^{rn}\le$$

$$\le\left(1+\frac{1}{rn}\right)^{[rn]+1}\le\left(1+\frac{1}{[rn]}\right)^{[rn]+1}\ ,$$

inoltre, poiché $[rn]=m\in\mathbb{N}$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{[rn]+1}\right)^{[rn]}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1+\dfrac{1}{m+1}}=e\ ,$$

e anche

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{[rn]}\right)^{[rn]+1}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\left(1+\frac{1}{m}\right)=e\ .$$

Dal teorema dei due carabinieri, si ha la tesi. ■

Esercizio 2.24. *Provare che il numero di Nepero e è un numero irrazionale e che $2<e<3$.*

■ *Soluzione.* Poichè $e=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, $e=\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{s_n\}$, s_n somma parziale n-sima della serie esponenziale. Si ha

$$e \geq s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} > 2$$

Per provare che e è un numero irrazionale, seguiremo la *dimostrazione di Fourier*.
Per assurdo si supponga che $e \in \mathbb{Q}$, i.e. $e = \dfrac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geq 1$ perchè $e > 0$.
Fissiamo $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > q \geq 1$: allora $n_0 \geq 2$ e

$$n_0! = 1 \cdots (q-1)q(q+1) \cdots n_0$$

per cui

$$\frac{n_0!}{q} = 1 \cdots (q-1)(q+1) \cdots n_0 = m_0 \in \mathbb{N} \, .$$

Inoltre se $n > n_0$ allora $s_n > s_{n_0}$, dunque $e \geq s_n > s_{n_0}$. Ne segue che

$$0 < n_0! \, (e - s_{n_0}) = n_0! \left(\frac{p}{q} - s_{n_0} \right) = p \, \frac{n_0!}{q} - n_0! \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} =$$

$$= p \, m_0 - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{n_0!}{k!} \, .$$

dove, poiché $0 \leq k \leq n_0$, è $\dfrac{n_0!}{k!} = (k+1) \cdots n_0 \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Quindi da

$$p \, m_0 - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{n_0!}{k!} > 0$$

segue che

$$n_0! \, (e - s_{n_0}) \in \mathbb{N} \quad \text{ e } \quad n_0! \, (e - s_{n_0}) \geq 1$$

Ora per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$s_{n_0+n} = s_{n_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n_0+k)!} = s_{n_0} + \sigma_n \quad , \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n_0+k)!}$$

σ_n essendo la somma parziale n-sima della serie a temini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n_0+n)!} \, .$$

Allora $\sigma_n = s_{n_0+n} - s_{n_0}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, perciò

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \lim_{n \to \infty} (s_{n_0+n} - s_{n_0}) = e - s_{n_0} \, .$$

Inoltre

$$n_0! \, \sigma_n = n_0! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n_0+k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n_0!}{(n_0+k)!} =$$

$$= \frac{n_0!}{(n_0+1)!} + \frac{n_0!}{(n_0+2)!} + \cdots + \frac{n_0!}{(n_0+n)!} =$$

$$= \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{(n_0+1)(n_0+2)} + \cdots + \frac{1}{(n_0+1) \cdots (n_0+n)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n_0+1)(n_0+2)+\cdots+(n_0+k)}$$

dove

$$\underbrace{(n_0+1)(n_0+2)\cdots(n_0+k)}_{k-\text{fattori}} \geq (n_0+1)^k$$

perciò

$$n_0!\,\sigma_n \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n_0+1}\right)^k = \tau_n\ ,$$

τ_n somma parziale n-esima della serie geometrica a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0+1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0+1}\right)^n - 1$$

che converge a

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{n_0+1}} - 1 = \frac{n_0+1}{n_0} - 1 = \frac{1}{n_0}\ .$$

Pertanto $\tau_n \leq \dfrac{1}{n_0}$ per cui $n_0!\,\sigma_n \leq \dfrac{1}{n_0}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, che implica

$$\lim_{n\to\infty} (n_0!\,\sigma_n) \leq \frac{1}{n_0}\ .$$

In definitiva

$$1 \leq n_0!\,(e - s_{n_0}) = n_0! \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (n_0!\,\sigma_n) \leq \frac{1}{n_0} \leq \frac{1}{2}$$

che è assurdo. Di conseguenza $e \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Abbiamo già visto che $e > 2$. Proveremo che $e < 3$. Siccome per $k \geq 1$,

$$k! = 1\cdot 2\cdot 3\ \cdots\ k = \underbrace{2\cdot 3\ \cdots\ k}_{(k-1)-\text{fattori}} \geq 2^{k-1}$$

si ha

$$s_n < s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} =$$

$$\underset{k-1=h}{=} 1 + \sum_{h=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^h = 1 + \sigma_n$$

per σ_n somma parziale n-sima della serie geometrica a termini positivi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ che ha somma $\sigma = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$. Allora

$$e = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{s_n\} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \{1+\sigma_n\} = 1 + \sup_{n\in\mathbb{N}} \{\sigma_n\} = 1 + 2 = 3$$

cioè risulterebbe $e \leq 3$, ma essendo $e \notin \mathbb{Q}$, si ha $e < 3$. ■

Esercizio 2.25. *Calcolare i seguenti limiti di successioni*

$$(\mathbf{1})\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n - \cos n^2}{n^2 - n + 6} \quad , \quad (\mathbf{2})\quad \lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

■ *Soluzione di* (**1**). Poiché

$$\left|\frac{\sin n - \cos n^2}{n^2 - n + 6}\right| \leq \frac{|\sin n| + |\cos n^2|}{n^2 - n + 6} \leq \frac{2}{n^2 - n + 6}$$

e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 - n + 6} = 0$ segue che

$$\left|\frac{\sin n - \cos n^2}{n^2 - n + 6}\right| \leq \frac{2}{n^2 - n + 6} < \varepsilon$$

per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, per un certo $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$. Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n - \cos n^2}{n^2 - n + 6} = 0 .$$

Soluzione di (**2**). Poiché $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \log e = 1 .$$

■

Esercizio 2.26. *Calcolare i seguenti limiti di successioni*

$$(\mathbf{1})\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^n}{n!} \quad , \quad (\mathbf{2})\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{3} - \sqrt[n]{n}} .$$

■ *Soluzione di* (**1**). Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^n}{n!} = (\lim_{n\to\infty} 2^n)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}\right) = +\infty .$$

Soluzione di (**2**). Poiché $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ e $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{3} - \sqrt[n]{n}} = +\infty .$$

■

Esercizio 2.27.

$$(\mathbf{1})\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n} + 2}{\sqrt{3} - \sqrt[n]{n}} \quad , \quad (\mathbf{2})\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{2n}} .$$

■ *Soluzione di* (**1**). Poiché $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n} + 2}{\sqrt{3} - \sqrt[n]{n}} = \frac{3}{\sqrt{3} - 1} .$$

Soluzione di **(2)**. Il limite si presenta nella forma indeterminata "$\frac{\infty}{\infty}$". Proponiamo due diversi modi per risolverlo. Per via algebrica:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-4}{\sqrt{2}-\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(1-\dfrac{4}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-1\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\dfrac{4}{\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

perché $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. In altro modo notando che sia il numeratore che il denominatore sono infiniti di ordine $\frac{1}{2}$, si ottiene che il limite è il rapporto dei coefficienti di $\sqrt{n}$, cioè

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-4}{\sqrt{2}-\sqrt{2n}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \,. \qquad \blacksquare$$

Esercizio 2.28. *Calcolare i seguenti limiti*

$$(\mathbf{1}) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/4}+n^{1/5}+2}{n^{2/3}-n^{1/3}+3} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n \,.$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il limite si presenta nella forma indeterminata "$\frac{\infty}{\infty}$". Anche in questo caso mostriamo due diversi modi per risolverlo. Per via algebrica si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/4}+n^{1/5}+2}{n^{2/3}-n^{1/3}+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/4}\left(1+\dfrac{1}{n^{1/20}}+\dfrac{2}{n^{1/4}}\right)}{n^{2/3}\left(1-\dfrac{1}{n^{1/3}}+\dfrac{1}{n^{2/3}}\right)} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{1}{n^{1/20}}+\dfrac{2}{n^{1/4}}}{1-\dfrac{1}{n^{1/3}}+\dfrac{3}{n^{2/3}}}\right) = 0 \cdot 1 = 0 \,.$$

In altro modo, tenuto conto che il numeratore è un infinito di ordine $\frac{1}{4}$, il denominatore è un infinito di ordine $\frac{2}{3}$ e che $\frac{2}{3} > \frac{1}{4}$, è immediato che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/4}+n^{1/5}+2}{n^{2/3}-n^{1/3}+3} = 0 \,.$$

Soluzione di **(2)**. Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 0 \cdot e = 0 \,. \qquad \blacksquare$$

Esercizio 2.29. *Calcolare i limiti*

$$(\mathbf{1})\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{2n} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{n} .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{\frac{2}{3}\cdot 3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{2/3} = e^{-2/3} .$$

Soluzione di **(2)**. Anche qui si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} 2^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n/2} =$$

$$= (\lim_{n\to\infty} 2^n)\left(\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{1/2}\right) = +\infty$$

perché

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{1/2} = \sqrt{e} .$$ ■

Esercizio 2.30. *Calcolare i seguenti limiti*

$$(\mathbf{1})\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5n}\right)^{n} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{an}\right)^{n} \quad , \quad a\in\mathbb{Z} .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{\frac{5}{3}n}\right)^{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}n} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{5}{3}n}\right)^{\frac{5}{3}n}\right)^{3/5}\right) = 0\cdot e^{3/5} = 0 .$$

Soluzione di **(2)**. Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{an}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{an}\right)^{an}\right)^{1/a} = e^{1/a} .$$ ■

Esercizio 2.31. *Provare che*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2} = 0 .$$

■ *Soluzione.* Posto $a_n = \dfrac{n^n}{n!^2}$ per $n \neq 0$, si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!^2}\,\frac{(n!)^2}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{(n+1)^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1} \leq \frac{e}{n+1} < 1$$

per $n \geq [e-1]+1 = 2$; per $n = 1$ si ha $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{2^2}{2^2} = 1$ da cui $a_1 \leq a_2$. Pertanto la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e quindi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$. Siccome $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, è $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\} \geq 0$ per cui $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$.
Sia $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, allora

$$0 \leq a_{n+1} \leq a_n \,\frac{e}{n+1}$$

e passando al limite per $n \to \infty$ si ha

$$0 \leq \ell \leq \ell \cdot 0 = 0 \ \text{ ovvero } \ \ell = 0\ .$$ ■

Definizione 2.1. Una successione si dice *regolare* se ammette limite (finito o infinito).

Esercizio 2.32. *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione regolare. Dimostrare che anche la successione $\{\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}\}_{n\geq 1}$ è regolare e che*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n\ .$$

■ *Soluzione.* (I) Supponiamo che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$; posto $b_n = a_n - \ell$ si ha che $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ e poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1+\cdots+b_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n-n\ell}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} - \ell\right)$$

basta provare che $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_1+\cdots+b_n}{n} = 0$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n'_\varepsilon$ sia $|b_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; inoltre $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata per cui esiste $L > 0$ tale che $|b_n| \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$\left|\frac{b_1+\cdots+b_n}{n}\right| \leq \frac{|b_1|}{n} + \cdots + \frac{|b_{n'_\varepsilon}|}{n} + \frac{|b_{n'_\varepsilon+1}|+\cdots+|b_n|}{n} <$$
$$< \frac{n'_\varepsilon}{n}\,L + \frac{n-n'_\varepsilon}{n}\,\frac{\varepsilon}{2} < \frac{n'_\varepsilon}{n}\,L + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

per $\dfrac{n'_\varepsilon}{n}L < \dfrac{\varepsilon}{2}$, i. e. per $n > n_\varepsilon = [\dfrac{2Ln'_\varepsilon}{\varepsilon}] + 1$.

(II) Se invece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ allora per ogni $M > 0$ esiste $n'_M \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n'_M$ sia $a_n > M$. Pertanto è anche $a_n > M$ per $n > 2n'_M$ e

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = \frac{a_1+\cdots+a_{n'_M}}{n} + \frac{a_{n'_M+1}+\cdots+a_n}{n} >$$
$$> -\frac{|a_1+\cdots+a_{n'_M}|}{n} + \frac{n-n'_M}{n}\,M\ .$$

Sia $L_M = |a_1 + \cdots + a_{n'_M}|$. Poiché $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{L_M}{n} = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n_\varepsilon$ sia $\dfrac{L_M}{n} < \varepsilon$. Sia $n_M = \max\{n'_M, n_\varepsilon\}$, allora per $n > 2n_M$ è

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} > -\varepsilon + \frac{n - n_M}{n}\, M \ .$$

Ora

$$\frac{n - n_M}{n} = \frac{2n - 2n_M}{2n} = \frac{n + (n - 2n_M)}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \ .$$

Per $K > 0$ prendiamo $M = 4K$, $\varepsilon = K$ e $n_K = 2n_M$: avremo che per $n > n_K$ è

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} > -K + \frac{1}{2}\, 4K = K$$

ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = +\infty = \lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

(III) Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ allora $\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = +\infty$, dunque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{(-a_1) + \cdots + (-a_n)}{n} =$$
$$= -\lim_{n\to\infty} (-a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \ . \qquad \blacksquare$$

Il numero

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

si chiama *media aritmetica* dei numeri $a_1, \cdots, a_n$.

Esercizio 2.33. *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri non negativi regolare. Dimostrare che anche la successione $\{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}\}_{n\geq 1}$ è regolare e che*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

$\blacksquare$ *Soluzione.* (I) Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n'_\varepsilon$ si abbia $|a_n| = a_n < \dfrac{2}{3}\,\varepsilon$, cosicché

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} < \frac{2}{3}\ \varepsilon\ \sqrt[n]{\frac{3^{n'_\varepsilon}\, a_1 \cdots a_{n'_\varepsilon}}{(2\varepsilon)^{n'_\varepsilon}}} \ .$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n'_\varepsilon}\, a_1 \cdots a_{n'_\varepsilon}}{(2\varepsilon)^{n_\varepsilon}}} = 1$$

allora esisterà $n'' \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n''$ si abbia

$$\left| \sqrt[n]{\frac{3^{n'_\varepsilon}\, a_1 \cdots a_{n'_\varepsilon}}{(2\varepsilon)^{n_\varepsilon}}} - 1 \right| < \frac{1}{2}$$

cosicché per $n > n''$ è

$$\sqrt[n]{\frac{3^{n'_\varepsilon}\, a_1 \cdots a_{n'_\varepsilon}}{(2\varepsilon)^{n_\varepsilon}}} < \frac{3}{2} \ .$$

Sia $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''\}$, allora per $n > n_\varepsilon$ si ha

$$-\varepsilon < 0 \le \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} < \frac{2}{3}\,\varepsilon\,\sqrt[n]{\frac{3^{n'_\varepsilon}\,a_1 \cdots a_{n'_\varepsilon}}{(2\varepsilon)^{n'_\varepsilon}}} < \varepsilon$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = 0 = \lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

(II) Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \ne 0$ allora posto $b_n = \dfrac{a_n}{\ell}$ si ha $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}{\ell} \ .$$

Se proviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}{\ell} = 1 \quad \text{ovvero} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \ell = \lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

Poiché $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, per ogni $\sigma > 0$ esiste $n'_\sigma \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n'_\sigma$ sia $|b_n - 1| < \sigma$ i.e.

$$1 - \sigma < b_n < 1 + \sigma$$

da cui

$$(1-\sigma)^n \le (1-\sigma)^{n-n'_\sigma} < b_{n'_\sigma+1} \cdots b_n < (1+\sigma)^{n-n'_\sigma} \le (1+\sigma)^n$$

e quindi

$$1 - \sigma < \sqrt[n]{b_{n'_\sigma+1} \cdots b_n} < 1 + \sigma \ .$$

D'altra parte $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdots b_{n'_\sigma}} = 1$, pertanto in corrispondenza a σ esiste $n''_\sigma \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n''_\sigma$ sia

$$1 - \sigma < \sqrt[n]{b_1 \cdots b_{n'_\sigma}} < 1 + \sigma \ .$$

Quindi posto $n_\sigma = \max\{n'_\sigma, n''_\sigma\}$, per $n > n_\sigma$ si ha

$$(1-\sigma)^2 < \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} < (1+\sigma)^2$$

dove $(1-\sigma)^2 = 1 - 2\sigma + \sigma^2 > 1 - 2\sigma > 1 - 3\sigma$.
Sia $0 < \varepsilon < 3$ e si prenda $\sigma = \dfrac{\varepsilon}{3}$; allora $(1-\sigma)^2 > 1 - \varepsilon$ mentre (poiché $0 < \sigma < 1$) $(1+\sigma)^2 = 1 + 2\sigma + \sigma^2 < 1 + 3\sigma = 1 + \varepsilon$. Di conseguenza per $n > n_\sigma \equiv n_\varepsilon$ si ha

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} < 1 + \varepsilon \qquad \text{ovvero} \qquad \left| \sqrt[n]{b_0 \cdots b_n} - 1 \right| < \varepsilon \ .$$

Se invece $\varepsilon \ge 3$, si prenda $\sigma = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{3}} \ge 1$ cosicché $1 - \varepsilon = 1 - 3\sigma^2 \le 1 - 3\sigma$ mentre $(1+\sigma)^2 = 1 + 2\sigma + \sigma^2 < 1 + 3\sigma^2 = 1 + \varepsilon$ da cui per $n > n_\varepsilon$ si ha

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} < 1 + \varepsilon \qquad \text{ovvero} \qquad \left| \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} - 1 \right| < \varepsilon \ .$$

In ogni caso

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} = 1 \ .$$

(III) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ allora per ogni $K > 0$ esiste $n'_K \in \mathbb{N}$ per cui $a_n > 2K$ per $n > n'_K$, quindi

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} > \sqrt[n]{a_1 \cdots a_{n_K}} \cdot \sqrt[n]{(2K)^{n-n_K}} = \sqrt[n]{\frac{a_1 \cdots a_{n_K}}{(2K)^{n_K}}} \cdot 2K$$

dove $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_1 \cdots a_{n_K}}{(2K)^{n_K}}} = 1$. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon > 0$ tale che per $n > n_\varepsilon$ si abbia

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{\frac{a_1 \cdots a_{n_K}}{(2K)^{n_K}}} < 1 + \varepsilon \, .$$

In particolare per $\varepsilon = \frac{1}{2}$ esiste $n'' \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n''$ sia

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 \cdots a_{n_K})}{(2K)^{n_K}}} > \frac{1}{2} \, .$$

Si prenda $n_K = \max\{n'_K, n''\}$, allora per $n > n_K$ si ha

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} > \frac{2K}{2} \quad \text{ovvero} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = +\infty = \lim_{n\to\infty} a_n \, . \qquad \blacksquare$$

Il numero

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

è detto *media geometrica* dei numeri $a_1, \cdots, a_n$.

Esercizio 2.34. *Si provi che*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \, .$$

Esercizio 2.35. *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri positivi. Dimostrare che*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \, .$$

■ *Soluzione.* Si consideri la successione (di numeri positivi) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ così definita:

$$b_0 = a_0 \quad , \quad b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \text{per} \;\; n \geq 1 \, .$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_0 \cdots b_n} = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

dove

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_0 \cdots b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_0 \frac{a_1}{a_0} \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \, .$$

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \, . \qquad \blacksquare$$

Come applicazione dell'esercizio precedente svolgiamo il seguente

Esercizio 2.36. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\,.$$

■ *Soluzione.* Notiamo che

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\,,$$

quindi applicando il risultato dell'esercizio precedente si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{(n+1)^n(n+1)}\,\frac{n^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = \frac{1}{e}\,.$$ ■

Esercizio 2.37. *Siano $h,k \in \mathbb{N}$, $1 \le h \le k$. Dimostrare che*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{kn}{hn}} = \frac{k^k}{h^h(k-h)^{k-h}}$$

■ *Soluzione.* Posto

$$a_n = \binom{kn}{hn}$$

dall'Esercizio 2.33 si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{kn}{hn}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{k(n+1)}{h(n+1)}}{\binom{kn}{hn}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{kn+k}{hn+h}}{\binom{kn}{hn}}$$

dove

$$\binom{kn+k}{hn+h} = \frac{(kn+k)!}{(hn+h)!\,[(k-h)n+(k-h)]!}$$

$$= \frac{(kn)!\,(kn+1)\cdots(kn+k)}{(hn)!\,(hn+1)\cdots(hn+h)\,[(k-h)n]!\,[(k-h)n+1]\cdots[(k-h)n+(k-h)]}$$

Allora

$$\frac{\binom{kn+k}{hn+h}}{\binom{kn}{hn}} = \frac{(kn)!\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(kn+j)}{(hn)!\,[(k-h)n]!\displaystyle\prod_{j=1}^{h}(hn+j)\prod_{j=1}^{k-h}[(k-h)n+j]}\times$$

$$\times\frac{(hn)![(k-h)n]!}{(kn)!} =$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{k}(kn+j)}{\prod_{j=1}^{h}(hn+j)\prod_{j=1}^{k-h}[(k-h)n+j]}$$

Notiamo che, in quest'ultima frazione, il numeratore è il prodotto di k monomi in n di I grado e perciò è un polinomio in n di grado k; il denominatore è il prodotto di h monomi in n di I grado e di $k-h$ monomi in n di I grado, quindi è il prodotto di un polinomio in n di grado h e di un polinomio in n di grado $k-h$. Dunque il denominatore è un polinomio in n di grado k. Osserviamo poi che il coefficiente di n^k al numeratore è k^k, al denominatore è $h^h(k-h)^{k-h}$, perciò

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{kn}{hn}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\binom{kn+k}{hn+h}}{\binom{kn}{hn}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{k}(kn+j)}{\prod_{j=1}^{h}(hn+j)\prod_{j=1}^{k-h}[(k-h)n+j]} =$$

$$= \frac{k^k}{h^h(k-h)^{k-h}} \,. \qquad \blacksquare$$

Esercizio 2.38. *Dimostrare il seguente criterio*

Teorema (Cesàro-Stolz). *Sia* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione a termini positivi strettamente crescente e divergente. Allora per ogni successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *si ha*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \,.$$

Esercizio 2.39. *Verificare che le seguenti serie convergono e determinarne la somma:*

$$\textbf{(1)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+a)} \quad , \quad a\in\mathbb{N}\backslash\{0\} \,,$$

$$\textbf{(2)} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)(n+b)} \quad , \quad a,b\in\mathbb{N}\backslash\{0\},\ a\neq b \,.$$

$\blacksquare$ *Soluzione di* **(1)**. La serie è convergente perché

$$n(n+a) > n^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n(n+a)} < \frac{1}{n^2}$$

e dal criterio del confronto segue quanto detto. Si decompone

$$\frac{1}{n(n+a)} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+a}\right)$$

cosicché la somma parziale n-sima è

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+a)} = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+a}\right) =$$

$$= \frac{1}{a}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \cdots - \frac{1}{k+a-1} + \frac{1}{k+a-1} - \frac{1}{k+a}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{a}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \right.$$

$$\left. + \cdots + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+a-1} - \frac{1}{k+a}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{a}\frac{1}{n+k}\right) .$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{a}\frac{1}{n+k}\right)$$

che dà la somma della serie

$$S = \frac{1}{a}\ \sum_{k=1}^{a}\frac{1}{k} .$$

Soluzione di **(2)**. Come in **(1)**, la serie è convergente perché

$$(n+a)(n+b) \geq n^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{(n+a)(n+b)} \leq \frac{1}{n^2} .$$

Per calcolarne la somma si decompone

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)} = \frac{A}{n+a} + \frac{B}{n+b}$$

determinando $A, B \in \mathbb{R}$ in modo che l'identità sia soddisfatta. Si ricava che $A = \dfrac{1}{b-a} = -B$ e quindi

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b}\right) .$$

Siamo allora ricondotti a trovare la somma della serie

$$\frac{1}{b-a}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b}\right) .$$

Senza perdere di generalità, si può supporre che sia $b > a$; sia s_n la somma parziale n-sima della serie $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b}\right)$ e poniamo $c = b - a \in \mathbb{N}$. Allora

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+b}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+a+c}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+a+1} + \frac{1}{k+a+1} - \frac{1}{k+a+2} + \frac{1}{k+a+2} - \right.$$

$$-\cdots-\frac{1}{k+a+c-1}+\frac{1}{k+a+c-1}-\frac{1}{k+a+c}\Big)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+a+1}\right)+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+a+1}-\frac{1}{k+a+2}\right)+$$

$$+\cdots+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+a+c-1}-\frac{1}{k+a+c}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{n+a+1}\right)+\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{n+a+2}\right)+$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{a+c-1}-\frac{1}{n+a+c}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\cdots+\frac{1}{a+c-1}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{n+a+1}+\frac{1}{n+a+2}+\cdots+\frac{1}{n+a+c}\right)$$

e da questo segue che la somma della serie

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+a)(n+b)}$$

è

$$S=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{c-1}\frac{1}{a+k}=\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{b-a-1}\frac{1}{a+k}$$

ovvero
(2.5)

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+a)(n+b)}=\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{b-a-1}\frac{1}{a+k}\ .$$ ■

Esercizio 2.40. *Verificare l'eventuale convergenza delle serie*

$$(\mathbf{1})\quad\sum_{n\geq 1}\frac{e^{-n^2}}{n}\quad,\quad(\mathbf{2})\quad\sum_{n\geq 1}\frac{e^{-n}}{n^p}\quad,\quad p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Poiché $n\geq 1$, si ha:

$$\frac{1}{ne^{n^2}}\leq\frac{1}{e^{n^2}}=\frac{1}{(e^n)^n}\ .$$

Ora $e^n\geq e$ per $n\geq 1$, dunque

$$\frac{1}{ne^{n^2}}\leq\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

e siccome la serie geometrica $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ converge, dal criterio del confronto converge anche la serie proposta.

Soluzione di **(2)**. Il termine generale della serie è $a_n = \dfrac{1}{n^p e^n}$, dunque la serie è a termini positivi e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p e^n} = 0$$

quindi ancora non si può dire niente sul comportamento della serie. Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^p e^n}{(n+1)^p e^{n+1}} = \frac{1}{e}\,\frac{n^p}{n^p\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p} = \frac{1}{e}\,\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p}$$

dove

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p > 1$$

quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{e} < 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e dal criterio del rapporto, la serie converge. ■

Esercizio 2.41. *Verificare l'eventuale convergenza delle seguenti serie numeriche*

$$(\mathbf{1}) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. La serie è a termini positivi e il termine generale è $a_n = \dfrac{3^n + 4^n}{5^n}$; si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right] = 0$$

che non permette di concludere nulla sul comportamento della serie. Tuttavia

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 1$$

per ogni intero $n \geq 1$, dunque

$$a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right] \leq 2\left(\frac{4}{5}\right)^n\ .$$

Poiché la serie geometrica $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ converge, dal criterio del confronto, converge anche la serie data.

Soluzione di **(2)**. Qui $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$ quindi la serie è a termini positivi con

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$$

che non permette di concludere sul comportamento della serie. Ora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1}$$

per $n \in \mathbb{N}$. È sempre possibile ad esempio avere

$$\frac{3}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

se $n \geq 5$. Pertanto per $n \geq 5$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{2} < 1$$

che, dal criterio del rapporto, dà la convergenza della serie data. ■

Esercizio 2.42. *Studiare il comportamento delle seguenti serie delle seguenti serie numeriche*

$$(\mathbf{1}) \ \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n^2} \quad , \quad (\mathbf{2}) \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{4^n} \ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il fatto che $\lim_{n\to\infty} 3^{-n^2} = 0$ non ci permette ancora di concludere niente sul comportamento della serie. Poiché $3^{n^2} \geq 3^n$ allora

$$3^{-n^2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e siccome la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge, dal criterio del confronto, la serie data converge.

Soluzione di **(2)**. Si noti che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{4^n} = 0$$

dunque ancora non possiamo concludere niente sul comportamento della serie.
Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^4}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n^4} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4$$

e se $n \geq 1$ è

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 < 2$$

da cui

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$$

che prova, dal criterio del rapporto, la convergenza della serie. ■

Esercizio 2.43. *Verificare l'eventuale divergenza delle seguenti serie numeriche*

$$(\mathbf{1}) \ \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} \quad , \quad (\mathbf{2}) \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

ancora non possiamo concludere niente sul comportamento di questa serie. Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

dove

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{e} \; .$$

Scelto $\varepsilon = \dfrac{1}{e}$, si ha che esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per $n > n_\varepsilon$, sia

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n < \frac{1}{e} < 1 \; ,$$

dunque, scelto $n \geq n_\varepsilon + 1$, dal criterio del rapporto, si conclude che la serie data converge.

Soluzione di **(2)**. La successione $\{\dfrac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ è decrescente e convergente a 0. Dal criterio di Leibnitz la serie data converge. ■

Esercizio 2.44. *Provare se le seguenti serie numeriche convergono*

$$(\mathbf{1}) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+2} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n-1} \; .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. La serie è a segni alterni; si osservi che

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \, \frac{n+1}{n^2+2} = 0$$

dunque non si può concludere niente sul comportamento della serie. D'altra parte, posto

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+2}$$

si ha $a_0 = \dfrac{1}{2}$, $a_1 = \dfrac{2}{3}$, quindi $a_0 < a_1$, mentre si verifica facilmente che $a_{n+1} < a_n$ per $n \geq 1$. In ogni caso la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è decrescente anche se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Non possiamo allora usare il criterio di Leibnitz. Tuttavia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+2}$$

dove adesso, per il criterio di Leibnitz, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+2}$$

converge. Pertanto la serie data converge.

Soluzione di **(2)**. Anche questa serie è a segni alterni. Qui

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n-1}$$

non esiste, pertanto la serie diverge. ■

Esercizio 2.45. *Determinare il comportamento delle seguenti serie numeriche*

$$(\mathbf{1})\ \sum_{n\geq 0}\frac{2}{\sqrt{n}+5} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{(n+1)(n^2+4)}\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. La serie data è a termini positivi e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2}{1+\dfrac{5}{\sqrt{n}}}\right)=0$$

quindi non si può ancora concludere niente circa il comportamento della serie. Si osservi però che per $n\to\infty$ il comportamento della successione $\{\frac{2}{\sqrt{n}+5}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è lo stesso della successione $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Allora

$$\frac{2}{\sqrt{n}+5}=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2}{1+\dfrac{5}{\sqrt{n}}}\right)$$

dove per $n\geq 1$

$$1+\frac{5}{\sqrt{n}}\leq 1+5=6\ ,$$

di conseguenza

$$\frac{2}{1+\dfrac{5}{\sqrt{n}}}\geq\frac{1}{3}\ .$$

Pertanto per $n\geq 1$

$$\frac{2}{\sqrt{n}+5}\geq\frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt{n}}$$

e la serie

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverge. Dal criterio del confronto la serie data diverge.

Soluzione di **(2)**. La serie data è a termini positivi e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(n+1)(n^2+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(\frac{3}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{4}{n^2}\right)}\right)=0$$

quindi il comportamento della successione $\{\frac{3}{(n+1)(n^2+4)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è come quello della successione $\{\frac{1}{n^3}\}_{n\geq 1}$. Si ha $1+\frac{1}{n}>1$, $1+\frac{4}{n^2}>1$ per $n\geq 1$, quindi

$$\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}<3\,.$$

Allora per $n\geq 1$ è

$$\frac{3}{(n+1)(n^2+4)}=\frac{1}{n^3}\left(\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}\right)<\frac{3}{n^3}$$

e siccome la serie $\sum_{n>0}\frac{1}{n^3}$ converge, converge anche la serie data. ■

Esercizio 2.46. *Verificare l'eventuale divergenza delle seguenti serie numeriche*

$$(\mathbf{1})\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{n^3}}{n^{3/2}}\quad,\quad(\mathbf{2})\ \sum_{n=0}^{+\infty}4\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\ .$$

■ *Soluzione.* Per le due serie (entrambe a termini positivi) si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n^3}}{n^{3/2}}=+\infty\quad,\quad\lim_{n\to\infty}4\frac{n+1}{n+2}=4$$

e questo basta per dire che le due serie divergono. ■

Esercizio 2.47. *Calcolare la somma delle serie*

$$(\mathbf{1})\ \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n!}\quad,\quad(\mathbf{2})\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{n!}\ .$$

■ *Soluzione.* Le serie sono entrambe assimilabili alla serie esponenziale (2.3) e precisamente:

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}-\left(1+1+\frac{1}{2}\right)=e-\frac{5}{2}$$

e

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{n!}=3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=3e\ .$$ ■

Esercizio 2.48. *Determinare, se possibile, la somma delle seguenti serie*

$$(\mathbf{1})\ \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n\quad,\quad(\mathbf{2})\ \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+3)}\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. La serie è assimilabile alla serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

che converge alla somma $S = \frac{3}{5}$ (cfr. (2.2)). Allora

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n - \left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{15}\ .$$

Soluzione di **(2)**. La serie è assimilabile alla serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$$

perché si scrive

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{15}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{21}{40}\right)\ .$$

Dall'Esercizio 2.39, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$ converge e ha somma (cfr. (2.5))

$$S = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\ .$$

Allora

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{2(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{21}{40}\right) = \frac{9}{80}\ .$$

• Si osservi che l'esercizio può essere risolto anche nel modo seguente.
Posto $m = n-3$, la serie si riscrive come

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2(m+4)(m+6)} = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+4)(m+6)}$$

che dunque ha somma

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{4+k}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) = \frac{9}{80}\ . \qquad \blacksquare$$

Per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ il *fattore binomiale* α *su* k è il numero reale non nullo $\binom{\alpha}{k}$ così definito:

$$\text{per } \ k = 0, \quad \binom{\alpha}{0} := 1$$

$$\text{per } \ k \geq 1, \quad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\,\cdots\,(\alpha-k+1)}{k!}\ .$$

Esercizio 2.49. *Sia $a \in \mathbb{R}$; provare che la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} a^n$$

è assolutamente convergente per $|a| < 1$.

■ *Soluzione.* Posto $b_n = \left| \binom{\alpha}{n} a^n \right|$ dobbiamo provare che la serie a termini non negativi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge per $|a| < 1$. Se $a = 0$, la serie è la serie nulla e dunque convergente. Sia dunque $a \neq 0$, cosicché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è a termini positivi e

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\left| \binom{\alpha}{n+1} a^{n+1} \right|}{\left| \binom{\alpha}{n} a^n \right|} = \frac{\left| \dfrac{\alpha(\alpha-1)\,\cdots\,\big(\alpha-(n+1)+2\big)\big(\alpha-(n+1)+1\big)}{(n+1)!} a^{n+1} \right|}{\left| \dfrac{\alpha(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-n+1)}{n!}\, a^n \right|} =$$

$$= \frac{|\alpha(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-n+1)(\alpha-n)|}{|\alpha(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-n+1)|}\, \frac{n!}{(n+1)!}\, |a| = \frac{|\alpha-n|}{n+1}\, |a|\ .$$

Perciò

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n|}{n+1}\, |a| = |a|$$

e se $|a| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge. ■

Esercizio 2.50. *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione positiva decrescente. Dimostrare che le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, a_{2^n}$ hanno lo stesso comportamento.*

■ *Soluzione.* Poiché $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, basta provare che le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, a_{2^n}$ hanno lo stesso carattere. Entrambe queste serie sono a termini positivi quindi le successioni delle loro somme parziali

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \quad \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k\, a_{2^k}$$

sono strettamente crescenti. Perciò

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\geq 1}\, \{s_n\} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sup_{n\geq 0}\, \{\sigma_n\}\ .$$

Proviamo, per induzione su $n \geq 0$, che

$$s_{2^{n+1}-1} \leq \sigma_n\ . \tag{2.6}$$

Infatti per $n = 0$

$$s_{2-1} = s_1 = a_1 = \sigma_0\ .$$

Ammessa vera la stima (2.6) per n, proviamola per $n+1$. Si ha

$$s_{2^{n+2}-1} = s_{2^{n+1}-1} + \underbrace{a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}+1} + \cdots + a_{2^{n+2}-1}}_{2^{n+1} \text{ addendi}} \leq s_{2^{n+1}-1} + 2^{n+1}\, a_{2^{n+1}} \leq$$

$$\leq \sigma_n + 2^{n+1}\, a_{2^{n+1}} = \sigma_{n+1} \; .$$

Dal principio di induzione matematica, la disuguaglianza (2.6) è dunque vera per ogni $n \geq 0$. Siccome $2^n > n$ per ogni $n \geq 1$, si ha $n < 2^{n+1} - 1$ per cui $s_n < s_{2^{n+1}-1}$ e la (2.6) dà

$$s_n < \sigma_n \quad , \quad n \geq 1 \; . \tag{2.7}$$

Proviamo ora, per induzione su $n \geq 1$,

$$\sigma_n < 2\, s_{2^n} \; . \tag{2.8}$$

Infatti, poiché $a_2 \leq a_1$, per $n = 1$ si ha

$$\sigma_1 = a_1 + 2\, a_2 = a_1 + a_2 + a_2 \leq 2\, a_1 + a_2 < 2\, a_1 + 2\, a_2 = 2\, s_2 \; .$$

Ammessa vera $\sigma_n < 2\, s_{2^n}$, per $n+1$ si ha

$$\sigma_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} 2^k\, a_{2^k} = \sigma_n + 2^{n+1}\, a_{2^{n+1}} < 2\, s_{2^n} + 2^{n+1}\, a_{2^{n+1}} =$$

$$= 2\, s_{2^n} + 2^{n+1} a_{2^{n+1}} - 2\, a_{2^{n+1}} + 2\, a_{2^{n+1}} = 2\, s_{2^n} + 2(2^n - 1) a_{2^{n+1}} + 2\, a_{2^{n+1}} \; .$$

Per $1 \leq k \leq 2^n - 1$ è

$$2^n + 1 \leq 2^n + k \leq 2^n + 2^n - 1 = 2\, 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1 < 2^{n+1} \; .$$

Perciò

$$a_{2^{n+1}} \leq a_{2^n + k} \quad , \quad 1 \leq k \leq 2^n - 1 \; .$$

Pertanto

$$2(2^n - 1) a_{2^{n+1}} = (2^n - 1)\big(a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}}\big) = \underbrace{\big(a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}}\big) + \cdots + \big(a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}}\big)}_{(2^n - 1) \text{ addendi}} \leq$$

$$\leq 2\, a_{2^n+1} + 2\, a_{2^n+2} + \cdots + 2\, a_{2^n+2^n-1} = 2\big(a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}\big) \; .$$

Ne segue che

$$\sigma_{n+1} < 2\, s_{2^n} + 2\big(a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}\big) + 2 a_{2^{n+1}} =$$

$$= 2\big(s_{2^n} + a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \cdots + a_{2^{n+1}}\big) = 2\, s_{2^{n+1}} \; .$$

Possiamo allora affermare, dal principio di induzione matematica, che la (2.8) vale per ogni $n \geq 1$. In definitiva, dalle (2.7) e (2.8), si ha

$$s_n < \sigma_n < 2\, s_{2^n} \quad , \quad n \geq 1 \; . \tag{2.9}$$

Se la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge allora $\sup_{n \geq 1} \{s_n\}$ è finito, di conseguenza è finito anche[2] $\sup_{n \geq 1} \{s_{2^n}\}$ il quale, dalla (2.9), implica che $\sup_{n \geq 1} \{\sigma_n\}$ è finito. Pertanto anche $\sup_{n \geq 0} \{\sigma_n\}$ è finito provando così la convergenza della serie $\sum_{n \geq 0} 2^n\, a_{2^n}$. Se invece la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge

[2] $\{s_{2^n}\}_{n \geq 0}$ è una sottosuccessione di $\{s_n\}_{n \geq 1}$.

allora $\sup\limits_{n\geq 1}\{s_n\} = +\infty$. Pertanto, dalla (2.9), anche $\sup\limits_{n\geq 1}\{\sigma_n\} = +\infty$ da cui risulta $\sup\limits_{n\geq 0}\{\sigma_n\} = +\infty$. Perciò la serie $\sum\limits_{n\geq 0} 2^n\, a_{2^n}$ diverge.

Viceversa se la serie $\sum\limits_{n\geq 0} 2^n\, a_{2^n}$ converge allora $\sup\limits_{n\geq 0}\{\sigma_n\}$ è finito, di conseguenza è finito anche $\sup\limits_{n\geq 1}\{\sigma_n\}$. Dalla (2.9) risulta finito $\sup\limits_{n\geq 1}\{s_n\}$ provando così la convergenza della serie $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$. Se invece la serie $\sum\limits_{n\geq 0} 2^n\, a_{2^n}$ diverge allora $\sup\limits_{n\geq 0}\{\sigma_n\} = +\infty$ da cui segue che $\sup\limits_{n\geq 1}\{\sigma_n\} = +\infty$ e, per la (2.9), è $\sup\limits_{n\geq 1}\{s_{2^n}\} = +\infty$. Se in tal caso la serie $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ convergesse, allora $\sup\limits_{n\geq 1}\{s_n\}$ sarebbe finito per cui sarebbe finito anche $\sup\limits_{n\geq 1}\{s_{2^n}\}$. Poiché questo è falso, risulta che la serie $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ diverge. ■

Esercizio 2.51. *Per $p, q > 0$ si consideri la serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \log^q n} \,.$$

Provare che

se $p = 1$ *allora la serie converge per* $q > 1$ *e diverge per* $0 < q \leq 1$,
se $0 < p < 1$ *allora la serie diverge,*
se $p > 1$ *allora la serie converge.*

■ *Soluzione.* Per $p = 1$ la serie è

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^q n}$$

e, dalla Proposizione dell'Esercizio 2.50, essa ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \log^q 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log 2^n)^q} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^q \log^q 2} = \frac{1}{\log^q 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^q}$$

la quale converge per $q > 1$ e diverge per $0 < q \leq 1$.

Per $0 < p < 1$ è $1 - p > 0$ per cui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^q n}{n^{1-p}} = 0 \,.$$

Perciò per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq n_\varepsilon$ si abbia $\left|\dfrac{\log^q n}{n^{1-p}}\right| = \dfrac{\log^q n}{n^{1-p}} < \varepsilon$.

Scelto allora $\varepsilon = 1$, esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che, per $n \geq n_1$, si abbia

$$\log^q n < n^{1-p}$$

da cui

$$\frac{1}{n^p \log^q n} > \frac{1}{n^p\, n^{1-p}} = \frac{1}{n} \qquad \text{per } n \geq n_1 \,.$$

Dal criterio del confronto segue che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \log^q n}$ diverge per $0 < p < 1$ per ogni $q > 0$.

Per $p > 1$, poiché $\log n \geq \log 2$, per ogni $q > 0$ si ha

$$\frac{1}{n^p \log^q n} \leq \frac{1}{\log^q 2} \frac{1}{n^p}$$

e poiché in tal caso la serie $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$ converge, si conclude che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \log^q n}$ converge per $p > 1$ per ogni $q > 0$. ■

3. Esercizi sui limiti di una funzione di una variabile reale

Esercizio 3.1. *Calcolare i seguenti limiti:*

$$(\mathbf{1})\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\cos\frac{1}{x}} \quad , \quad (\mathbf{2})\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\,\tan x\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Cambiando variabile e ponendo $y = \frac{1}{x}$ è $y \to 0^+$, dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\cos\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{\cos y} = +\infty\ .$$

Soluzione di **(2)**. Qui dobbiamo distinguere i due limiti laterali

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} x\tan x \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} x\tan x$$

avendo quindi

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} x = \frac{\pi}{2}\ ,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \quad \text{da cui} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} x\tan x = +\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} x = \frac{\pi}{2}\ ,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \quad \text{da cui} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} x\tan x = -\infty\ .$$

■

Esercizio 3.2. *Calcolare i seguenti limiti:*

$$(\mathbf{1})\quad \lim_{x\to 0^+} (\log x)^{x-3} \quad , \quad (\mathbf{2})\quad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x+2}\right)^{\log x}\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Si osservi che la funzione $(\log x)^{x-3}$ è definita per $\log x > 0$, cioè per $x > 1$. Dunque il limite proposto non ha senso.

Si osservi che invece sarebbe stata diversa la situazione di

$$\lim_{x\to 0^+} |\log x|^{x-3} = \lim_{x\to 0^+} e^{(x-3)\log|\log x|}$$

dove $\lim_{x\to 0^+} (x-3)\log|\log x| = -3 \lim_{x\to 0^+} \log|\log x| = -\infty$ da cui

$$\lim_{x\to 0^+} |\log x|^{x-3} = \lim_{x\to 0^+} e^{(x-3)\log|\log x|} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0\ .$$

Soluzione di **(2)**. Si noti dapprima che la funzione $\left(\frac{1}{x+2}\right)^{\log x}$ è definita per $x > 0$, inoltre

$$\left(\frac{1}{x+2}\right)^{\log x} = e^{(\log x)\cdot\log(x+2)^{-1}} = e^{-(\log x)[\log(x+2)]}$$

dove

$$\lim_{x\to 0^+} (\log x)[\log(x+2)] = -\infty\ .$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x+2}\right)^{\log x} = \lim_{x\to 0^+} e^{-(\log x)[\log(x+2)]} = \lim_{y\to-\infty} e^{-y} = +\infty\ .$$

■

Esercizio 3.3. *Calcolare i seguenti limiti:*

$$(\mathbf{1}) \quad \lim_{x\to+\infty} \log_x\left(e^{-x}+\frac{1}{2}\right) \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \lim_{x\to 2}\left[\sqrt{x^2-3x+2}\ -\frac{x}{x-2}\right] .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Poiché

$$\log_x\left(e^{-x}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\log\left(e^{-x}+\frac{1}{2}\right)}{\log x} ,$$

e $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left(e^{-x}+\frac{1}{2}\right)=\lim_{y\to 0}\log\left(y+\frac{1}{2}\right)=\log\frac{1}{2}$$

mentre

$$\lim_{x\to+\infty}\log x=+\infty .$$

Allora

$$\lim_{x\to+\infty}\log_x\left(e^{-x}+\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(e^{-x}+\frac{1}{2}\right)}{\log x}=0 .$$

Soluzione di **(2)**. La funzione $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$ è definita per $x^2-3x+2\geq 0$ cioè per $x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$; la funzione $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$ è definita per $x\neq 2$. Pertanto il limite proposto è in realtà

$$\lim_{x\to 2^+}\left[\sqrt{x^2-3x+2}-\frac{x}{x-2}\right] .$$

Si ha che $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x^2-3x+2}=0$ mentre, essendo $x-2>0$, è

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2}=+\infty .$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 2^+}\left[\sqrt{x^2-3x+2}-\frac{x}{x-2}\right]=-\infty .$$

■

Esercizio 3.4. *Calcolare i limiti*

$$(\mathbf{1}) \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{\log(2-x)}{-\log(x-1)} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \lim_{x\to 2^-}\frac{e^{2-x}}{2-x} .$$

■ *Soluzione di* **(1)**.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\log(2-x)}{-\log(x-1)}=-\lim_{x\to 1^+}\frac{\log(2-x)}{\log(x-1)}$$

dove

$$\lim_{x\to 1^+}\log(2-x)=\log 1=0 \quad , \quad \lim_{x\to 1^+}\log(x-1)=-\infty$$

per cui

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\log(2-x)}{-\log(x-1)}=-\lim_{x\to 1^+}\left(\log(2-x)\cdot\frac{1}{\log(x-1)}\right)=0 .$$

Soluzione di **(2)**. Cambiando variabile e ponendo $y = 2 - x$ è $y \to 0^+$ per $x \to 2^-$ e quindi

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{e^{2-x}}{2-x} = \lim_{y \to 0^+} \frac{e^y}{y} = +\infty \ . \qquad \blacksquare$$

Esercizio 3.5. *Calcolare i limiti:*

$$(\mathbf{1}) \quad \lim_{x \to 0^+} x^{\log^2 x} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \lim_{x \to +\infty} x^{4 \log 2x} \ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**.

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\log^2 x} = \lim_{x \to 0^+} e^{(\log^2 x)(\log x)} = \lim_{x \to 0^+} e^{\log^3 x}$$

dove $\lim\limits_{x \to 0^+} \log^3 x = -\infty$. Allora

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\log^3 x} = \lim_{y \to -\infty} e^y = 0 \ ,$$

quindi

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\log^2 x} = 0 \ .$$

Soluzione di **(2)**.

$$\lim_{x \to +\infty} x^{4 \log 2x} = \lim_{x \to +\infty} e^{4(\log 2x)(\log x)}$$

dove $\lim\limits_{x \to +\infty} (\log 2x)(\log x) = +\infty$, quindi

$$\lim_{x \to +\infty} e^{4(\log 2x)(\log x)} = \lim_{y \to +\infty} e^{4y} = +\infty$$

da cui

$$\lim_{x \to +\infty} x^{4 \log 2x} = +\infty \ . \qquad \blacksquare$$

Esercizio 3.6. *Calcolare i seguenti limiti:*

$$(\mathbf{1}) \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\cosh x} \ e^{\arctan \frac{1}{\sinh x}} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x + |x^2 - 2|}} \ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Si osservi che

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sinh x} = 0$$

quindi

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan \frac{1}{\sinh x} = \lim_{y \to 0} \arctan y = 0$$

da cui

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\arctan \frac{1}{\sinh x}} = \lim_{y \to 0} e^{\arctan y} = \lim_{z \to 0} e^z = 1$$

mentre

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\cosh x} = 0 \ .$$

Allora

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\cosh x} \ e^{\arctan \frac{1}{\sinh x}} = 0 \cdot 1 = 0 \ .$$

Soluzione di **(2)**.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+|x^2-2|}} = \frac{1}{\sqrt{|-2|}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ . \qquad \blacksquare$$

Esercizio 3.7. *Calcolare i seguenti limiti:*

$$(\mathbf{1}) \ \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+5x^2+2x-1}{2x^2} \quad , \quad (\mathbf{2}) \ \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{x-1} \ .$$

$\blacksquare$ *Soluzione di* **(1)**. Poiché $\lim\limits_{x\to\infty}(4x^3+5x^2+2x-1)=\infty$ ed è un infinito del terzo ordine, $\lim\limits_{x\to\infty} 2x^2=\infty$ ed è un infinito del primo ordine, si ha che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+5x^2+2x-1}{2x^2} = \infty$$

Soluzione di **(2)**. Poiché $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+1)=-\infty$ ed è un infinito del terzo ordine, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ ed è un infinito del primo ordine, si ha che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{x-1} = +\infty \ . \qquad \blacksquare$$

Esercizio 3.8. *Calcolare i seguenti limiti:*

$$(\mathbf{1}) \ \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} \quad , \quad (\mathbf{2}) \ \lim_{x\to 1} \frac{x+1-\sqrt{x}}{(x-1)^2} \ .$$

$\blacksquare$ *Soluzione di* **(1)**. Il limite ha senso per $x\to 2^+$, inoltre si presenta nella forma indeterminata "$\frac{0}{0}$". Razionalizzando sia il numeratore che il denominatore si ha

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} = \frac{(2-x)\sqrt{x-2}}{(x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x})} = -\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}}$$

e quindi

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} = -\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}} = 0 \ .$$

Soluzione di **(2)**. Poiché $\lim\limits_{x\to 1} x+1-\sqrt{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$ (con $(x-1)^2>0$) si ha che

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1-\sqrt{x}}{(x-1)^2} = +\infty \ . \qquad \blacksquare$$

Esercizio 3.9. *Calcolare i limiti:*

$$(\mathbf{1}) \ \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad , \quad (\mathbf{2}) \ \lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Poiché $\lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x} = +\infty$ ed è un infinito del primo ordine, $\lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$ ed è un infinito di ordine $\frac{1}{2}$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = +\infty\ .$$

Soluzione di **(2)**.

$$\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to0^+} e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

dove

$$\lim_{x\to0^+} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0^+}\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\log(1+y)}{y} = 0$$

perché il numeratore è un infinito di ordine $0<k<1$ (si noti anche che per $y\to+\infty$ è $\dfrac{\log(1+y)}{y} > 0$); quindi

$$\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z\to0^+} e^z = 1\ .$$ ■

Esercizio 3.10. *Calcolare i limiti:*

$$\textbf{(1)}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x}\quad ,\quad \textbf{(2)}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+4}{x^2-1}\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Si ha che $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x+1) = +\infty$, infinito del secondo ordine, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, infinito del primo ordine, quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x} = +\infty\ .$$

Soluzione di **(2)**. Si ha che $\lim_{x\to-\infty}(x^4+4) = +\infty$, infinito di ordine 4, $\lim_{x\to-\infty}(x^2-1) = +\infty$, infinito del secondo ordine, quindi

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+4}{x^2-1} = +\infty\ .$$ ■

Esercizio 3.11. *Calcolare i seguenti limiti:*

$$\textbf{(1)}\quad \lim_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{3}\,x+1}{\sqrt{2}\,x^2+\sqrt{5}\,x-(\sqrt{5}+\sqrt{2})}\quad ,\quad \textbf{(2)}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{-x^2+2x-5}\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Si ha che $\lim_{x\to1}(x^2-\sqrt{3}\,x+1) = 2-\sqrt{3}$, $\lim_{x\to1}[\sqrt{2}\,x^2+\sqrt{5}\,x-(\sqrt{5}+\sqrt{2})] = 0$ quindi

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{3}\,x+1}{\sqrt{2}\,x^2+\sqrt{5}\,x-(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \infty\ .$$

Soluzione di **(2)**. Si ha che $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}=+\infty$, infinito di ordine $\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+\infty}(-x^2+2x-5)=-\infty$, infinito del secondo ordine, quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{-x^2+2x-5}=0\ .$$

■

Esercizio 3.12. *Calcolare i limiti:*

$$(\mathbf{1})\quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}\quad,\quad(\mathbf{2})\quad\lim_{x\to2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{5x-1}}\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il limite si presenta nella forma indeterminata "$\frac{0}{0}$", tuttavia

$$\frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x+x^2}}=\frac{\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}\ .$$

Pertanto

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\ .$$

Soluzione di **(2)**. Il limite si presenta nella forma indeterminata "$\frac{0}{0}$". Razionalizzando il denominatore si ha

$$\frac{4-x^2}{3-\sqrt{5x-1}}=\frac{(2-x)(2+x)(3+\sqrt{5x-1})}{9-(5x-1)}=\frac{1}{5}\ (2+x)(3+\sqrt{5x-1})\ .$$

Allora

$$\lim_{x\to2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{5x-1}}=\frac{1}{5}\ \lim_{x\to2}(2+x)(3+\sqrt{5x-1})=\frac{36}{5}\ .$$

■

Esercizio 3.13. *Calcolare i seguenti limiti:*

$$(\mathbf{1})\quad\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}-7}{\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x}+5}\quad,\quad(\mathbf{2})\quad\lim_{x\to0^+}(\sin x)^{\tan x}\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il limite dato è ricondotto al calcolo del limite

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{3y^2-2y-7}{5y^2+6y+5}$$

dove $\lim_{y\to+\infty}(3y^2-2y-7)=+\infty$, infinito del secondo ordine, $\lim_{y\to+\infty}(5y^2+6y+5)=+\infty$, infinito anch'esso del secondo ordine. Quindi

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}-7}{\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x}+5}=\frac{3}{5}\ .$$

Soluzione di **(2)**.

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\tan x\,\log\sin x}$$

dove

$$\lim_{x\to 0^+}(\tan x)\log\sin x = \lim_{y\to 0^+}\frac{\sin x\,\log\sin x}{\cos x} =$$

$$= \left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos x}\right)\left(\lim_{x\to 0^+}\sin x\,\log\sin x\right) = \left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos x}\right)\left(\lim_{y\to 0^+}y\log y\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0^+}y\log y = \lim_{y\to 0^+}\frac{\log y}{\dfrac{1}{y}} = 0$$

perché al numeratore si ha un infinito di ordine $0 < k < 1$ e al denominatore si ha un infinito del primo ordine. Quindi

$$\lim_{x\to 0^+}(\tan x)\log\sin x = 0$$

con $(\tan x)\log\sin x < 0$. Allora

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\tan x\,\log\sin x} = \lim_{y\to 0^-} e^y = 1\ .$$

■

Esercizio 3.14. *Calcolare i limiti*

$$(\mathbf{1})\quad \lim_{x\to 0^+}\left(1+\sin^2 x\right)^{1/x^4} \quad , \quad (\mathbf{2})\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\sin^2 x\right)^{1/x^4} = \lim_{x\to 0^+} e^{(1/x^4)\log(1+\sin^2 x)}$$

dove

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+\sin^2 x)}{x^4} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}\,\frac{\sin^2 x}{x^4}$$

e

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\log(1+y)}{y} = 1\ ,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} = +\infty\ ,$$

quindi

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+\sin^2 x)}{x^4} = +\infty\ .$$

Allora

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\sin^2 x\right)^{1/x^4} = \lim_{y\to +\infty} e^y = +\infty\ .$$

Soluzione di **(2)**.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}\lim_{xto0}\frac{\sin 3x}{3x}\,\frac{2x}{\sin 2x}$$

dove

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x} = 1$$

quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2} \, .$$

Un altro modo per risolvere il limite proposto è notare che la funzione $\sin ax$ è un infinitesimo per $x \to 0$ del I ordine e precisamente si comporta come la funzione ax. Si può scrivere allora che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2} \, .$$

■

Esercizio 3.15. *Calcolare i seguenti limiti*

$$(\mathbf{1}) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \lim_{x\to 0} \frac{3x - \tan x}{\sin x + \tan^2 x} \, .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il calcolo diretto è

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) = 1 - 1 = 0 \, .$$

Soluzione di **(2)**. Sappiamo che la funzione $f(x) = \tan x$ per $x \to 0$ è un infinitesimo del I ordine e si comporta come la funzione x. Stessa cosa per la funzione $\sin x$. Allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x - \tan x}{\sin x + \tan^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x - x}{x + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1 + x} = 2 \, .$$

■

Esercizio 3.16. *Calcolare i seguenti limiti*

$$(\mathbf{1}) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \, \sin x \, \cos x} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} \, .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x \, \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin x \, \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x \sin x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2} \, .$$

Soluzione di **(2)**. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \, .$$

■

Esercizio 3.17. *Calcolare i limiti*

$$(\mathbf{1}) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \cos x - 1}{x} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)^2}{\cos x} \, .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Poiché la funzione $f(x) = 1 - \cos x$ è un infinitesimo del II ordine per $x \to 0$, è

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 1\ .$$

Soluzione di **(2)**. Posto $y = x - \frac{\pi}{2}$ è $y \to 0$ per $x \to \frac{\pi}{2}$, inoltre $\sin x = \cos y$, $\cos x = -\sin y$. Pertanto

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = -\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{\sin y}$$

dove le funzioni $f(y) = 1-\cos y$ e $f(y) = \sin y$ sono infinitesime per $y \to 0$ rispettivamente del II e del I ordine. Quindi

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = 0\ .$$

■

Esercizio 3.18. *Calcolare*

$$(\mathbf{1})\ \lim_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \lim_{x\to 0^+} (\log x - \log \sin x)\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Usando le formule di prostaferesi[3] e ponendo $y = x - a$ si ha

$$\lim_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a} = -2 \lim_{y\to 0} \frac{\sin \frac{y}{2}}{y} \cdot \lim_{y\to 0} \sin \frac{y+2a}{2} = -\sin a\ .$$

Soluzione di **(2)**. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} (\log x - \log \sin x) = \lim_{x\to 0^+} \log \frac{x}{\sin x}$$

e posto $y = \dfrac{x}{\sin x}$ è $y \to 1^+$ per $x \to 0^+$, dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \log \frac{x}{\sin x} = \lim_{y\to 1^+} \log y = 0\ .$$

■

Esercizio 3.19. *Calcolare*

$$(\mathbf{1})\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\tan x)(1-\sin x)\ .$$

---

[3] $\cos x - \cos a = -2 \sin \dfrac{x-a}{2}\ \sin \dfrac{x+a}{2}$.

■ *Soluzione di* **(1)**. Posto $y = x - \dfrac{\pi}{2}$, il limite proposto è ricondotto al calcolo di

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}\ .$$

Soluzione di **(2)**. Il limite si presenta nella forma indeterminata "$\infty\cdot 0$". Posto $y = x - \dfrac{\pi}{2}$ è $\sin x = \cos y$, $\cos x = -\sin y$ quindi

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan x)(1-\sin x) = -\lim_{y\to 0} (\cot y)(1-\cos y) = -\lim_{y\to 0} \cos y \cdot \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{\sin y}$$

dove le funzioni $f(y) = 1-\cos y$ e $f(y) = \sin y$ sono infinitesime per $y \to 0$ rispettivamente del II e del I ordine. Di conseguenza

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{\sin y} = 0$$

da cui

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan x)(1-\sin x) = 0\ .$$

■

Esercizio 3.20. *Calcolare*

$$(\mathbf{1})\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{2x-\sin x} \quad , \quad (\mathbf{2})\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{3\sqrt{x}+2x}{\sqrt{x}-1}\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{2x-\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{2-\frac{\sin x}{x}}$$

dove

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0\ .$$

Infatti pur non esistendo il $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$, è $|\sin x| \le 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque per ogni $\varepsilon > 0$ si ha ($x > 0$)

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} < \varepsilon$$

per $x > \dfrac{1}{\varepsilon}$; questo prova che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0\ .$$

Ne segue, dunque, che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{2x-\sin x} = \frac{1}{2}\ .$$

Soluzione di **(2)**. Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt{x}+2x}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}+2\right)}{\sqrt{x}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,\frac{\dfrac{3}{\sqrt{x}}+2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=+\infty\ .$$

■

Esercizio 3.21. *Calcolare, usando i teoremi di de l'Hôpital, i seguenti limiti:*

$$(\mathbf{1})\ \lim_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}+x^2}{\tan x}\quad,\quad(\mathbf{2})\ \lim_{x\to-1^-}\frac{\sin(\pi x)}{\sqrt[3]{x^2-1}}\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il limite si presenta nella forma indeterminata "$\frac{0}{0}$". Applicando il teorema di de l'Hôpital si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}+x^2}{\tan x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}\cos\sqrt{x}+2x}{1+\tan^2 x}$$

dove

$$\lim_{x\to0^+}x^{-1/2}\cos\sqrt{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=+\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to0^+}2x=0\quad,\quad\lim_{x\to0^+}(1+\tan x)=1$$

ed allora

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}+x^2}{\tan x}=+\infty\ .$$

Soluzione di **(2)**. Il limite si presenta nella forma indeterminata "$\frac{0}{0}$". Posto $y=x+1$ per $x\to-1^-$ è $y\to0^-$, inoltre $\sin\pi x=\sin\pi(y-1)=\sin(\pi y-\pi)=-\sin\pi y$, $x^2-1=(y-1)^2-1=y(y-2)$, dunque siamo ricondotti al calcolo di

$$-\lim_{y\to0^-}\frac{\sin\pi y}{[y(y-2)]^{1/3}}$$

che, applicando il teorema di de l'Hôpital, dà

$$-\lim_{y\to0^-}\frac{\pi\cos\pi y}{\frac{1}{3}[y(y-2)]^{-2/3}(2y-2)}=-\frac{3}{2}\lim_{y\to0^-}\frac{(\cos\pi y)[y(y-2)^{2/3}]}{y-2}=0\ .$$

■

Esercizio 3.22. *Calcolare, usando i teoremi di de l'Hôpital, i seguenti limiti:*

$$(\mathbf{1})\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos 2x}{1+\sin^2 2x+\cos 2x}\quad,\quad(\mathbf{2})\ \lim_{x\to1^+}\frac{\sin\sqrt{x-1}}{\cos\frac{\pi}{2}x}\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Posto $y = x - \dfrac{\pi}{2}$ è $\sin x = \cos y$, $\cos 2x = -\cos 2y$, $\sin 2x = -\sin 2y$, quindi siamo ricondotti a calcolare[4]

$$\lim_{y\to 0} \frac{\cos y - \cos 2y}{1+\sin^2 2y - \cos 2y} \underset{H}{=} {}_H \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y + 2\sin 2y}{4\sin 2y\ \cos 2y + 2\sin 2y} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y + 2\sin 2y}{2\sin 4y + 2\sin 2y} \underset{H}{=} \frac{1}{2} \lim_{y\to 0} \frac{-\cos y + 4\cos 2y}{4\cos 4y + 2\cos 2y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ .$$

Soluzione di **(2)**. Posto $y = x-1$ siamo ricondotti al calcolo di

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\sin\sqrt{y}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(y+1)\right)} = -\lim_{y\to 0^+} \frac{\sin\sqrt{y}}{\sin\frac{\pi}{2}y} \underset{H}{=} -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0^+} \frac{(\cos\sqrt{y})\, y^{-1/2}}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}y} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\lim_{y\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{y}}{\sqrt{y}\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\ y\right)} = -\infty\ .$$

■

Esercizio 3.23. *Calcolare, usando i teoremi di de l'Hôpital, i limiti*

$$(\mathbf{1})\quad \lim_{x\to 0^+}(\log x - \log\sin 2x) \quad , \quad (\mathbf{2})\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x)(1-\sin x)\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+}(\log x - \log\sin 2x) = \lim_{x\to 0^+}\log\frac{x}{\sin 2x}$$

dove

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin 2x}$$

si presenta nella forma indeterminata "$\dfrac{0}{0}$". Usando il teorema di de l'Hôpital si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin 2x} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}\ .$$

Quindi posto $y = \dfrac{x}{\sin 2x}$ abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+}\log\frac{x}{\sin 2x} = \lim_{y\to\frac{1}{2}^+}\log y = \log\frac{1}{2} = -\log 2\ .$$

Soluzione di **(2)**. Posto $x - \dfrac{\pi}{2} = y$ si ha $\sin x = \cos y$, $\cos x = -\sin y$, quindi

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x)(1-\sin x) = -\lim_{y\to 0}\frac{\cos y(1-\cos y)}{\sin y} \underset{H}{=}$$

$$\underset{H}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\sin y(1+\sin y)}{\cos y} = 0\ .$$

■

[4] "$\underset{H}{=}$" è l'uguaglianza che si ottiene usando il teorema di de l'Hôpital.

Esercizio 3.24. *Calcolare, usando i teoremi di de l'Hôpital, i limiti*

$$(\mathbf{1}) \quad \lim_{x\to+\infty} 5x\,\tan\frac{\pi}{x} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \lim_{x\to 1}\frac{\arctan^2(x-1)}{(1-x)^2} \, .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Posto $y=\dfrac{\pi}{x}$, il limite è ricondotto a

$$5\pi \lim_{y\to 0^+}\frac{\tan y}{y} \underset{H}{=} 5\pi \lim_{y\to 0^+}(1+\tan^2 y) = 5\pi \, .$$

Soluzione di **(2)**. Posto $y = x-1$, siamo ricondotti a

$$\lim_{y\to 0}\frac{\arctan^2 y}{y^2}$$

che si presenta nella forma indeterminata "$\dfrac{0}{0}$". Allora usando il teorema di de l'Hôpital si ha

$$\lim_{y\to 0}\frac{\arctan^2 y}{y^2} \underset{H}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\arctan y}{y(1+y^2)} \underset{H}{=} \lim_{y\to 0}\frac{1}{(1+y^2)(1+3y^2)} = 1 \, .$$

■

Esercizio 3.25. *Calcolare, usando i teoremi di de l'Hôpital, i limiti*

$$(\mathbf{1}) \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 2x}{x^2\arctan x} \qquad \mathbf{2}) \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) \, .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il limite si presenta nella forma indeterminata "$\dfrac{0}{0}$". Applicando il teorema di de l'Hôpital si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 2x}{x^2\arctan x} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{6\sin^2 2x\,\cos 2x}{2x\arctan x + \dfrac{x^2}{1+x^2}} =$$

$$= 6\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\sin^2 2x\,\cos 2x}{2x(1+x^2)\arctan x + x^2} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{(1+x^2)\sin 4x}{2(1+x^2)\arctan x + x} =$$

$$= 6\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\sin 4x}{2(1+x^2)\arctan x + x} \underset{H}{=} 6\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin 4x + 4(1+x^2)\cos 4x}{4x\arctan x + 2 + 1} = 6\cdot\frac{4}{3} = 8 \, .$$

Soluzione di **(2)**. Il limite si presenta nella forma indeterminata "$\infty\cdot 0$", ma posto $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) = \lim_{y\to 0^+}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{1}{y^2}}{y} \underset{H}{=}$$

$$\underset{H}{=} \lim_{y\to 0^+}\left(-\frac{1}{1+\dfrac{1}{y^2}}\right)\left(\frac{-2}{y^3}\right) = 2\lim_{y\to 0^+}\frac{y^2}{y^2+1}\cdot\frac{1}{y^3} =$$

$$= 2 \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y(y^2+1)} = +\infty \ .$$

■

Esercizio 3.26. *Usando i teoremi di de l'Hôpital, determinare i limiti*

$$(\mathbf{1}) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \arctan x^2}{(1-\cos x)^3} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} \ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il limite si presenta nella forma indeterminata "$\frac{0}{0}$". Applicando il teorema di de l'Hôpital, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \arctan x^2}{(1-\cos x)^3} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x - \frac{2x}{1+x^4}}{3(1-\cos x)^3 \sin x} =$$
$$= \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{\sin x(1-\cos x)^2(1+x^4)} =$$
$$= \frac{2}{3} \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right) \left(\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{(1-\cos x)^2}\right) \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^4}\right) =$$
$$= \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{1-\cos x}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3} \ .$$

Soluzione di **(2)**. Dovendo usare i teoremi di de l'Hôpital per questa forma indeterminata "$\frac{0}{0}$" (che tuttavia potrebbe essere facilmente risolta con banali passaggi algebrici e tenendo conto del limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$), si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{2\cos 2x} = \frac{3}{2} \ .$$

■

Esercizio 3.27. *Usando i teoremi di de l'Hôpital, risolvere le forme indeterminate dei seguenti limiti*

$$(\mathbf{1}) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \cos x - 1}{x} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) \ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Dovendo usare i teoremi di de l'Hôpital per questa forma indeterminata "$\frac{0}{0}$" (che tuttavia potrebbe essere facilmente risolta considerandone l'ordine degli infinitesimi), si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \cos x - 1}{x} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0} (\cos x - \sin x) = 1 \ .$$

Soluzione di **(2)**. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \underset{H}{=}$$

$$\underset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0\ .$$

■

Esercizio 3.28. *Risolvere le forme indeterminate dei seguenti limiti usando i teoremi di de l'Hôpital:*

$$(\mathbf{1})\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x-\sin x} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \lim_{x\to 0} \frac{x-\arctan x}{\arcsin x - x}\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Questa forma indeterminata "$\frac{0}{0}$" risolta con il teorema di de l'Hôpital dà

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x-\sin x} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1-\cos x} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\sin x} = \infty\ .$$

Soluzione di **(2)**. Usando il teorema di de l'Hôpital per questa forma indeterminata "$\frac{0}{0}$". si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\arctan x}{\arcsin x - x} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)(1-\sqrt{1-x^2})} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}} \underset{H}{=} -\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)} = 2\ \lim_{x\to 0} \sqrt{1-x^2} = 2\ .$$

■

Esercizio 3.29. *Risolvere le forme indeterminate dei limiti seguenti usando i teoremi di de l'Hôpital:*

$$(\mathbf{1})\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x-\sin x} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \lim_{x\to 0^+} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2}\right)\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Applicando il teorema di de l'Hôpital a questa forma indeterminata "$\frac{0}{0}$" si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x-\sin x} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2\ .$$

Soluzione di **(2)**. Il limite si presenta nella forma indeterminata "$\infty - \infty$". Tuttavia

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\cos^2 x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(x\ \cos x - \sin x)(x\ \cos x + \sin x)}{x^2\sin^2 x} =$$

$$= \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ \cos x - \sin x}{x^2 \sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ \cos x + \sin x}{\sin x}\right) =$$

$$= \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} \right) \left[\left(\lim_{x \to 0^+} \frac{x \cos x}{\sin x} \right) + 1 \right] =$$
$$= 2 \lim_{x \to 0^+} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x}$$

e quest'ultimo si presenta nella forma indeterminata "$\frac{0}{0}$". Usando allora il teorema di de l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} \underset{H}{=} - \lim_{x \to 0^+} \frac{x \sin x}{2x \sin x + x^2 \cos x} =$$
$$= - \lim_{x \to 0^+} \frac{x \sin x}{x \sin x \left(2 + \frac{x \cos x}{\sin x} \right)} =$$
$$= - \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2 + \frac{x \cos x}{\sin x}} = -\frac{1}{3} \, .$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{2}{3} \, .$$

■

Esercizio 3.30. *Calcolare i seguenti limiti usando i teoremi di de l'Hôpital:*

$$(\mathbf{1}) \ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}{x^4} \quad , \quad (\mathbf{2}) \ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left[\tan^2 x - \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^{-2} \right] \, .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Applicando il teorema di de l'Hôpital a questa forma indeterminata "$\frac{0}{0}$" si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}{x^4} \underset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-x + \sin x}{4x^3} \underset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-1 + \cos x}{12x^2} = -\frac{1}{24} \, .$$

Soluzione di **(2)**. Posto $y = x - \frac{\pi}{2}$ si ha $\sin x = \cos y$, $\cos x = -\sin y$, allora

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left[\tan^2 x - \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x \right)^2} \right] = \lim_{y \to 0^+} \left(\cot^2 y - \frac{1}{y^2} \right)$$

che è lo stesso del **(2)** dell'Esercizio 3.29.

■

4. Esercizi sullo studio del grafico di una funzione di una variabile reale

Esercizio 4.1. *Studiare il grafico delle seguenti funzioni*

$$f_1(x) = \frac{x^2}{x^2-1} \quad , \quad f_2(x) = \frac{1+x^{3/5}}{1-x^{3/5}} \ .$$

■ *Studio di $f_1(x)$.*

(A) *Dominio della funzione*

Il dominio della funzione è

$$\mathcal{D}(f_1) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty) \ .$$

(B) *Comportamento agli estremi degli intervalli che compongono il dominio*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1 \ .$$

La retta di equazione $y = 1$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, mentre le rette di equazione $x = -1$ e $x = 1$ sono asintoti verticali.

(C) *Ricerca dei punti di estremo e monotonia della funzione*

I punti da determinare sono da ricercare tra i punti dell'insieme

$$\{x \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f_1) : f_1'(x) = 0\} \ .$$

Essendo $\mathcal{D}(f_1)$ un aperto e f_1 derivabile con

$$f_1'(x) = -2x(x^2-1)^{-2}$$

si ha

$$\{x \in \mathcal{D}(f_1) : f_1'(x) = 0\} = \{x \in \mathcal{D}(f_1) : 2x = 0\} = \{0\} \ .$$

Sia $I(0, r) \subset \mathcal{D}(f_1)$ un intorno di 0; se $x \in I(0, r)$, $x < 0$, ovvero $-r < x < 0$, allora $2x < 0$ e quindi $f_1'(x) > 0$ da cui f_1 è strettamente crescente nell'intorno sinistro di 0; se invece $x \in I(0, r)$, $x > 0$, ovvero $0 < x < r$, allora $2x > 0$ e $f_1'(x) < 0$ da cui f_1 è strettamente decrescente nell'intorno destro di 0. Il punto 0 è pertanto un punto di massimo locale per f_1 che tra l'altro risulta esserne l'unico punto di estremo locale. Dall'espressione di $f_1'(x)$ si noti che per $x \in \mathcal{D}(f_1)$, $x < 0$, è $f_1'(x) > 0$ ovvero f_1 è strettamente crescente in $(-\infty, -1) \cup (-1, 0]$, mentre, in modo analogo, f_1 è strettamente decrescente in $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

(D) *Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità della funzione*

I punti di flesso della funzione sono da ricercare tra i punti dell'insieme

$$\{x \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f_1) : f_1''(x) = 0\} \ .$$

Poiché[5]

$$f_1''(x) = 2(x^2-1)^{-3}(3x^2+1) \ ,$$

[5] f_1 è derivabile due volte.

non ci sono punti di flesso ed essendo $3x^2+1>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, si ha che $f_1''<0$ per $(x^2-1)^3<0$ ovvero per $x^2-1<0$, i.e. per $x\in(-1,1)$; mentre è $f_1''>0$ per $(x^2-1)^3>0$ ovvero per $x^2-1>0$, i.e. per $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Quindi f_1 è concava in $(-1,1)$ ed è convessa in $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Studio di $f_2(x)$.

(A) *Dominio della funzione*

$$\mathcal{D}(f_2)=\{x\in\mathbb{R}:1-x^{3/5}\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}:x^{3/5}\neq 1\}=\{x\in\mathbb{R}:x\neq 1\}$$

dunque

$$\mathcal{D}(f_2)=\mathbb{R}\backslash\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$$

che è un insieme aperto.

(B) *Comportamento agli estremi degli intervalli che compongono il dominio*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{3/5}}{1-x^{3/5}}=-1\quad,\quad\lim_{x\to1^-}\frac{1+x^{3/5}}{1-x^{3/5}}=+\infty\ ,$$
$$\lim_{x\to1^+}\frac{1+x^{3/5}}{1-x^{3/5}}=-\infty\quad,\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^{3/5}}{1-x^{3/5}}=-1\ .$$

La retta $y=-1$ è un asintoto orizzontale per $x\to\pm\infty$ mentre la retta $x=1$ è un asintoto verticale.

(C) *Ricerca dei punti di estremo e monotonia della funzione*

I punti di estremo locale sono da ricercare in

$$\{x\in\mathcal{D}(f_2):f_2'(x)=0\}\ .$$

Poiché

$$f_2'(x)=\frac{6}{5}x^{-2/5}(1-x^{3/5})^{-2}\qquad\text{per }\ x\neq 0$$

la funzione è priva di estremi locali in $\mathcal{D}(f_2)\backslash\{0\}$. Inoltre in tale insieme $f_2'(x)>0$ per cui la funzione in $\mathcal{D}(f_2)\backslash\{0\}$ è strettamente crescente. In 0 si ha

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}\left[\frac{1+x^{3/5}}{1-x^{3/5}}-1\right]=$$
$$=2\lim_{x\to0^-}\frac{x^{3/5}}{x(1-x^{3/5})}=2\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^{2/5}(1-x^{3/5})}=+\infty=\lim_{x\to0^+}\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x}$$

che prova che 0 è un punto di cuspide. Siccome $f_2(0)=1$, se x appartiene ad un intorno sinistro di 0 allora $x^{3/5}<0$, quindi $1+x^{3/5}<1-x^{3/5}$ con $1-x^{3/5}>0$, dunque in un intorno sinistro di 0 si ha

$$f_2(x)=\frac{1+x^{3/5}}{1-x^{3/5}}<1=f_2(0)\ .$$

In un intorno destro di 0 si ha $x^{3/5}>0$, quindi $1+x^{3/5}>1-x^{3/5}$; possiamo supporre che sia $0<x<1$ cosicché in un intorno di 0 abbastanza piccolo sia $1-x^{3/5}>0$. Allora in un intorno destro di 0 è

$$f_2(x)=\frac{1+x^{3/5}}{1-x^{3/5}}>1=f_2(0)\ .$$

Le due disuguaglianze provano che 0 non è un punto di estremo locale.

(D) *Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità della funzione*

I punti di flesso sono da cercare tra i punti dell'insieme

$$\{x \in \mathcal{D}(f_2) : f_2''(x) = 0\} .$$

Poiché

$$f_2''(x) = \frac{12}{25}\, x^{-7/5}(1 - x^{3/5})^{-3}(4x^{3/5} - 1)$$

i punti di flesso sono tra i punti di $\mathcal{D}(f_2)$ per cui

$$4x^{3/5} - 1 = 0 .$$

Si ha che $x = 4^{-5/3} \in \mathcal{D}(f_2)$ è l'unico punto di flesso.

Infatti se $0 < x \le 4^{-5/3}$ allora $x^{-7/5} > 0$, $x^{3/5} \le \dfrac{1}{4} < 1$ che dà $1 - x^{3/5} > 0$, $4x^{3/5} - 1 \le 0$, di conseguenza $f_2''(x) \le 0$ che implica $f_2(x)$ concava in $(0, 4^{-5/3}]$.
Se $4^{-5/3} \le x < 1$ allora $x^{-7/5} > 0$, $\dfrac{1}{4} \le x^{3/5} < 1$ che dà $1 - x^{3/5} > 0$, $4x^{3/5} - 1 \ge 0$, di conseguenza $f_2''(x) \ge 0$ che implica $f_2(x)$ convessa in $[4^{-5/3}, 0)$.
Inoltre per $x < 0$ si ha $x^{-7/5} < 0$, $1 - x^{3/5} > 0$, $4x^{3/5} - 1 < 0$, di conseguenza $f_2''(x) > 0$ che implica $f_2(x)$ convessa in $(-\infty, 0)$.
Infine per $x > 1$ è $x^{-7/5} > 0$, $1 - x^{3/5} < 0$, $4x^{3/5} - 1 > 0$, di conseguenza $f_2''(x) < 0$ che implica $f_2(x)$ concava in $(1, +\infty)$.

■

Esercizio 4.2. *Studiare il grafico delle funzioni*

$$f_3(x) = e^{1/x}x^{1/3} \quad , \quad f_4(x) = 6x\log x - (3x-2)[\log(3x-2)+1] - 4\log 2 .$$

Esercizio 4.3. *Studiare il grafico di*

$$f_5(x) = 1 - x + (x^{2/3} - 1)\sqrt{x^{2/3} + 1} \quad , \quad f_6(x) = 1 - e^{\frac{1+\sin x}{-1+\sin x}} .$$

■ *Studio di $f_5(x)$.*

(A) *Dominio della funzione*

$$\mathcal{D}(f_5) = \mathbb{R}$$

(B) *Comportamento della funzione agli estremi del dominio*

Si considerino le funzioni

$$f(x) = x^{1/3} \quad , \quad g(y) = 1 - y^3 + (y^2 - 1)\sqrt{y^2 + 1}$$

cosicché

$$f_5(x) = (g \circ f)(x) .$$

Allora

$$\lim_{x\to-\infty} f_5(x) = \lim_{x\to-\infty} (g\circ f)(x) \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f_5(x) = \lim_{x\to+\infty} (g\circ f)(x)$$

dove

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^{1/3} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{1/3} = +\infty$$

per cui

$$\lim_{x\to-\infty} f_5(x) = \lim_{y\to-\infty} g(y) \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f_5(x) = \lim_{y\to+\infty} g(y) .$$

Si ha dunque:

$$\lim_{x\to-\infty} f_5(x) = \lim_{y\to-\infty}\left(1 - y^3 + (y^2-1)\sqrt{y^2+1}\right) =$$
$$= \lim_{y\to-\infty}\left(1 - y^3 + (y^2-1)|y|\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\right) =$$
$$= \lim_{y\to-\infty}\left(1 - y^3 - y(y^2-1)\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\right) =$$
$$= \lim_{y\to-\infty}\left\{1 - y^3\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\right) + y\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\right\} = +\infty$$

di ordine 3 rispetto a $y = x^{1/3}$ ovvero di ordine 1 rispetto a x: vi potrebbe quindi essere un asintototo obliquo per $x \to -\infty$. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f_5(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(g\circ f)(x)}{x} = \lim_{y\to-\infty}\frac{g(y)}{y^3} =$$
$$= \lim_{y\to-\infty}\frac{1 - y^3 + (y^2-1)\sqrt{y^2+1}}{y^3} =$$
$$= \lim_{y\to-\infty}\frac{1 - y^3 + |y|(y^2-1)\sqrt{1+1/y^2}}{y^3} = \lim_{y\to-\infty}\frac{1 - y^3 - y(y^2-1)\sqrt{1+1/y^2}}{y^3} =$$
$$= \lim_{y\to-\infty}\frac{y^3\left[\frac{1}{y^3} - 1 - \left(1-\frac{1}{y^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\right]}{y^3} = -2\ ,$$

e questo è il coefficiente angolare m dell'asintoto obliquo se esiste finito il

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f_5(x) - mx\big)\ .$$

Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f_5(x) - mx\big) = \lim_{x\to-\infty}\big(f_5(x) + 2x\big) =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1 - x + (x^{2/3}-1)\sqrt{x^{2/3}+1} + 2x\right) =$$
$$\underset{y=x^{1/3}}{=} \lim_{y\to-\infty}\left(1 + y^3 + (y^2-1)\sqrt{y^2+1}\right)$$

che si presenta nella forma indeterminata "$\infty - \infty$". Tale forma indeterminata è data da

$$\lim_{y\to-\infty}\left(y^3 + (y^2-1)\sqrt{y^2+1}\right)\ .$$

Razionalizzando si ottiene:

$$\lim_{y\to-\infty}\frac{y^6 - (y^2-1)^2(y^2+1)}{y^3 - (y^2-1)\sqrt{y^2+1}} = \lim_{y\to-\infty}\frac{y^6 - (y^4 - 2y^2 + 1)(y^2+1)}{y^3 - |y|(y^2-1)\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}} =$$
$$= \lim_{y\to-\infty}\frac{(y^4 + y^2 - 1}{y^3\left[1 + \left(1-\frac{1}{y^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\right]} = -\infty\ .$$

Dunque non vi è l'asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
Per $x \to +\infty$ si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f_5(x) = \lim_{y\to+\infty} \left(1 - y^3 + (y^2-1)\sqrt{y^2+1}\right)$$

che si presenta nella forma indeterminata "$\infty - \infty$". Tale forma proviene dal

$$\lim_{y\to+\infty} \left((y^2-1)\sqrt{y^2+1} - y^3\right) .$$

Razionalizzando si ottiene

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{(y^2-1)^2(y^2+1) - y^6}{(y^2-1)\sqrt{y^2+1} + y^3} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(y^4 - 2y^2+1)(y^2+1) - y^6}{|y|(y^2-1)\sqrt{1+\frac{1}{y^2}} + y^3} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{-y^4 - y^2 + 1}{y^3\left[\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{y^2}} + 1\right]} = -\infty$$

di ordine 1 rispetto a y ovvero di ordine $\frac{1}{3}$ rispetto a x: non vi è quindi asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

(C) *Ricerca dei punti di estremo e monotonia della funzione*

Si osservi che nel punto $x_0 = 0$ la funzione potrebbe non essere derivabille. Infatti:

$$\lim_{x\to0} \frac{f_5(x) - f_5(0)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{1 - x + (x^{2/3}-1)\sqrt{x^{2/3}+1}}{x} =$$

$$\underset{y=x^{1/3}}{=} \lim_{y\to0} \frac{1 - y^3 + (y^2-1)\sqrt{y^2+1}}{y^3} =$$

$$\underset{H}{=} \lim_{y\to0} \frac{1 - 3y^2 + 2y(y^2+1)^{1/2} + y(y^2-1)(y^2+1)^{-1/2}}{3y^2} = +\infty .$$

Perciò l'origine è un punto di cuspide.
I punti di estremo locale sono quindi da ricercare tra i punti di $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ per cui $f_5'(x) = 0$.
Poiché $f_5 = g \circ f$ allora

$$f_5'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

e siccome $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} > 0$, posto $y = f(x)$, deve essere $g'(y) = 0$. Si ha

$$g'(y) = y(y^2+1)^{-1/2}\left[3y^2 + 1 - 3y(y^2+1)^{1/2}\right]$$

da cui $g'(y) = 0$ se e solo se (per $y = 0$ sarebbe $x = 0$) $3y^2 + 1 - 3y(y^2+1)^{1/2} = 0$ ovvero

$$3y^2 + 1 = 3y(y^2+1)^{1/2} .$$

Questa equazione non è mai soddisfatta per $y < 0$, mentre per $y > 0$ si ha la soluzione $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ovvero il punto $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}$.
Sia $I(x_1, r)$ un intorno di x_1: senza perdere di generalità, si può supporre $x > 0$ per ogni $x \in I(x_1, r)$ da cui segue $y > 0$; allora $y(y^2+1)^{-1/2} > 0$.

Se $x \in I(x_1, r)$, $x < x_1$, allora $y < \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{1/3}$ da cui $y^2 < \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{2/3} = \left(\frac{1}{27}\right)^{1/3} = \frac{1}{3}$, quindi $3y^2 < 1$. Ne segue che

$$(3y^2+1)^2 = 9y^4 + 6y^2 + 1 > 9y^4 + 6y^2 + 3y^2 = 9y^4 + 9y^2 = 9y^2(y^2+1)$$

perciò

$$3y^2 + 1 > 3y\sqrt{y^2+1}\ .$$

Dunque per $x \in I(x_1, r)$, $x < x_1$, è $g'(y) > 0$ da cui $f_5'(x) > 0$ e f_5 risulta essere strettamente crescente in $(x_1 - r, x_1)$.

Se invece $x \in I(x_1, r)$, $x > x_1$, allora $y > \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{1/3}$ da cui $y^2 > \frac{1}{3}$, quindi $3y^2 > 1$. Procedendo come prima si avrà

$$3y^2 + 1 < 3y\sqrt{y^2+1}$$

ottendo così $g'(y) < 0$ per $x \in I(x_1, r)$, $x > x_1$ da cui $f_5'(x) < 0$ e f_5 strettamente decrescente in $(x_1, x_1 + r)$.

Pertanto $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}$ è un punto di massimo locale per la funzione f_5.

(D) *Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità della funzione*

Da $f_5'(x) = g'(f(x))f'(x)$ si ha

$$f_5''(x) = g''(f(x))f'(x)^2 + g'(f(x))f''(x)$$

dove $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3}f(x)^{-2}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9}f(x)^{-5}$ per cui

$$f_5''(x) = \frac{1}{9}\ g''(f(x))f(x)^{-4} - \frac{2}{9}\ g'(f(x))f(x)^{-5}$$

ovvero

$$f_5''(x) = \frac{1}{9}\ f(x)^{-5}\left[f(x)g''(f(x)) - 2g'(f(x))\right]\ .$$

Allora

$$f_5''(x) = (h \circ f)(x) \qquad \text{per} \qquad h(y) = \frac{1}{9}\ y^{-5}\left[yg''(y) - 2g'(y)\right]\ .$$

I punti di flesso sono da cercare fra i punti per cui $f_5''(x) = 0$ e quindi, posto come prima $y = f(x)$, sono da cercare fra i punti per cui $h(y) = 0$, cioè tra i punti per cui

$$yg''(y) - 2g'(y) = 0\ .$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
g''(y) &= \frac{d}{dx}\left\{\{y(y^2+1)^{-1/2}\left[3y^2+1-3y(y^2+1)^{1/2}\right]\right\} = \\
&= \left[\frac{d}{dx}\left(y(y^2+1)^{-1/2}\right)\right]\left[3y^2+1-3y(y^2+1)^{1/2}\right] + \\
&\quad + y(y^2+1)^{-1/2}\left[6y - 3(y^2+1)^{1/2} - 3y^2(y^2+1)^{-1/2}\right] = \\
&= \left[(y^2+1)^{-1/2} - y^2(y^2+1)^{-3/2}\right]\left[3y^2+1-3y(y^2+1)^{1/2}\right] + \\
&\quad + y(y^2+1)^{-1/2}\left[6y - 3(y^2+1)^{1/2} - 3y^2(y^2+1)^{-1/2}\right] = \\
&= (y^2+1)^{-3/2}\left(y^2+1-y^2\right)\left[3y^2+1-3y(y^2+1)^{1/2}\right] +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+y(y^2+1)^{-1/2}\left[6y-3(y^2+1)^{1/2}-3y^2(y^2+1)^{-1/2}\right]=\\
&=(y^2+1)^{-3/2}\big\{3y^2+1-3y(y^2+1)^{1/2}+\\
&+y(y^2+1)\left[6y-3(y^2+1)^{1/2}-3y^2(y^2+1)^{-1/2}\right]\big\}=\\
&=(y^2+1)^{-3/2}\big\{3y^2+1-3y(y^2+1)^{1/2}+6y^2(y^2+1)-\\
&-3y(y^2+1)^{3/2}-3y^3(y^2+1)^{1/2}\big\}=\\
&=(y^2+1)^{-3/2}\big\{3y^2+1-3y(y^2+1)^{1/2}(1+y^2+1)+\\
&+6y^2(y^2+1)-3y^3(y^2+1)^{1/2}\big\}=\\
&=(y^2+1)^{-3/2}\big\{3y^2+1-6y(y^2+1)^{1/2}-3y^3(y^2+1)^{1/2}+\\
&+6y^2(y^2+1)-3y^3(y^2+1)^{1/2}\big\}=\\
&=(y^2+1)^{-3/2}\big\{3y^2+1-6y(y^2+1)^{1/2}-6y^3(y^2+1)^{1/2}+6y^2(y^2+1)\big\}=\\
&=(y^2+1)^{-3/2}\big\{3y^2+1-6y(y^2+1)^{1/2}(1+y^2)+6y^2(y^2+1)\big\}
\end{aligned}
$$

quindi

$$g''(y)=(y^2+1)^{-3/2}\big[3y^2+1-6y(y^2+1)^{3/2}+6y^2(y^2+1)\big]\ .$$

Allora

$$
\begin{aligned}
yg''(y)-2g'(y)&=y(y^2+1)^{-3/2}\left[3y^2+1-6y(y^2+1)^{3/2}+6y^2(y^2+1)\right]-\\
&-2y(y^2+1)^{-1/2}\big[3y^2+1-3y(y^2+1)^{1/2}\big]=\\
&=y(y^2+1)^{-3/2}\big\{3y^2+1-6y(y^2+1)^{3/2}+6y^2(y^2+1)-\\
&-2(y^2+1)\big[3y^2+1-3y(y^2+1)^{1/2}\big]\big\}=\\
&=y(y^2+1)^{-3/2}\big\{3y^2+1-6y(y^2+1)^{3/2}+6y^2(y^2+1)-\\
&-2(y^2+1)(3y^2+1)+6y(y^2+1)^{3/2}\big\}=\\
&=y(y^2+1)^{-3/2}\big[(3y^2+1)(1-2y^2-2)+6y^2(y^2+1)\big]=\\
&=y(y^2+1)^{-3/2}\big(-6y^4-3y^2-2y^2-1+6y^4+6y^2\big)
\end{aligned}
$$

cioè

$$yg''(y)-2g'(y)=y(y^2+1)^{-3/2}(y^2-1)\ .$$

Pertanto $f_5''(x)=0$ se e solo se $y^2-1=0$ i.e. per $x^{2/3}=1$, quindi si hanno i due punti $x_2=-1$ e $x_3=1$. f_5 è convessa se $y^{-5}\left[yg''(y)-2g'(y)\right]>0$ ed è concava se $y^{-5}\left[yg''(y)-2g'(y)\right]<0$. Allora f_5 è convessa per $y^{-4}(y^2+1)^{-3/2}(y^2-1)>0$ ed è concava per $y^{-4}(y^2+1)^{-3/2}(y^2-1)<0$, quindi è convessa per $y^2-1>0$ (cioè per $y=x^{1/3}<-1$ e per $y=x^{1/3}>1$) e concava per $y^2-1<0$ (cioè per $-1<y=x^{1/3}<1$). In definitiva f_5 è convessa per negli intervalli $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$ e concava nell'intervallo $(-1,1)$. I punti x_2 e x_3 sono allora punti di flesso.

Esercizio 4.4. *Studiare il grafico di*

$$f_7(x)=\frac{2^{x+1}+1}{2^x-1}\quad,\quad f_8(x)=x^{1/(4\log^2 x)}\ .$$

Esercizio 4.5. *Studiare il grafico di*

$$f_9(x)=\arctan x-\frac{1}{2}x\quad,\quad f_{10}(x)=\arctan\left(\frac{4x-1}{4x}-\frac{1}{4|x|}\right)\ .$$

Esercizio 4.6. *Studiare il grafico di*

$$f_{11}(x) = \log(\sqrt{x^2+1} - x) - 2\arctan\frac{1}{x}\ ,$$

$$f_{12}(x) = \arctan\frac{\log x - 1}{\log x + 1} + \log(\log^2 x + 1)\ .$$

■ *Studio di $f_{11}(x)$.*

(A) *Dominio della funzione*

$$\mathcal{D}(f_{11}) = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+1} - x > 0,\ x \neq 0\}$$

Si osservi che la disequazione $\sqrt{x^2+1} > x$ è sempre soddisfatta per $x < 0$, mentre, per $x > 0$, elevando al quadrato si ottiene $x^2 + 1 > x^2$ che ancora risulta essere sempre soddisfatta. In conclusione,

$$\mathcal{D}(f_{11}) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\ .$$

(B) *Comportamento agli estremi degli intervalli che compongono il dominio*

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\log(\sqrt{x^2+1} - x) - 2\arctan\frac{1}{x}\right) = +\infty\ ,$$
$$\lim_{x\to0^-}\left(\log(\sqrt{x^2+1} - x) - 2\arctan\frac{1}{x}\right) = -2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi\ ,$$
$$\lim_{x\to0^+}\left(\log(\sqrt{x^2+1} - x) - 2\arctan\frac{1}{x}\right) = -2\left(\frac{\pi}{2}\right)\ ,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\log(\sqrt{x^2+1} - x) - 2\arctan\frac{1}{x}\right) = -2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi\ .$$

Non vi sono né asintoti verticali né asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$ (la funzione in tali casi è un infinito logartimico).

(C) *Ricerca dei punti di estremo e monotonia della funzione*

$$f'_{11}(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{1/2} - x}\left(\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(2x) - 1\right) - 2\,\frac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^{1/2} - x}\left[x(x^2+1)^{-1/2} - 1\right] + \frac{2}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^{1/2} - x}\cdot\frac{x - (x^2+1)^{1/2}}{(x^2+1)^{1/2}} + \frac{2}{x^2+1} = -\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}} + \frac{2}{x^2+1}$$

dunque

$$f'_{11}(x) = \frac{2 - (x^2+1)^{1/2}}{x^2+1}\ .$$

Ne segue che $f'_{11}(x) = 0$ se e solo se $2 - (x^2+1)^{1/2} = 0$ i.e. per $x^2 + 1 = 4$. I punti estremali sono allora i punti $x_1 = -\sqrt{3}$ e $x_2 = \sqrt{3}$. Il denominatore di f'_{11} è positivo per cui il segno di f'_{11} è determinato dal segno del suo numeratore.
Sia $I(x_1, r)$ un intorno di x_1: se $x \in I(x_1, r)$ con $x < x_1$, allora $x^2 > 3$ e di conseguenza $x^2 + 1 > 4$ da cui $(x^2+1)^{1/2} > 2$, risultando così f'_{11} negativa nella parte sinistra di

$I(x_1, r)$ e quindi f_{11} strettamente decrescente in $(x_1 - r, x_1)$. Se invece $x \in I(x_1, r)$, con $x > x_1$, allora, poiché $x_1 + r < 0$, è $3 > x^2$ e di conseguenza $x^2 + 1 < 4$ da cui $(x^2+1)^{1/2} < 2$, risultando così f'_{11} positiva nella parte destra di $I(x_1, r)$ e quindi f_{11} strettamente crescente in $(x_1, x_1 + r)$. Il punto $x_1 = -\sqrt{3}$ è quindi un punto di minimo locale con ordinata $f_{11}(-\sqrt{3}) = \log(2+\sqrt{3}) + 2\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Sia ora $I(x_2, r)$ un intorno di x_2: se $x \in I(x_2, r)$ con $x < x_2$, allora $x^2 < 3$ e di conseguenza $x^2 + 1 < 4$ da cui $(x^2+1)^{1/2} < 2$, risultando così f'_{11} positiva nella parte sinistra di $I(x_2, r)$ e quindi f_{11} strettamente crescente in $(x_2 - r, x_2)$. In modo analogo, se $x \in I(x_2, r)$, con $x > x_2$, allora $x^2 > 3$ e di conseguenza $x^2 + 1 > 4$ da cui $(x^2+1)^{1/2} > 2$, risultando f'_{11} negativa nella parte destra di $I(x_2, r)$ e perciò f_{11} strettamente decrescente in $(x_2, x_2 + r)$. Quindi il punto $x_2 = \sqrt{3}$ è un punto di massimo locale con ordinata $f_{11}(\sqrt{3}) = \log(2-\sqrt{3}) - 2\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Infine la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, -\sqrt{3})$ e in $(\sqrt{3}, \infty)$ e strettamente crescente in $(-\sqrt{3}, 0)$ e in $(0, \sqrt{3})$.

(D) *Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità della funzione*

I punti di flesso sono da cercare fra i punti del dominio di f_{11} per cui $f''_{11} = 0$.

$$\begin{aligned}
f''_{11}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{2-(x^2+1)^{1/2}}{x^2+1}\right) = \frac{d}{dx}\Big(2-(x^2+1)^{1/2}\Big)(x^2+1)^{-1} = \\
&= -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(2x)(x^2+1)^{-1} - \big[2-(x^2+1)^{1/2}\big](x^2+1)^{-2}(2x) = \\
&= -x(x^2+1)^{-3/2} - 2x(x^2+1)^{-2}\big[2-(x^2+1)^{1/2}\big] = \\
&= -x(x^2+1)^{-2}\big\{(x^2+1)^{1/2} + 2\big[2-(x^2+1)^{1/2}\big]\big\} = \\
&= -x(x^2+1)^{-2}\big[(x^2+1)^{1/2} + 4 - 2(x^2+1)^{1/2}\big]
\end{aligned}$$

dunque

$$f''_{11}(x) = -x(x^2+1)^{-2}\big[4-(x^2+1)^{1/2}\big]\ .$$

In $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $f''_{11}(x) = 0$ se e solo se $4 - (x^2+1)^{1/2} = 0$ ovvero per $(x^2+1)^{1/2} = 4$ $\iff x^2 + 1 = 16$. I punti $x_3 = -\sqrt{15}$, $x_4 = \sqrt{15}$ sono i probabili punti di flesso. Poiché $(x^2+1)^{-2} > 0$, il segno di f''_{11} è determinato dal suo numeratore. Se $x \le -\sqrt{15}$ allora $x^2 \ge 15$ e di conseguenza $x^2 + 1 \ge 16$ da cui $(x^2+1)^{1/2} \ge 4$ risultando $f''_{11}(x) \le 0$. Dunque f_{11} è concava in $(-\infty, -\sqrt{15}]$. Se invece $-\sqrt{15} \le x < 0$ allora $x^2 \le 15$, di conseguenza $x^2 + 1 \le 16$ da cui $(x^2+1)^{1/2} \le 4$ risultando $f''_{11}(x) \ge 0$. Dunque f_{11} è convessa in $[-\sqrt{15}, 0)$. Il punto $x_3 = -\sqrt{15}$ è allora un punto di flesso con ordinata $f_{11}(-\sqrt{15}) = \log(4+\sqrt{15}) + 2\arctan\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

Analogamente, se $0 < x \le \sqrt{15}$ allora $x^2 \le 15$, di conseguenza $x^2 + 1 \le 16$ da cui $(x^2+1)^{1/2} \le 4$ risultando $f''_{11}(x) \le 0$. Dunque f_{11} è concava in $(0, \sqrt{15}]$; se invece $x \ge \sqrt{15}$ allora $x^2 \ge 15$, di conseguenza $x^2 + 1 \ge 16$ da cui $(x^2+1)^{1/2} \ge 4$ risultando $f''_{11}(x) \ge 0$. Dunque f_{11} è convessa in $[\sqrt{15}, +\infty)$. Il punto $x_4 = \sqrt{15}$ è allora un punto di flesso con ordinata $f_{11}(\sqrt{15}) = \log(4-\sqrt{15}) - 2\arctan\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

Esercizio 4.7. *Studiare il grafico delle funzioni*

$$f_{13}(x) = x + \log\cosh x - \tanh x \quad , \quad f_{14}(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \; .$$

Esercizio 4.8. *Studiare il grafico di*

$$f_{15}(x) = \sqrt{1+x^2} + \arcsin(1+x^{-2})^{-1/2} \quad , \quad f_{16}(x) = \frac{2-\log^{-1}x}{\sqrt{|\log x|}} \; .$$

Esercizio 4.9. *Studiare il comportamento del grafico delle funzioni*

$$f_{17}(x) = |x^2-2x| \; e^x \quad , \quad f_{18}(x) = x^2 e^{\frac{|x|-1}{|x|}} \; .$$

Esercizio 4.10. *Studiare il grafico di*

$$f_{19}(x) = \frac{1+|\log x|}{1-|\log x|} \quad , \quad f_{20}(x) = |\sin x| e^{\sin x} \; .$$

Esercizio 4.11. *Studiare il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{g(x)}$, dove $g(x)$ è una funzione assegnata.*

■ *Soluzione.*

(A) *Dominio della funzione*

Il dominio della funzione $f(x)$ è:

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0\} \; .$$

La funzione $f(x)$ non è derivabile nei punti dove $g(x) = 0$; questi sono punti di cuspide per la funzione $f(x)$.

(B) *Comportamento agli estremi degli intervalli che compongono il dominio*

Nel caso in cui si debbano determinare i limiti $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ si noti che questi hanno senso se $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) \geq 0$. In tal caso, se essi sono finiti, si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \sqrt{\lim_{x\to\pm\infty} g(x)} \; ,$$

invece se $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$, allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \; .$$

In quest'ultimo caso vanno poi ricercati gli eventuali asintoti obliqui col metodo noto.
Se $g(x)$ ha un asintoto verticale in $x = a$ (i.e. $\lim\limits_{x\to a^\pm} g(x) = \infty$) e a è un punto di accumulazione di $\mathcal{D}(f)$, allora anche $f(x)$ ha un asintoto verticale in $x = a$; inoltre questo può accadere solo nel caso $\lim\limits_{x\to a^\pm} g(x) = +\infty$ per cui si ha che $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = +\infty$.

(C) *Ricerca dei punti di estremo e monotonia della funzione*

Poiché $f(x) = g(x)^{1/2}$ allora

$$f'(x) = \frac{1}{2} \, g(x)^{-1/2} g'(x) \; .$$

Ne segue che i punti estremali della funzione $g(x)$ ($g'(x) = 0$) appartenenti a $\overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$ sono anche punti estremali della funzione $f(x)$ e inoltre il segno della derivata $f'(x)$ è il segno della derivata $g'(x)$. Quest'ultimo fatto implica che se $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$ è un punto di minimo (risp.te massimo) locale della funzione $g(x)$ allora x_0 è anche un punto di minimo (risp.te massimo) locale della funzione $f(x)$, e viceversa.

(D) *Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità della funzione*

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{4}\, g(x)^{-3/2} g'(x)^2 + \frac{1}{2}\, g(x)^{-1/2} g''(x) = \\ &= \frac{1}{4}\, g(x)^{-3/2} \left[2g(x)g''(x) - g'(x)^2\right] . \end{aligned}$$

I punti di flesso della funzione $f(x)$ sono tra i punti di $\overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$ per cui

$$2g(x)g''(x) - g'(x)^2 = 0 .$$

Inoltre, poiché lo studio è condotto per $g(x) \geq 0$, la funzione $f(x)$ è convessa dove $2g(x)g''(x) - g'(x)^2 > 0$ ed è concava dove $2g(x)g''(x) - g'(x)^2 < 0$.

■

Esercizio 4.12. *Studiare il grafico della funzione* $f(x) = \sqrt[3]{g(x)}$, *dove* $g(x)$ *è una funzione assegnata.*

■ *Soluzione.*

(A) *Dominio della funzione*

Il dominio della funzione $f(x)$ è:

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) .$$

La funzione $f(x)$ non è derivabile nei punti interni del dominio $\mathcal{D}(g)$ dove $g(x) = 0$: tali punti sono punti di cuspide per $f(x)$.

(B) *Comportamento agli estremi degli intervalli che compongono il dominio*

Nel caso in cui occorra calcolare $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ si noti che se $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)$ è finito allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \sqrt[3]{\lim_{x\to\pm\infty} g(x)} ,$$

se $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$ allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty ;$$

in quest'ultimo caso si cercheranno gli eventuali asintoti obliqui con il metodo noto.
Se $g(x)$ ha un asintoto verticale in $x = a$ (i.e. $\lim\limits_{x\to a^\pm} g(x) = \infty$) allora anche $f(x)$ ha un asintoto verticale in $x = a$ e

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a^\pm} f(x) &= -\infty \quad \text{se} \quad \lim_{x\to a^\pm} g(x) = -\infty , \\ \lim_{x\to a^\pm} f(x) &= +\infty \quad \text{se} \quad \lim_{x\to a^\pm} g(x) = +\infty . \end{aligned}$$

(C) *Ricerca dei punti di estremo e monotonia della funzione*

Poiché $f(x) = g(x)^{1/3}$ allora

$$f'(x) = \frac{1}{3}\, g(x)^{-2/3} g'(x)\ .$$

Dunque i punti estremali di $g(x)$ appartenenti a $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$ sono anche punti estremali di $f(x)$, inoltre il segno della derivata $f'(x)$ è lo stesso della derivata $g'(x)$. Quindi i punti di minimo locale di $g(x)$ appartenenti a $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$ sono tutti e soli i punti di minimo locale di $f(x)$, i punti di massimo locale di $g(x)$ appartenenti a $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$ sono tutti e soli i punti di massimo locale di $f(x)$.

(D) *Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità della funzione*

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{2}{9}\, g(x)^{-5/3} g'(x)^2 + \frac{1}{3}\, g(x)^{-2/3} g''(x) = \\ &= \frac{1}{9}\, g(x)^{-5/3}\big[3g(x)g''(x) - 2g'(x)^2\big]\ . \end{aligned}$$

I punti di flesso della funzione $f(x)$ sono tra i punti di $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$ per cui

$$3g(x)g''(x) - 2g'(x)^2 = 0\ .$$

Inoltre nell'insieme $\{x \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)\colon g(x) \geq 0\}$ la funzione $f(x)$ è convessa (risp.te concava) dove $3g(x)g''(x) - 2\, g'(x)^2 > 0$ (risp.te $3g(x)g''(x) - 2\, g'(x)^2 < 0$), invece nell'insieme $\{x \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)\colon g(x) \leq 0\}$ la funzione $f(x)$ è convessa (risp.te concava) dove $3g(x)g''(x) - 2\, g'(x)^2 < 0$ (risp.te $3g(x)g''(x) - 2\, g'(x)^2 > 0$).

■

Esercizio 4.13. *Studiare il grafico della funzione*

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x}}\ .$$

Esercizio 4.14. *Per $a > 0$ e $b > 1/2$, studiare la funzione*

$$f(x) = |-ax + b| + \frac{1}{|ax + b|}\ .$$

■ *Soluzione.*

(A) *Dominio della funzione*

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}\ .$$

I caso.

$$\begin{cases} -ax + b \geq 0 \\ ax + b > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -ax \geq b \\ ax > -b \end{cases} \implies x \in (-\frac{b}{a}\,,\, \frac{b}{a}]\ .$$

In tal caso $|-ax + b| = -ax + b$ e $|ax + b| = ax + b$; la funzione da studiare è allora

$$f_1(x) = -ax + b + \frac{1}{ax + b} \quad , \quad x \in (-\frac{b}{a}\,,\, \frac{b}{a}]\ .$$

(Si noti che, essendo $a, b > 0$, è $-\frac{b}{a} < 0 < \frac{b}{a}$).

($\mathbf{I_B}$) *Comportamento di f_1 agli estremi di* $(-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}]$

$$\lim_{x \to -\frac{b}{a}^+} f_1(x) = \lim_{x \to -\frac{b}{a})^+} \left(-ax + b + \frac{1}{ax+b}\right) = +\infty ,$$

$$f_1(\frac{b}{a}) = \frac{1}{2b} .$$

Siccome $b > \frac{1}{2}$, allora $\frac{1}{b} < 2 \implies 0 < \frac{1}{2b} < 1$.

($\mathbf{I_C}$) *Ricerca dei punti di estremo e monotonia di f_1*

$$f_1(x) = -ax + b + (ax+b)^{-1} \implies f_1'(x) = -a - a(ax+b)^{-2}$$

cioè

$$f_1'(x) = -a\left[1 + \frac{1}{(ax+b)^2}\right] .$$

Poiché $(ax+b)^2 > 0$ si ha che $1 + \frac{1}{(ax+b)^2} > 1 > 0$ ed essendo $a > 0$ ne segue che $f_1'(x) < 0$, per ogni $x \in (-\frac{b}{a}, \frac{b}{a})$, dunque f_1 è decrescente in $(-\frac{b}{a}, \frac{b}{a})$ e *non ha punti estremali*, quindi tantomeno, ha punti di estremo.

($\mathbf{I_D}$) *Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità di f_1*

$$f_1''(x) = 2a^2(ax+b)^{-3}$$

e poiché siamo nel caso $ax+b > 0$, ne segue che $(ax+b)^{-3} > 0$, dunque $f_1''(x) > 0$, i.e. f_1 è *convessa* in $(-\frac{b}{a}, \frac{b}{a})$.

II caso.

$$\begin{cases} -ax+b \geq 0 \\ ax+b < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq \frac{b}{a} \\ x < -\frac{b}{a} \end{cases} \implies x \in (-\infty, -\frac{b}{a}) .$$

In tal caso $|ax+b| = -ax-b$ e si ha da studiare la funzione

$$f_2(x) = -ax + b - \frac{1}{ax+b} \quad , \quad x \in (-\infty, -\frac{b}{a}) .$$

($\mathbf{II_B}$) *Comportamento di f_2 agli estremi di* $(-\infty, -\frac{b}{a})$

$$\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-ax + b - \frac{1}{ax+b}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\frac{b}{a}^-} f_2(x) = \lim_{x \to -\frac{b}{a}^-} \left(-ax + b - \frac{1}{ax+b}\right) = +\infty .$$

Ricerca dell'eventuale asintoto per $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}\left(-ax + b - \frac{1}{ax+b}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-a+\frac{1}{x}\left(b-\frac{1}{ax+b}\right)\right] = -a$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f_2(x)-(-ax)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(-ax+b-\frac{1}{ax+b}\right)+ax\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(b-\frac{1}{ax+b}\right) = b$$

Si ha dunque l'asintoto $y=-ax+b$.

($\mathbf{II_C}$) *Ricerca dei punti di estremo e monotonia di f_2*

$$f_2(x) = -ax+b-(ax+b)^{-1} \implies f_2'(x) = -a+a(ax+b)^{-2}$$

ovvero

$$f_2'(x) = a\left[\frac{1}{(ax+b)^2}-1\right] = a\left(\frac{1}{ax+b}-1\right)\left(\frac{1}{ax+b}+1\right) .$$

Allora $f_2'(x)=0$ se e solo se $\dfrac{1}{ax+b}-1=0$ o $\dfrac{1}{ax+b}+1=0$ da cui $ax+b-1=0$ o $ax+b+1=0$, cioè $f_2'(x)=0$ per $x_1=\dfrac{1-b}{a}$ e $x_2=-\dfrac{1+b}{a}$. Si noti che x_1 è da scartare perché $\dfrac{1-b}{a}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{b}{a}>-\dfrac{b}{a}$ (essendo $\dfrac{1}{a}>0$) e l'intervallo studiato è $(-\infty,-\dfrac{b}{a})$. Invece $x_2\in(-\infty,-\dfrac{b}{a})$ perché $-\dfrac{1+b}{a}<-\dfrac{b}{a}$.

Si noti che $\dfrac{1}{ax+b}-1<0$ per ogni $x\in(-\infty,-\dfrac{b}{a})$ perchè nel caso in questione $ax+b<0$. Se $x<x_2$ allora $ax+b<-1$ da cui $\dfrac{1}{ax+b}>-1$, i.e. $1+\dfrac{1}{ax+b}>0$.

Pertanto se $x<x_2$ allora $f_2'(x)<0$ e questo implica che $f_2(x)$ è decrescente.

Se invece $x>x_2$ allora $x>-\dfrac{1+b}{a} \implies ax+b>-1$ ovvero $\dfrac{1}{ax+b}<-1 \implies 1+\dfrac{1}{ax+b}<0$. In tal caso allora $f_2'(x)>0$ e questo implica che $f_2(x)$ è crescente.

Dalla discussione fatta ne segue che il punto $x_2=-\dfrac{1+b}{a}$ è un *punto di minimo locale*, inoltre $f_2(x_2)=f_2(-\dfrac{1+b}{a})=2b+2$.

($\mathbf{II_D}$) *Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità di f_2*

$$f_2''(x) = -2a^2(ax+b)^{-3} .$$

Siccome nel caso studiato $ax+b<0$, allora $(ax+b)^3<0$, di conseguenza $f_2''(x)>0$ e $f_2(x)$ è convessa.

III caso.

$$\begin{cases} -ax+b\le 0 \\ ax+b>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\ge \dfrac{b}{a} \\ x>-\dfrac{b}{a} \end{cases} \implies x\in[\frac{b}{a},+\infty) .$$

In tal caso $|-ax+b| = ax-b$, $|ax+b| = ax+b$ e dobbiamo studiare la funzione

$$f_3(x) = ax - b + \frac{1}{ax+b} \quad , \quad x \in [\frac{b}{a}, +\infty) \; .$$

(III$_\mathbf{B}$) *Comportamento di f_3 agli estremi di $[\frac{b}{a}, +\infty)$*

$$f_3\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2b} \; ,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(ax - b + \frac{1}{ax+b}\right) = +\infty$$

Ricerca dell'eventuale asintoto obliquo per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(ax - b + \frac{1}{ax+b}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[a + \frac{1}{x}\left(-b + \frac{1}{ax+b}\right)\right] = a \; ,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f_3(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(ax - b + \frac{1}{ax+b}\right) - ax\right] =$$

$$= \frac{1}{ax+b}\left(-b + \frac{1}{ax+b}\right) = -b \; .$$

Si ha dunque l'asintoto $y = ax - b$.

(III$_\mathbf{C}$) *Ricerca dei punti di estremo e monotonia di f_3*

$$f_3(x) = ax - b + (ax+b)^{-1} \quad \Longrightarrow \quad f_3'(x) = a - a(ax+b)^{-2} = a\left[1 - \frac{1}{(ax+b)^2}\right] \; .$$

Ragionando come nel II caso si trova facilmente che $f_3'(x) = 0$ per $x_3 = \dfrac{1-b}{a}$ e $x_4 = -\dfrac{1+b}{a}$ ed entrambe sono da scartare perché minori di $\dfrac{b}{a}$.

Pertanto f_3 *non ha punti estremali* né tantomeno punti di estremo. Notare che in questo caso $1 + \dfrac{1}{ax+b} > 0$ e poiché $x \geq \dfrac{b}{a}$, $ax + b \geq 2b > 1$ quindi $1 - \dfrac{1}{ax+b} > 0$. Dunque f_3 è strettamente crescente in $(2, +\infty)$.

(III$_\mathbf{D}$) *Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità di f_3*

$$f_3''(x) = 2a^2(ax+b)^{-3} > 0$$

perché siamo nel caso $ax + b > 0$, quindi f_3 è convessa.

IV caso.

$$\begin{cases} -ax + b \leq 0 \\ ax + b < 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq \dfrac{b}{a} \\ x < -\dfrac{b}{a} \end{cases} \; .$$

Questo caso non si verifica mai.

Si noti che il punto $x_0 = \dfrac{b}{a}$ è un *punto angoloso* per la funzione $f(x)$ in quanto

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to \frac{b}{a}^-} \frac{f(x)-f(\frac{b}{a})}{x-\frac{b}{a}} =$$

$$= \lim_{x\to \frac{b}{a}} \frac{a}{ax-b}\left[f_1(x)-f_1(\frac{b}{a})\right] = \lim_{x\to \frac{b}{a}} \frac{a}{ax-b}\left(-ax+b+\frac{1}{ax+b}-\frac{1}{2b}\right) =$$

$$= \lim_{x\to \frac{b}{a}} \left[-a+\frac{a}{ax-b}\left(\frac{1}{ax+b}-\frac{1}{2b}\right)\right] = -a + \lim_{x\to \frac{b}{a}} \frac{a}{ax-b}\,\frac{2b-ax-b}{2b(ax+b)} =$$

$$= -a + \frac{a}{2b}\lim_{x\to \frac{b}{a}} \frac{b-ax}{(ax-b)(ax+b)} = -a - \frac{a}{4b^2}\ ,$$

mentre in modo analogo si calcola che

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to \frac{b}{a}^+} \frac{f(x)-f(\frac{b}{a})}{x-\frac{b}{a}} =$$

$$= \lim_{x\to \frac{b}{a}} \frac{f_3(x)-f_3(\frac{b}{a})}{x-\frac{b}{a}} = a - \frac{a}{4b^2}\ .$$

■

Esercizio 4.15. *Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il grafico della funzione*

$$f_a(x) = a\sin x + \log\left(\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - \sin x\right)\ .$$

■ *Soluzione.*

(A) *Dominio della funzione*

$$\mathcal{D}(f_a) = \{x \in \mathbb{R} : \sin^2 x - \frac{1}{4} \geq 0,\ \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - \sin x > 0\} =$$

$$= \big(\{x \in \mathbb{R} : \sin x \leq -\frac{1}{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \sin x \geq \frac{1}{2}\}\big)\cap$$

$$\cap\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} > \sin x\} =$$

$$= \Big(\{x \in \mathbb{R} : \sin x \leq -\frac{1}{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \sin x \geq \frac{1}{2}\}\Big)\cap$$

$$\cap\Big(\{x \in \mathbb{R} : \sin x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \sin x > 0,\ \sin^2 - \frac{1}{4} > \sin^2 x\}\Big) =$$

$$= \Big(\{x \in \mathbb{R} : \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}\cup$$

$$\cup\{x\in\mathbb{R} : \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \le x \le \frac{11}{6}\pi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\Big)\cap$$

$$\cap\Big(\{x\in\mathbb{R} : (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\emptyset\Big)\ .$$

Limitiamoci a studiare la funzione nell'intervallo $[0,2\pi]$ perché la funzione è periodica di periodo 2π: infatti

$$f_a(x+2k\pi) = a\sin(x+2k\pi) + \log\left(\sqrt{\sin^2(x+2k\pi) - \frac{1}{4}} - \sin(x+2k\pi)\right) =$$

$$= a\sin x + \log\left(\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - \sin x\right) = f_a(x)\ .$$

Dunque prenderemo

$$\Big(\{x\in[0,2\pi] : \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5}{6}\pi\}\cup\{x\in[0,2\pi] : \frac{7}{6}\pi \le x \le \frac{11}{6}\pi\}\Big)\cap$$

$$\cap\{x\in[0,2\pi] : \pi < x < 2\pi\}$$

per cui

$$\mathcal{D}(f_a) = [\frac{7}{6}\pi\,,\ \frac{11}{6}\pi]\ .$$

(B) *Comportamento della funzione agli estremi del dominio*

Si ha

$$f_a(\frac{7}{6}\pi) = f_a(\frac{11}{6}\pi) = -\frac{a}{2} - \log 2\ .$$

(C) *Ricerca dei punti di estremo e monotonia della funzione*

Siano $\varphi(x) = \sin x$ e $g_a(t) = at + \log\left(\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} - t\right)$ per $x\in[\frac{7}{6}\pi\,,\ \frac{11}{6}\pi]$ e $t\in[-\frac{1}{2}\,,-1]$ cosicché $f_a(x) = (g_a\circ\varphi)(x)$. Allora $f_a'(x) = g_a'(\varphi(x))\varphi'(x) = g_a'(t)\cos x$, dove si è posto $t=\varphi(x)$. Quindi $f_a'(x) = 0$ se $\cos x = 0$ oppure $g_a'(t) = 0$. Nell'intervallo $[\frac{7}{6}\pi\,,\ \frac{11}{6}\pi]$ la prima è soddisfatta per $x_0 = \frac{3}{2}\pi$. Si ha

$$g_a'(t) = a + \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} - t}\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}} - 1\right) =$$

$$= a + \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} - t}\ \frac{t - \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}} = a - \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}}\ .$$

Dunque $g_a'(t)=0$ se $\sqrt{t^2-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{a}$ la quale è possibile solo se $a>0$; inoltre $g_a'(t)=0$ per $t=-\dfrac{\sqrt{a^2+4}}{2a}\in(-1,-\dfrac{1}{2})$. Affinché questa possa essere soddisfatta deve essere ($a>0$)

$$-1<-\frac{\sqrt{a^2+4}}{2a}<-\frac{1}{2}\quad\Longrightarrow\quad a^2>\frac{4}{3}\quad\Longleftrightarrow\quad a\in(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty)\,.$$

Se $a\in(-\infty,2\dfrac{\sqrt{3}}{3}]$ allora f_a ha il solo punto estremale $x_0=\dfrac{3}{2}\pi$ a cui corrisponde $t_0=\sin\dfrac{3}{2}\pi=-1$. In tal caso $g_a'(t_0)\le 0$.

Se $a\in(-\infty,2\dfrac{\sqrt{3}}{3})$ allora $g_a'(t_0)<0$ dunque esiste un intorno $I(x_0,r)$ tale che per ogni $x\in I(x_0,r)$, $g_a'(t)<0$. Se $x\in I(x_0,r)$ e $x\le x_0$ allora $\cos x\le 0$, se invece $x\ge x_0$ allora $\cos x\ge 0$. Dunque per $x\le x_0$ è $f_a'(x)\ge 0$ e f_a è crescente, mentre se $x\ge x_0$ è $f_a'(x)\le 0$ e f_a è decrescente. Pertanto $x_0=\dfrac{3}{2}\pi$ *è un punto di massimo locale e* $f_a(\dfrac{3}{2}\pi)=-a-\log\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *è il corrispondente valore di massimo locale.*

Se $a=2\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ allora $g_a'(t_0)=0$; sia $I(x_0,r)$ un intorno di x_0 di raggio abbastanza piccolo in modo che per $x\in I(x_0,r)\setminus\{x_0\}$ sia $-1<t<-\dfrac{1}{2}$ cosicché $\dfrac{1}{4}<t^2<1$ da cui $0<t^2-\dfrac{1}{4}<\dfrac{3}{4}$ che dà $g_a'(t)<0$. Ne segue che, per $x\in I(x_0,r)$, $x\le x_0$, è $f_a'(x)\ge 0$, dunque f_a è crescente, mentre per $x\ge x_0$, è $f_a'(x)\le 0$, dunque f_a è decrescente. Pertanto $x_0=\dfrac{3}{2}\pi$ *è un punto di massimo locale.*

Infine se $a\in(2\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$, oltre al punto $x_0=\dfrac{3}{2}\pi$, si avranno due valori $x_1,x_2\in[\dfrac{7}{6}\pi\,,\,\dfrac{11}{6}\pi]$ per cui $\sin x_1=\sin x_2=-\dfrac{\sqrt{a^2+4}}{2a}$, con $x_1<\dfrac{3}{2}\pi<x_2$. Si noti che la funzione $\sin x$ a sinistra di $\dfrac{3}{2}\pi$ è strettamente decrescente mentre a destra di $\dfrac{3}{2}\pi$ è strettamente crescente.

Stabiliamo ora se i tre punti estremali x_0,x_1 e x_2 sono punti di estremo locale. Poiché $g_a'(t_0)=a-2\dfrac{\sqrt{3}}{3}>0$ esiste un intorno $I(x_0,r)$ tale che per ogni $x\in I(x_0,r)$, $g_a'(t)>0$. Se $x\in I(x_0,r)$ e $x\le x_0$ allora $\cos x\le 0$, se invece $x\ge x_0$ allora $\cos x\ge 0$.
Ne segue che, per $x\in I(x_0,r)$, se $x\le x_0$ allora $f_a'(x)\le 0$, dunque f_a è decrescente in (x_0-r,x_0), mentre se $x\ge x_0$ allora $f_a'(x)\ge 0$, dunque f_a è crescente in (x_0,x_0+r).
Pertanto $x_0=\dfrac{3}{2}\pi$ *è un punto di minimo locale e* $f_a(\dfrac{3}{2}\pi)=-a-\log\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *è il corrispondente valore di minimo locale.*
Poiché $\cos x_1<0$ allora esiste un intorno $I(x_1,r)$ tale che per ogni $x\in I(x_1,r)$,

$\cos x < 0$. Se $x \in I(x_1, r)$ e $x \leq x_1$ allora $-\dfrac{1}{2} > \sin x \geq \sin x_1$ ovvero $-\dfrac{\sqrt{a^2+4}}{2}a \leq t < -\dfrac{1}{2}$ da cui $\dfrac{1}{4} < t^2 \leq \dfrac{a^2+4}{4a^2} \Longrightarrow 0 < t^2 - \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{a^2+4}{4a^2} - \dfrac{1}{4}$ i.e $0 < t^2 - \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{a^2}$ e di conseguenza $\sqrt{t^2 - \dfrac{1}{4}} \leq \dfrac{1}{a}$, pertanto $a - \left(t^2 - \dfrac{1}{4}\right)^{-1/2} \leq 0$ i.e. $g'_a(t) \leq 0$.

Ne segue che per $x \in I(x_1, r)$ con $x \leq x_1$ è $f'_a(x) \geq 0$, dunque f_a è crescente in $(x_1 - r, x_1)$.

Se $x \in I(x_1, r)$ e $x \geq x_1$ allora $\sin x \leq \sin x_1 < -\dfrac{1}{2}$ ovvero $t \leq -\dfrac{\sqrt{a^2+4}}{2a} < -\dfrac{1}{2}$ da cui $t^2 \geq \dfrac{a^2+4}{4a^2} > \dfrac{1}{4} \Longrightarrow t^2 - \dfrac{1}{4} \geq \dfrac{1}{a^2}$ e di conseguenza $\sqrt{t^2 - \dfrac{1}{4}} \geq \dfrac{1}{a}$, pertanto $a - \left(t^2 - \dfrac{1}{4}\right)^{-1/2} \geq 0$ i.e. $g'(t) \geq 0$. Ne segue che per $x \in I(x_1, r)$ con $x \geq x_1$ è $f'_a(x) \leq 0$, dunque f_a è decrescente in $(x_1, x_1 + r)$.

Allora x_1 *è un punto di massimo locale e* $f_a(x_1) = -\dfrac{\sqrt{a^2+4}}{2} + \log\left(2 + \dfrac{\sqrt{a^2+4}}{2a}\right)$ *è il corrispondente valore di massimo locale.*

Poiché $\cos x_2 > 0$ allora esiste un intorno $I(x_2, r)$ tale che per ogni $x \in I(x_2, r)$, $\cos x > 0$.

Se $x \in I(x_2, r)$ e $x \leq x_2$ allora $\sin x \leq \sin x_2 < -\dfrac{1}{2}$ ovvero $t \leq -\dfrac{\sqrt{a^2+4}}{2a} < -\dfrac{1}{2}$ da cui $t^2 \geq \dfrac{a^2+4}{4a^2} \Longrightarrow t^2 - \dfrac{1}{4} \geq \dfrac{1}{a^2}$, di conseguenza $\sqrt{t^2 - \dfrac{1}{4}} \geq \dfrac{1}{a}$ e pertanto $a - \left(t^2 - \dfrac{1}{4}\right)^{-1/2} \geq 0$ i.e. $g'_a(t) \geq 0$. Ne segue che per $x \in I(x_2, r)$ con $x \leq x_2$ è $f'_a(x) \geq 0$, dunque f_a è crescente in $(x_2 - r, x_2)$.

Se $x \in I(x_2, r)$ e $x \geq x_2$ allora $-\dfrac{1}{2} \geq \sin x > \sin x_2$ ovvero $-\dfrac{\sqrt{a^2+4}}{2a} \leq t < -\dfrac{1}{2}$ da cui $\dfrac{1}{4} < t^2 \leq \dfrac{a^2+4}{4a^2} \Longrightarrow 0 < t^2 - \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{a^2}$, di conseguenza $\sqrt{t^2 - \dfrac{1}{4}} \leq \dfrac{1}{a}$, pertanto $a - \left(\sqrt{t^2 - \dfrac{1}{4}}\right)^{-1/2} \leq 0$ i.e. $g'_a(t) \leq 0$. Ne segue che per $x \in I(x_2, r)$ con $x \geq x_2$ è $f'_a(x) \leq 0$, dunque f_a è decrescente in $(x_2, x_2 + r)$.

Allora x_2 *è un punto di massimo locale e* $f_a(x_2) = -\dfrac{\sqrt{a^2+4}}{2} + \log\dfrac{2 + \sqrt{a^2+4}}{2a}$ *è il corrispondente valore di massimo locale.*

Infine la funzione è strettamente crescente in $[\dfrac{7}{6}\pi\,, x_1] \cup [\dfrac{3}{2}\pi\,, x_2]$ e strettamente decrescente in $[x_1,\ \dfrac{3}{2}\pi] \cup [x_2,\ \dfrac{11}{6}\pi]$.

(D) *Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità della funzione*

Si noti che $f''_a(x) = g''_a(\varphi(x))\varphi'(x)^2 + g'_a(\varphi(x))\varphi''(x) = g''_a(t)\cos^2 x - g'_a(t)\sin x$ cioè

$$f''_a(x) = (1 - t^2)g''_a(t) - t g'_a(t)\ .$$

Siccome

$$g_a''(t) = -\frac{d}{dt}\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-1/2} = t\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-3/2}$$

si ha

$$f_a''(x) = (1-t^2)g_a''(t) - tg_a'(t) = t(1-t^2)\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-3/2} - t\left[a - \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-1/2}\right] =$$

$$= t(1-t^2)\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-3/2} - t\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-1/2}\left[a\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{1/2} - 1\right] =$$

$$= t\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-3/2}\left\{1 - t^2 - \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\left[a\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{1/2} - 1\right]\right\} =$$

$$= t\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-3/2}\left[1 - t^2 - a\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{3/2} + t^2 - \frac{1}{4}\right] =$$

$$= t\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-3/2}\left[\frac{3}{4} - a\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{3/2}\right]$$

Perciò

$$f_a''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-3/2}\left[\frac{3}{4} - a\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{3/2}\right] = 0\ .$$

Poiché per $x \in [\frac{7}{6}\pi\,,\ \frac{11}{6}\pi]$, $t = \sin x < 0$, resta

$$\frac{3}{4} - a\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{3/2} = 0\ .$$

Se $a = 0$ allora $f_0''(x) < 0$, dunque f_0 è concava.
Se $a \neq 0$ allora si ha la soluzione

$$t_1 = -\sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt[3]{\frac{9}{16a^2}}}\ ,$$

essendo, nel caso in questione, $-1 \leq t \leq -\frac{1}{2}$.
I punti $x_3, x_4 \in [\frac{7}{6}\pi\,,\ \frac{11}{6}\pi]$ *tali che* $\sin x_3 = \sin x_4 = t_1$, che hanno per immagine

$$f_a(x_3) = f_a(x_4) = -a\sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt[3]{\frac{9}{16a^2}}} + \log\left[\left(\frac{9}{16a^2}\right)^{1/6} + \sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt[3]{\frac{9}{16a^2}}}\right]\ ,$$

sono punti di flesso.
Infatti nel dominio di f_a è $t\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-3/2} < 0$; inoltre per $x \in [\frac{7}{6}\pi\,, x_3] \cup [x_4,\ \frac{11}{6}\pi]$ è $t_1 \leq t \leq -\frac{1}{2}$ da cui $\frac{1}{4} \leq t^2 \leq t_1^2$ quindi $0 \leq t^2 - \frac{1}{4} \leq \left(\frac{3}{4a}\right)^{2/3}$ e perciò $a\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{3/2} \leq \frac{3}{4}$.
Di conseguenza, per $a > 0$, $f_a''(x) \leq 0$, mentre per $a < 0$, $f_a''(x) \geq 0$. Pertanto *se* $a > 0$,

f_a *è concava in* $[\frac{7}{6}\pi\,, x_3] \cup [x_4,\ \frac{11}{6}\pi]$*, se* $a < 0$*,* f_a *è convessa in* $[\frac{7}{6}\pi\,, x_3] \cup [x_4,\ \frac{11}{6}\pi]$.

Invece per $x \in [x_3, x_4]$ è $-1 \le t \le t_1$ da cui $t_1^2 \le t^2 \le 1$, quindi $\left(\frac{3}{4a}\right)^{2/3} \le t^2 - \frac{1}{4}$ che dà $a\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{3/2} \ge \frac{3}{4}$. Di conseguenza, per $a > 0$, $f_a''(x) \ge 0$, mentre per $a < 0$, $f_a''(x) \le 0$. Pertanto *se* $a > 0$*,* f_a *è convessa in* $[x_3, x_4]$*, se* $a < 0$*,* f_a *è concava in* $[x_3, x_4]$.

■

5. Esercizi sulle formule di Taylor e di Mac Laurin

• Sia f derivabile n volte in un punto $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$, $n \in \mathbb{N}$. La *formula* o lo *sviluppo di Taylor di ordine* n di f in x_0 è l'espressione

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x; x_0)$$

ovvero

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x; x_0)\ .$$

Il polinomio di grado n

$$P_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

è detto il *polinomio di Taylor* di grado n di f in x_0 e la funzione $R_n(x; x_0)$ è detta il *resto di Taylor* di ordine n di f in x_0; esso ha la proprietà

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad R_n(x; x_0) = o((x - x_0)^n)\ .$$

Si hanno le seguenti rappresentazioni del resto:

- se f è derivabile $n + 1$ volte in x_0 allora

  $$R_n(x; x_0) = \left[\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n + 1)!} + \varepsilon(x)\right](x - x_0)^{n+1}$$

  dove $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
- se $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ è derivabile n volte in un intorno $I(x_0, r)$ e per $0 < \delta < r$ esiste $f^{(n+1)}$ in $(x_0, x_0 + \delta)$, allora per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ e per ogni funzione ψ continua in $[x_0, x]$, derivabile in (x_0, x) con $\psi' \neq 0$ esiste $\xi \in (x_0, x)$ tale che

  $$R_n(x; x_0) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n\ .$$

  In particolare per $\psi(y) = x - y$ si ha il resto nella *forma di Cauchy*

  $$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\ (x - \xi)^n(x - x_0)$$

  mentre per $\psi(y) = (x - y)^{n+1}$ si ha il resto nella *forma di Lagrange*

  $$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}\ (x - x_0)^{n+1}\ .$$

- se $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ è di classe C^{n+1} in un intorno di x_0 allora esiste un intorno $I(x_0, \varepsilon)$ nel quale si abbia la *rappresentazione integrale*

  $$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n\, dt\ .$$

• Siano $f, g \in C^n\big(I(x_0,r)\big)$ per $I(x_0,r) \subset \mathcal{D}(f)\cap\mathcal{D}(g)$ intorno del punto $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f) \cap \overset{\circ}{\mathcal{D}}(g)$. Poiché

$$(f+g)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) + g^{(k)}(x_0)$$

per $0 \le k \le n$, la formula di Taylor di $f+g$ in x_0 è dato da

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)+g^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + R_n(x;x_0) = \\ &= P_{n,f}(x;x_0) + P_{n,g}(x;x_0) + R_n(x;x_0)\end{aligned}$$

dove $P_{n,f}(x;x_0)$ e $P_{n,g}(x;x_0)$ sono il polinomio di Taylor di ordine n rispettivamente di f e g in x_0. Se f e g sono derivabili $n+1$-volte in un intorno destro di x_0, la rappresentazione del resto nella forma di Lagrange è

$$\begin{aligned}R_n(x;x_0) &= \frac{(f+g)^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1} = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)+g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1} \quad , \quad x_0 < \xi < x\ .\end{aligned}$$

• Sotto le stesse condizioni del caso precedente, poiché

$$(fg)^{(k)}(x_0) = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} f^{(m)}(x_0)g^{(k-m)}(x_0)$$

per $0 \le k \le n$, la formula di Taylor di ordine n di fg in x_0 è data da

$$(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m} f^{(m)}(x_0)g^{(k-m)}(x_0)\right)(x-x_0)^k + R_n(x;x_0)\ .$$

La rappresentazione del resto nella forma di Lagrange è

$$\begin{aligned}R_n(x;x_0) &= \frac{(fg)^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{m=0}^{n+1}\binom{n+1}{m} f^{(m)}(\xi)g^{(n-m+1)}(\xi)\right)(x-x_0)^{n+1} \quad , \quad x_0 < \xi < x\ .\end{aligned}$$

• Ad esempio se $f(x) = (x-x_0)g(x) \in C^n\big(I(x_0,r)\big)$, essendo

$$f^{(k)}(x) = (x-x_0)g^{(k)}(x) + kg^{(k-1)}(x)$$

la formula di Taylor in x_0 è

$$\begin{aligned}(x-x_0)g(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{kg^{(k-1)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + R_n(x;x_0) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}\,(x-x_0)^k + R_n(x;x_0)\end{aligned}$$

dove, se g è derivabile $n+1$ volte in un intorno destro di x_0, rappresentando il resto nella forma di Lagrange, è

$$R_n(x;x_0) = \frac{g^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x-x_0)^{n+1} + \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(\xi-x_0)(x-x_0)^{n+1} \quad , \quad x_0 < \xi < x\ .$$

• La *formula* o lo *sviluppo di Mac Laurin* di ordine n di una funzione è la formula di Taylor di ordine n della funzione in $x_0 = 0$. Riportiamo qui di seguito le formule di Mac Laurin delle funzioni elementari e di alcune funzioni più comuni:

$$\bullet \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x,0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x,0)$$

il cui resto nella forma di Lagrange è

$$R_n(x;0) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\, x^{n+1} \quad , \quad 0 < \xi < x \; ;$$

$$\bullet \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} + R_{2n+2}(x;0) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + R_{2n+2}(x;0) \; ,$$

il cui resto nella forma di Lagrange è

$$R_{2n+2}(x;0) = (-1)^{n+1}\, \frac{\cos\xi}{(2n+3)!}\, x^{2n+3} \quad , \quad 0 < \xi < x \; ;$$

$$\bullet \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} + R_{2n+1}(x;0) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} + R_{2n+1}(x;0) \; ,$$

il cui resto nella forma di Lagrange è

$$R_{2n+1}(x;0) = (-1)^{n+1}\, \frac{\cos\xi}{(2n+2)!}\, x^{2n+2} \quad , \quad 0 < \xi < x \; ;$$

$$\bullet \quad (1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + R_n(x;0) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x;0) \; ,$$

il cui resto nella forma di Lagrange è

$$R_n(x;0) = \binom{\alpha}{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \quad , \quad x_0 < \xi < x \; ;$$

$$\bullet \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + R_n(x;0) = \sum_{k=0}^{n} x^k + R_n(x;0)$$

dove, poiché

$$1 - x^{n+1} = (1-x) \sum_{k=0}^{n} x^k \quad \underset{(x\neq 1)}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

da cui

$$R_n(x;0) = \frac{x^{n+1}}{1-x} \; ;$$

- $$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + R_{n+1}(x;0)$$

con il resto dato da

$$R_{n+1}(x;0) = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,dt\;;$$

- $$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + R_{n+1}(x;0)$$

con il resto dato da

$$R_{n+1}(x;0) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}\,dt\;;$$

queste ultime due formule danno la formula

- $$\frac{1}{2}\log \frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\,dt\;;$$

- $$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + R_{2n+1}(x;0)$$

dove

$$R_{2n+1}(x;0) = (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\;;$$

- $$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + R_{2n+1}(x;0)$$

dove[6]

$$R_{2n+1}(x;0) = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}(1+\xi)^{-n-3/2}\int_0^x t^{2n+2}\,dt\;.$$

• Sia $f(x)$ una funzione derivabile n volte in un punto $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$ e si supponga che per $t = x - x_0$ sia nota la formula di Mac Laurin di ordine n della funzione[7] $g(t) = f(t + x_0)$,

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2}\,t^2 + \frac{g'''(0)}{3!}\,t^3 + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\,t^n + R_n(t;0)\;.$$

Poiché $x = \varphi(t)$, per $\varphi(t) = t + x_0$, con $\varphi(0) = x_0$, $\varphi'(t) = 1$, si ha

$$\begin{array}{ll}
g(t) = f\big(\varphi(t)\big) = f(x) & \Longrightarrow g(0) = f(x_0) \\
g'(t) = f'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = f'\big(\varphi(t)\big) & \Longrightarrow g'(0) = f'(x_0) \\
g''(t) = f''\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = f''\big(\varphi(t)\big) & \Longrightarrow g''(0) = f''(x_0) \\
g'''(t) = f'''\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = f'''\big(\varphi(t)\big) & \Longrightarrow g'''(0) = f'''(x_0) \\
\qquad\qquad\vdots & \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\
g^{(n)}(t) = f^{(n)}\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = f^{(n)}\big(\varphi(t)\big) & \Longrightarrow g^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_0)\;.
\end{array}$$

---

[6] $(2k)!! := 2\cdot 4\cdots(2k-2)(2k)$ e $(2k+1)!! := 1\cdot 3\cdots(2k-1)(2k+1)$.

[7] È ovvio che $g(t)$ è derivabile fino all'ordine n in 0.

Quindi la formula di Mac Laurin di $g(t)$ diventa

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\,(x - x_0)^3 +$$
$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + R_n(x; x_0)$$

che è la formula di Taylor di ordine n di f in x_0 perché

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = \lim_{t\to 0} \frac{R_n(t; 0)}{t^n} = 0\ .$$

Esercizio 5.1. *Determinare la formula di Taylor delle seguenti funzioni nei punti indicati a fianco di ciascuna di esse:*

$$(\mathbf{1})\ \ f(x) = \frac{1}{1-x}\ ,\ x_0 \neq 1 \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}\ ,\ x_0 = 0\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il dominio di f è $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ che è aperto e per ogni $x \neq 1$ si ha

$$f^{(k)}(x) = k!(1 - x)^{-k-1} \quad , \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\ ,$$

allora la formula richiesta è

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{(1 - x_0)^{k+1}} + R_n(x; x_0)$$

dove, rappresentando il resto nella forma di Lagrange, è

$$R_n(x; x_0) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(1 - \xi)^{n+2}} \quad , \quad x_0 < \xi < x\ .$$

Si osservi che

$$(x - x_0)^{n+1} - (1 - x_0)^{n+1} = (x - 1) \sum_{k=0}^{n} (x - x_0)^k (1 - x_0)^{n-k}$$

da cui si ricava per $x \neq 1$

$$\frac{(x - x_0)^{n+1}}{x - 1} - \frac{(1 - x_0)^{n+1}}{x - 1} = \sum_{k=0}^{n} (x - x_0)^k (1 - x_0)^{n-k}$$

di conseguenza, con passaggi elementari, si ottiene

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{(1 - x_0)^{k+1}} + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(1 - x_0)^{n+1}(1 - x)}$$

che per paragone con la formula di Taylor scritta sopra dà

$$R_n(x; x_0) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(1 - x_0)^{n+1}(1 - x)}\ .$$

Soluzione di **(2)**. Il dominio della funzione è $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ sul quale f è C^∞. Poiché $x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1$ si ha

$$f(x) = x + \frac{1}{x + 1}$$

quindi per la formula richiesta basta scrivere la formula di Mac Laurin della funzione $\dfrac{1}{x+1}$. Questa si ottiene dalla formula di Mac Laurin della funzione $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ sostituendo $-x$ al posto di x, cioè

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} .$$

Siccome

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{1+x} &= x + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} = \\ &= x + 1 - x + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \end{aligned}$$

la formula richiesto è

$$\frac{x^2+x+1}{x+1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} .$$

■

Esercizio 5.2. *Determinare le formule di Taylor delle seguenti funzioni nei punti a fianco indicati.*

$$\textbf{(1)}\ \ f(x) = \frac{x+1}{(2+x)^{1/2}} \ ,\ x_0 = \frac{1}{\pi} \quad , \quad \textbf{(2)}\ \ f(x) = 2\cos^2 x - \cosh x \ ,\ x_0 = \frac{1}{2} .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il dominio della funzione è $(-2, +\infty)$ nel quale la funzione $f(x)$ è C^∞. Poiché $\dfrac{1}{\pi} \in (-2, +\infty)$, ha senso scrivere la formula di Taylor di $f(x)$ in questo punto. Posto $t = x - \dfrac{1}{\pi}$ è $x = \varphi(t)$ per $\varphi(t) = t + \dfrac{1}{\pi}$, di conseguenza la funzione $g(t) = (f \circ \varphi)(t)$ è tale che $g(\varphi^{-1}(x)) = (f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x)) = f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = f(x)$. Basta allora determinare la formula di Taylor di g nel punto $\varphi^{-1}(\frac{1}{\pi}) = 0$ essendo $\varphi^{-1}(x) = x - \dfrac{1}{\pi}$, ovvero basta determinare la formula di Mac Laurin della funzione $g(t)$. Si noti che $g(t) = (t+a)h(t)$ per

$$a = 1 + \frac{1}{\pi} \quad , \quad h(t) = \frac{1}{(t+a+1)^{1/2}} .$$

Poiché

$$g^{(k)}(t) = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (t+a)^{(m)}\, h^{(k-m)}(t)$$

con $(t+a)^{(m)} = 0$ per $m \geq 2$ e $(t+a)' = 1$, allora $g^{(k)}(t) = (t+a)h^{(k)}(t) + kh^{(k-1)}(t)$ da cui $g^{(k)}(0) = ah^{(k)}(0) + kh^{(k-1)}(0)$. Pertanto la formula di Mac Laurin di $g(t)$ di ordine n è

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{ah^{(k)}(0) + kh^{(k-1)}(0)}{k!}\, t^k + R_{n,g}(t;0) = \\ &= a \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!}\, t^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\, t^k + R_{n,g}(t;0) = \end{aligned}$$

$$= aP_{n,h}(t;0) + tP_{n-1,h}(t;0) + R_{n,g}(t;0)$$

dove $P_{n,h}(t;0)$ indica il polinomio di Taylor di grado n di h nel punto $t=0$. Ora

$$h(t) = (t+a+1)^{-1/2} = (a+1)^{-1/2}\left(1+\frac{t}{a+1}\right)^{-1/2} = (a+1)^{-1/2}(1+s)^{-1/2}$$

per $s = \dfrac{t}{a+1}$. Dalla formula di Mac Laurin della funzione $(1+s)^{-1/2}$ si ha

$$h(t) = (a+1)^{-1/2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}s^k + R_n(s;0)\right]$$

quindi il polinomio di Taylor di grado n di $h(t)$ in $t=0$ è

$$P_{n,h}(t;0) = (a+1)^{-1/2}\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}\frac{t^k}{(a+1)^k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}\frac{t^k}{(a+1)^{k+1/2}}\ .$$

Allora

$$g(t) = a\sum_{h=0}^{n}\binom{-1/2}{k}\frac{t^k}{(a+1)^{k+1/2}} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{-1/2}{k}\frac{t^{k+1}}{(a+1)^{k+1/2}} + R_{n,g}(t,0) =$$

$$= a\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}\frac{t^k}{(a+1)^{k+1/2}} + \sum_{\ell=1}^{n}\binom{-1/2}{\ell-1}\frac{t^\ell}{(a+1)^{\ell-1+1/2}} + R_{n,g}(t;0) =$$

$$= \frac{a}{(a+1)^{1/2}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{(a+1)^{k+1/2}}\left[\binom{-1/2}{k}a + \binom{-1/2}{k-1}(a+1)\right] + R_{n,g}(t;0)$$

dove[8]

$$\binom{-1/2}{k}a + \binom{-1/2}{k-1}(a+1) = \binom{-1/2}{k-1}\left(\frac{a}{2k} - a\right) + \binom{-1/2}{k-1}(a+1) =$$

$$= \binom{-1/2}{k-1}\left(\frac{a}{2k}+1\right) = \binom{-1/2}{k-1}\frac{a+2k}{2k}\ .$$

Dunque la formula di Mac Laurin di g è

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{a+1}}\left(a + \sum_{k=1}^{n}\binom{-1/2}{k-1}\frac{a+2k}{k(a+1)^k}\,t^k\right) + R_{n,g}(t;0)\ .$$

Se rappresentiamo il resto di g nella forma di Lagrange si ha

$$R_{n,g}(t;0) = \frac{g^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\,t^{n+1} \qquad , \qquad 0<\eta<t$$

dove, tenuto conto che

$$h^{(k)}(t) = \binom{-1/2}{k}k!(t+a+1)^{-1/2-k}\ ,$$

[8]Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ è

$$\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha}{k-1}\frac{\alpha-k+1}{k}\ .$$

è

$$R_{n,g}(t;0) = \frac{(\eta+a)h^{(n+1)}(\eta) + (n+1)h^{(n)}(\eta)}{(n+1)!}\, t^{n+1} =$$

$$= \left[\binom{-1/2}{n+1}(\eta+a)(\eta+a+1)^{-3/2-n} + \binom{-1/2}{n}(\eta+a+1)^{-1/2-n}\right] t^{n+1} =$$

$$= \binom{-1/2}{n}\left(-\frac{2n+1}{2(n+1)}(\eta+a) + \eta + a + 1\right)(\eta+a+1)^{-3/2-n}\, t^{n+1} =$$

$$= \binom{-1/2}{n}\left(\frac{\eta+a}{2n+2}+1\right)(\eta+a+1)^{-3/2-n}\, t^{n+1} .$$

Ne segue che

$$g(\varphi^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{a+1}}\left[a + \sum_{k=1}^{n}\binom{-1/2}{k-1}\frac{a+2k}{k(a+1)^k}\left(x-\frac{1}{\pi}\right)^k\right] +$$

$$+\binom{-1/2}{n}\left(\frac{\eta+a}{2n+2}+1\right)(\eta+a+1)^{-3/2-n}\left(x-\frac{1}{\pi}\right)^{n+1}$$

e posto $\xi = \eta + \dfrac{1}{\pi}$ si ottiene la formula richiesta

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2\pi+1}}\left[1+\frac{1}{\pi}+\sum_{k=1}^{n}\binom{-1/2}{k-1}\frac{1+\frac{1}{\pi}+2k}{k\left(2+\frac{1}{\pi}\right)^k}\left(x-\frac{1}{\pi}\right)^k\right] +$$

$$+\binom{-1/2}{n}\left(\frac{\xi+1}{2n+2}+1\right)(\xi+2)^{-3/2-n}\left(x-\frac{1}{\pi}\right)^{n+1} \quad , \quad \frac{1}{\pi} < \xi < x .$$

■

Esercizio 5.3. *Determinare le formule di Mac Laurin delle seguenti funzioni:*

$$(\mathbf{1})\ \ f(x) = \frac{x+3}{x^2-3x+2} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sin x .$$

Esercizio 5.4. *Scrivere la formula di Mac Laurin con il resto nella forma di Lagrange per le seguenti funzioni:*

$$(\mathbf{1})\ \ f(x) = \sqrt[4]{x+2} + \sqrt[3]{x-3} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ f(x) = |x|\sin x .$$

■ *Soluzione di* **(2)**. La funzione $f(x) = |x|\sin x$ è sicuramente continua in $\mathbb{R}$ e $C^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$; verifichiamo se è anche derivabile in tutto $\mathbb{R}$: l'eventuale non derivabilità può essere solo in 0. Quindi

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{x} = 0 ,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x} = 0$$

che prova invece la derivabilità di f in 0 .Si osservi che

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\,(-x\sin x) & \text{per} \;\; x<0 \\ 0 & \text{per} \;\; x=0 \\ \dfrac{d}{dx}\,(x\sin x) & \text{per} \;\; x>0 \end{cases}$$

cioè

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x - x\cos x & \text{per} \;\; x<0 \\ 0 & \text{per} \;\; x=0 \\ \sin x + x\cos x & \text{per} \;\; x>0 \end{cases}$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\lim_{x\to 0}\,(\sin x + x\cos x) = 0 = f'(0)$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0}\,(\sin x + x\cos x) = 0 = f'(0)\ .$$

Quindi f' è continua in 0 e di conseguenza f è di classe $C^1(\mathbb{R})$. Verifichiamo ora la derivabilità in 0 di f':

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - x\cos x}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} + \cos x = -2\ ,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} + \cos x = 2\ .$$

Dunque f' non è derivabile in 0 e $f \notin C^2(\mathbb{R})$; possiamo scrivere solo la formula di Mac Laurin del I ordine

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + R_1(x;0) \quad \Longleftrightarrow \quad |x|\sin x = R_1(x;0)$$

dove, essendo tuttavia $f \in C^2(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, possiamo rappresentare R_1 nella forma di Lagrange e precisamente, se $x<0$ allora per qualche $\xi \in (x,0)$ è

$$R_1(x;0) = \frac{f''(\xi)}{2}\,x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad R_1(x;0) = \frac{-2\cos\xi + \xi\sin\xi}{2}\,x^2\ ,$$

in modo analogo, se $x>0$ allora per qualche $\xi \in (0,x)$ è

$$R_1(x;0) = \frac{2\cos\xi - \xi\sin\xi}{2}\,x^2\ .$$

■

Esercizio 5.5. *Scrivere la formula di Mac Laurin del IV ordine con il resto nella forma di Lagrange per la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 1-(x^2+1)^{1/2} & , \quad x \ge 0 \\ -\dfrac{1}{2}x^2 & , \quad x<0\ . \end{cases}$$

Suggerimento. Usare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5.6. *Scrivere la formula di Taylor del II ordine nei punti* $x_0 = -1$ *e* $x_0 = 1$ *per le funzioni*

$$(\mathbf{1})\ \ f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1} \ .$$

■ *Soluzione di* **(2)**. Il dominio di $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ è $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ e intanto non è possibile scrivere la formula di Taylor di f in 1. Rimane da scrivere la formula in -1 il quale è possibile perché $f \in C^\infty(\mathbb{R}\backslash\{1\})$. Si ha $f(-1) = -\dfrac{3}{2}$ e

$$f'(x) = (2x-1)(x-1)^{-1} - (x^2-x+1)(x-1)^{-2} =$$

$$= (x-1)^{-2}\left[(2x-1)(x-1) - x^2 + x - 1\right]$$

da cui

$$f'(x) = (x-1)^{-2}(x^2-2x) \quad \Longrightarrow \quad f'(-1) = \frac{3}{4}$$

$$f''(x) = -2(x-1)^{-3}(x^2-2x) + (x-1)^{-2}(2x-2) =$$

$$= (x-1)^{-3}\left[-2(x^2-2x) + (x-1)(2x-2)\right]$$

da cui

$$f''(x) = 2(x-1)^{-3} \quad \Longrightarrow \quad f''(-1) = -\frac{1}{4} \ .$$

Allora si ha la formula di Taylor del secondo ordine in -1

$$\frac{x^2-x+1}{x-1} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{4}(x+1) - \frac{1}{8}(x+1)^2 + R_2(x;-1) \ .$$

Se ad esempio rappresentiamo l'errore nella forma di Lagrange si ha, per qualche $\xi \in (-1, x)$ (o $\xi \in (x, -1)$),

$$R_2(x;-1) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\,(x+1)^3 \quad \Longleftrightarrow \quad R_2(x;-1) = -\frac{(x+1)^3}{(\xi-1)^4}$$

(perché $f'''(x) = -6(x-1)^{-4}$).

■

Esercizio 5.7. *Determinare la formula di Taylor del II ordine con il resto nella forma di Lagrange per le seguenti funzioni nei punti a fianco indicati:*

$$(\mathbf{1})\ \ g(x) = \begin{cases} (x^2-4)^2 \log|x-2| & , \quad x \neq 2 \\ 0 & , \quad x = 2 \end{cases} \quad , \quad in\ \ x = 2 \ ,$$

$$(\mathbf{2})\ \ h(x) = \begin{cases} (x^2-9) \log|x-3| & , \quad x \neq 3 \\ 0 & , \quad x = 3 \end{cases} \quad , \quad in\ \ x = 3 \ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il dominio di g è $\mathbb{R}$ ed è di classe $C^\infty(\mathbb{R}\backslash\{2\})$. Verifichiamo dapprima la continuità di g in 2:

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4)^2\log|x-2| = \lim_{x\to 2}(x+2)^2(x-2)^2\log|x-2| = 0 = g(2)\ ,$$

dunque g è continua. Verifichiamo ora la derivabilità di g in 2:

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)^2\log|x-2|}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)^2(x-2)^2\log|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2)^2(x-2)\log|x-2| = 0\ .$$

Di conseguenza g è derivabile in $\mathbb{R}$ e

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{dx}(x^2-4)^2\log(2-x) & , \quad x<2 \\ 0 & , \quad x=2 \\ \dfrac{d}{dx}(x^2-4)^2\log(x-2) & , \quad x>2 \end{cases}$$

cioè

$$g'(x) = \begin{cases} 4x(x^2-4)\log(2-x) - (x^2-4)^2(2-x)^{-1} & , \quad x<2 \\ 0 & , \quad x=2 \\ 4x(x^2-4)\log(x-2) + (x^2-4)^2(x-2)^{-1} & , \quad x>2 \end{cases}$$

che possiamo scrivere come

$$g'(x) = \begin{cases} (x^2-4)[4x\log(2-x)+x+2] & , \quad x<2 \\ 0 & , \quad x=2 \\ (x^2-4)[4x\log(x-2)+x+2] & , \quad x>2\ . \end{cases}$$

È ovvio che $g' \in C^0(\mathbb{R}\backslash\{2\})$, quindi verifichiamo soltanto la continuità di g' in 2:

$$\lim_{x\to 2^-} g'(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2-4)[4x\log(2-x)+x+2] =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} 4x(x^2-4)\log(2-x) + \lim_{x\to 2^-}(x^2-4)(x+2) = 0 = g'(2)\ ,$$

$$\lim_{x\to 2^+} g'(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2-4)[4x\log(x-2)+x+2] =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} 4x(x^2-4)\log(x-2) + \lim_{x\to 2^+}(x^2-4)(x+2) = 0 = g'(2)\ .$$

Perciò $g' \in C^0(\mathbb{R})$; vediamo se g' è derivabile in 2:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{g'(x)-g'(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{(x^2-4)[4x\log(2-x)+x+2]}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-}(x+2)[4x\log(2-x)+x+2] = -\infty\ .$$

Ne segue che g' non è derivabile in 2 e quindi g non è derivabile due volte in 2: non è allora possibile scrivere la formula richiesta.

■

Esercizio 5.8. *Scrivere la formula di Mac Laurin delle seguenti funzioni in modo che il loro valore nei punti indicati sia determinato a meno di un errore di* 10^{-3}*:*

$$(\mathbf{1})\ \ f(x) = \cos^2 x - \arctan x \quad \textit{in}\ \ x = \frac{1}{4}\ ,$$

$$(\mathbf{2})\ \ g(x) = \frac{x+1}{(x+2)^{1/2}} \quad \textit{in}\ \ x = \frac{1}{\pi}\ .$$

■ *Soluzione di* **(2)**. Per la $g(x) = (x+1)(2+x)^{-1/2}$ si ha:

$$(x+1)(2+x)^{-1/2} = 2^{-1/2}(x+1)\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{2^{1/2}}\left[x\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1/2} + \left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1/2}\right]\ .$$

Posto $t = \dfrac{x}{2}$ è

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1/2} = (1+t)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}t^k + R_n(y,0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}\frac{x^k}{2^k} + R_n\left(\frac{x}{2};0\right)$$

dove

$$R_n\left(\frac{x}{2};0\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\binom{-1/2}{n+1}(1+\xi)^{-n-3/2}x^{n+1} \quad , \quad 0<\xi<\frac{x}{2}\ .$$

Pertanto

$$(x+1)(2+x)^{-1/2} = \frac{1}{2^{1/2}}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}\frac{x^{k+1}}{2^k} + xR_n\left(\frac{x}{2};0\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}\frac{x^k}{2^k} + R_n\left(\frac{x}{2};0\right)\right]$$

dove

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}\frac{x^{k+1}}{2^k} = \sum_{k=1}^{n}\binom{-1/2}{k-1}\frac{x^k}{2^{k-1}} + \binom{-1/2}{n+1}\frac{x^{n+1}}{2^n}\ ,$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}\frac{x^k}{2^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{-1/2}{k}\frac{x^k}{2^k}$$

e poiché $R_n(\dfrac{x}{2};0) = O(x^{n+1})$, $xR_n(\dfrac{x}{2};0) = O(x^{n+2})$ si ha[9]

$$\begin{aligned}(x+1)(2+x)^{-1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg\{1+\sum_{k=1}^{n}\left[2\binom{-1/2}{k-1}+\binom{-1/2}{k}\right]\frac{x^k}{2^k}+\\ &+\binom{-1/2}{n+1}\frac{x^{n+1}}{2^n}+\binom{-1/2}{n+1}(1+\xi)^{-3/2-n}\,\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}\Bigg\} =\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k\sqrt{2}}\left[2\binom{-1/2}{k-1}+\binom{-1/2}{k}\right]x^k+\\ &+\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{2}}\binom{-1/2}{n+1}\left[2+(1+\xi)^{-3/2-n}\right]x^{n+1}.\end{aligned}$$

Risulta allora che il resto n-simo della formula di Mac Laurin di $g(x)$ è

$$R_n(x;0) = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{2}}\binom{-1/2}{n+1}\left[2+(1+\xi)^{-n-3/2}\right]x^{n+1} \quad , \quad 0<\xi<\frac{x}{2}\;;$$

si vuole che

$$\left|R_n\left(\frac{1}{\pi};0\right)\right| \le 10^{-3}$$

cioè

$$\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{2}}\;\left[2+(1+\xi)^{-n-3/2}\right]\left|\binom{-1/2}{n+1}\right|\;\frac{1}{\pi^{n+1}} \le \frac{1}{10^3}\;.$$

per $0<\xi<\dfrac{1}{2\pi}$. Poiché $(1+\xi)^{-n-3/2}<1$ allora $2+(1+\xi)^{-n-3/2}<3$, inoltre $\dfrac{1}{\pi^{n+1}}<\dfrac{1}{3^{n+1}}$. Perciò basterà scegliere n in modo che sia

$$\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{2}\,3^n}\left|\binom{-1/2}{n+1}\right| < \frac{1}{10^3}\;.$$

Siccome

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n+1} &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!} = (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2^{n+1}(n+1)!} =\\ &= (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\end{aligned}$$

allora basta scegliere $n\in\mathbb{N}$ in modo che sia

$$\frac{(2n+1)!!}{\sqrt{2}\,2^{2n+2}\,3^n(n+1)!} \le \frac{1}{10^3}\;. \qquad \blacksquare$$

[9] Infatti per $\alpha\in\mathbb{R}$ e $k\in\mathbb{N}$ si ha:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{k-1}+\binom{\alpha}{k} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(k-2)]}{(k-1)!}+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(k-1)]}{k!} =\\ = \alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(k-2)]\left[\frac{1}{(k-1)!}+\frac{\alpha-(k-1)}{k!}\right] &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+2)\left(\frac{k+\alpha-k+1}{k!}\right) =\\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+2)}{k!} = \binom{\alpha+1}{k}\;.\end{aligned}$$

Esercizio 5.9. *Determinare la formula di Mac Laurin delle seguenti funzioni in modo che il loro valore nei punti indicati sia dato a meno di un errore non superiore a* 10^{-4}*:*

$$(\mathbf{1})\ \ f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \arctan x \quad \textit{in} \ \ x = \frac{2}{3}\ ,$$

$$(\mathbf{2})\ \ g(x) = 2\sin^2 x - \sinh x \quad \textit{in} \ \ x = \frac{1}{2}\ ,$$

$$(\mathbf{3})\ \ h(x) = \cos^2 x + 2\cosh x \quad \textit{in} \ \ x = \frac{1}{6}\ .$$

■ *Soluzione di* **(2)**. La funzione $\varphi(x) = \sin^2 x$ è C^∞ su $\mathbb{R}$ e

$$\begin{array}{lll}
\varphi'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x & \Longrightarrow & \varphi'(0) = 0 \\
\varphi''(x) = 2\cos 2x & \Longrightarrow & \varphi''(0) = 2 \\
\varphi^{(3)}(x) = -2^2 \sin 2x & \Longrightarrow & \varphi^{(3)}(0) = 0 \\
\varphi^{(4)}(x) = -2^3 \cos 2x & \Longrightarrow & \varphi^{(4)}(0) = -2^3 \\
\varphi^{(5)}(x) = 2^4 \sin 2x & \Longrightarrow & \varphi^{(5)}(0) = 0 \\
\varphi^{(6)}(x) = 2^5 \cos 2x & \Longrightarrow & \varphi^{(6)}(0) = 2^5 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

da cui facilmente si ricava

$$\begin{array}{lll}
\varphi^{(2k)}(x) = (-1)^{k+1} 2^{2k-1} \cos 2x & \Longrightarrow & \varphi^{(2k)}(0) = (-1)^{k+1} 2^{2k-1} \\
\varphi^{(2k+1)}(x) = (-1)^k 2^{2k} \sin 2x & \Longrightarrow & \varphi^{(2k)}(0) = 0\ .
\end{array}$$

Si ha allora la formula di Mac Laurin

$$\sin^2 x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\ x^{2k} + R_{2n+1,\varphi}(x;0)\ .$$

Per la funzione $\psi(x) = \sinh x$ si ha

$$\begin{array}{lll}
\psi^{(2k)}(x) = \sinh x & \Longrightarrow & \psi^{(2k)}(0) = 0 \\
\psi^{(2k+1)}(x) = \cosh x & \Longrightarrow & \psi^{(2k+1)}(0) = 1
\end{array}$$

quindi

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+2,\psi}(x;0)\ .$$

Pertanto per $g(x)$ si ha

$$2\sin^2 x - \sinh x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k} x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + 2R_{2n+1,\varphi}(x;0)$$

dove

$$|2R_{2n+1,\varphi}(x;0)| = \left| 2\ \frac{\varphi^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\ x^{2n+2} \right| = \left| 2\ \frac{2^{2(n+1)-1}\cos 2\xi}{(2n+2)!}\ x^{2n+2} \right| =$$

$$= \left| \frac{2^{2n+2}\cos 2\xi}{(2n+2)!}\ x^{2n+2} \right| \leq \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}\ |x|^{2n+2}\ .$$

Siccome in $x = \dfrac{1}{2}$ deve essere $\left|2R_{2n+1,\varphi}(\frac{1}{2};0)\right| \leq 10^{-4}$, si ha

$$\left|2R_{2n+1,\varphi}(\frac{1}{2};0)\right| \leq \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}\,\frac{1}{2^{2n+2}} = \frac{1}{(2n+2)!}\ ,$$

basta scegliere $n \in \mathbb{N}$ in modo che sia $(2n+2)! \geq 10^4$, e.g. $n = 6$.

■

Esercizio 5.10. *Determinare la formula di Mac Laurin del III ordine con la rappresentazione dell'errore nella forma di Cauchy per le seguenti funzioni:*

$$(\mathbf{1})\ \ f(x) = (2+2x)^{-1/3} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ g(x) = \frac{x^2-3x}{2x+x^2}\ .$$

Esercizio 5.11. *Determinare la formula di Mac Laurin del III ordine con la rappresentazione dell'errore nella forma di Lagrange per le seguenti funzioni:*

$$(\mathbf{1})\ \ h(x) = \tan^2 x - 3x^2 \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ k(x) = \frac{2x+1}{x^2-x}\ .$$

Esercizio 5.12. *Scrivere la formula di Mac Laurin e di Taylor in $x = 3$ del IV ordine con il resto in forma integrale della funzione*

$$\ell(x) = \frac{3x^3-2x^2-5x+6}{x^2-2x-3}\ .$$

6. Esercizi sui numeri complessi

Esercizio 6.1. *Verificare che per ogni $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il numero complesso*

$$(a+bi)e^{\alpha-\beta i} + (a-bi)e^{\alpha+\beta i}$$

è reale.

Esercizio 6.2. *Provare che se $z, w \in \mathbb{C}$ sono tali che $|z+w| = |z-w|$ allora $\arg z = \frac{\pi}{2} + \arg w$.*

Esercizio 6.3. *Che relazione intercorre tra z e $w \in \mathbb{C}$ affinché sia*

$$\operatorname{Arg} \frac{z+w}{z-w} = \frac{\pi}{2}?$$

Esercizio 6.4. *Determinare la forma algebrica e polare dei seguenti numeri complessi*

$$(\mathbf{1})\ \ (2-2i)^4 \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^3 .$$

Esercizio 6.5. *Determinare la forma polare e algebrica dei numeri complessi*

$$(\mathbf{1})\ \ (32i)^{1/5} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ 1^{1/6} .$$

Esercizio 6.6. *Determinare la forma polare di*

$$(\mathbf{1})\ \ \sqrt[4]{-4-4\sqrt{3}i} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ \sqrt[3]{\frac{(1-i)^5}{1+i}} .$$

Esercizio 6.7. *Determinare la forma algebrica dei numeri complessi*

$$(\mathbf{1})\ \ \left(\frac{(i-1)^4}{i}\right)^{1/3} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ \left[(\sqrt{3}+7i)(\sqrt{3}+i)\right]^{1/4} .$$

Esercizio 6.8. *Sia $t = \sqrt{3}+7i$, $w = \sqrt{3}+i$ e $z = -2i$. Determinare la forma algebrica e polare di*

$$t + \frac{zw}{z+w} .$$

Esercizio 6.9. *Determinare la forma algebrica e polare dei seguenti numeri complessi*

$$(\mathbf{1})\ \ \frac{i-\sqrt{3}}{(1-i)^7} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ \frac{1+\sqrt{3}i}{(-\sqrt{3}-i)^{10}} .$$

Esercizio 6.10. *In $\mathbb{C}$ risolvere le seguenti equazioni*

$$(\mathbf{1})\ \ (1+i)^3 z^4 = 1 \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ z^3 + 64 = 0 .$$

Esercizio 6.11. *In $\mathbb{C}$ risolvere le seguenti equazioni*

$$(\mathbf{1})\ \ |z|^2 + \sqrt{3}(\Im m\, z)i = 4-3i \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ |z-\sqrt{2}| = \begin{cases} |z-\sqrt{6}| \\ |z+\sqrt{6}| \end{cases} .$$

Esercizio 6.12. *In* $\mathbb{R}^2$ *determinare i seguenti insiemi:*

$$(\mathbf{1});\ \{z \in \mathbb{C} : |z-2| \leq 4\} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Arg} z = \frac{3}{4}\pi\}\ ,$$

$$(\mathbf{3})\ \{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 4\} \quad , \quad (\mathbf{4})\ \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = \frac{1}{2}|(2\,\Im m\, z + 1)i|\}\ .$$

Esercizio 6.13. *Determinare i valori di* $\lambda \in \mathbb{R}$ *per cui*

(1) *l'equazione* $\lambda z^2 - 2z + 1 = 0$ *ha radici complesse coniugate di modulo* 1

(2) *l'equazione* $\lambda z^2 - 2z + 1 = 0$ *ha radici complesse coniugate di modulo* $\frac{1}{2}$

(3) *l'equazione* $z^4 - 2\lambda z^2 + 4 = 0$ *non ha radici reali.*

Esercizio 6.14. *Determinare i valori di* $\lambda \in \mathbb{C}$ *affinché siano risolubili i seguenti sistemi lineari*

$$(\mathbf{1})\ \begin{cases} \lambda^2 x - y = 0 \\ |\lambda| x + y - 1 - \lambda^2 = 0 \end{cases} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \begin{cases} \lambda^2 x + y = 1 + \lambda^2 \\ x + \lambda^2 y = \lambda(1+\lambda^2) \end{cases} \quad .$$

Esercizio 6.15. *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *le seguenti equazioni*

$$(\mathbf{1})\ z^4 - 2iz^2 - 1 - (1+i)^2 = 0 \quad , \quad (\mathbf{2})\ z^6 + z^3 + 1 = 0\ ,$$

$$(\mathbf{3})\ 2z^6 + 2z^3 + 1 = 0\ .$$

Esercizio 6.16. *Determinare la forma algebrica dei numeri complessi*

$$\frac{5-i}{2-i} \quad , \quad \frac{4-2i}{3-4i} \quad , \quad \overline{2+3i+(2+3i)(1-3i)}\ .$$

Esercizio 6.17. *Trovare* $z \in \mathbb{C}$ *tale che sommato al doppio del suo coniugato dia* $5 - 3i$*.*

Esercizio 6.18. *Rappresentare in forma polare i numeri complessi* 3, $\sqrt{2}$, $4+4i$, $\sqrt[6]{-1}$, $1^{1/6}$, $(-1)^{1/3}$, $\sqrt[3]{-i}$, $i^{-1/3}$.

Esercizio 6.19. *In* $\mathbb{C}$ *risolvere le equazioni*

$$z^2 + 2z + i = 0 \quad , \quad z\,|z| - 2z - 1 = 0 \quad , \quad z^2 + z\overline{z} = 1 + 2i \quad , \quad z^3 - 6z + 4 = 0\ .$$

Esercizio 6.20. *Determinare i valori di* $\lambda \in \mathbb{R}$ *per cui tutte le soluzioni dell'equazione* $z^4 - 2z^2 + \lambda = 0$ *non siano reali.*

■ *Soluzione.* Poniamo $w = z^2 \in \mathbb{C}$, quindi l'equazione diventa $w^2 - 2w + \lambda = 0$. Poiché[10]

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{4 - 4\lambda}{4} = 1 - \lambda \in \mathbb{R}$$

[10]Se $az^2 + bz + c = 0$, per $a, b, c \in \mathbb{C}$, allora le sue soluzioni sono

$$z = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}) \quad \text{per} \quad r = \left|\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right|\ ,\ \ \theta = \operatorname{Arg}\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\ .$$

le soluzioni dell'equazione sono

$$w = 1 \pm \sqrt{|1-\lambda|}\big(\cos\frac{\mathrm{Arg}(1-\lambda)}{2} + i \sin\frac{\mathrm{Arg}(1-\lambda)}{2}\big)$$

dove in tal caso $|1-\lambda|$ è il valore assoluto del numero reale $1-\lambda$ e $\mathrm{Arg}(1-\lambda) = 0$ se $1-\lambda \geq 0$ e $\mathrm{Arg}(1-\lambda) = \pi$ se $1-\lambda < 0$. Per $\lambda = 1$ è $w = 1$ e pertanto l'equazione $z^4 - 2z^2 + \lambda = 0$ ha le due soluzioni reali (ciascuna di molteplicità due) $z = \pm 1$. Se $1-\lambda > 0$ (i.e. $\lambda < 1$) allora $w = 1 \pm \sqrt{1-\lambda} \in \mathbb{R}$, di conseguenza l'equazione $z^4 - 2z^2 + \lambda = 0$ ha tutte radici non reali se $1 \pm \sqrt{1-\lambda} < 0$ ovvero se in contemporanea è $\sqrt{1-\lambda} < -1$ e $\sqrt{1-\lambda} > 1$. Poiché la prima è falsa, nel caso $\lambda < 1$ l'equazione $z^4 - 2z^2 + \lambda = 0$ ha almeno una soluzione reale. Infine se $1-\lambda < 0$ (i.e. $\lambda > 1$) allora $w = 1 \pm \sqrt{\lambda - 1}(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}) = 1 \pm i\sqrt{\lambda-1}$ e le soluzioni dell'equazione dell'esercizio sono tutte complesse, date da z_0, $\overline{z}_0$, $-z_0$, $-\overline{z}_0$ per $z_0 = \sqrt{\lambda}(\cos\theta + i \sin\theta)$ con $\theta = \dfrac{\arctan\sqrt{\lambda-1}}{2}$.

In conclusione l'equazione $z^4 - 2z^2 + \lambda = 0$, per $\lambda \in \mathbb{R}$, ha tutte soluzioni non reali per $\lambda > 1$.

■

Osservazione 6.1. È noto che per $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad , \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

da cui si ricava

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \ . \tag{6.1}$$

I secondi membri della (6.1) hanno senso anche per $z \in \mathbb{C}$, quindi definiamo il *coseno* e il *seno di un numero complesso* $z \in \mathbb{C}$ come

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ .$$

Esercizio 6.21. *Verificare che per* $z \in \mathbb{C}$

- **(1)** $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$, $\sin(z + 2k\pi) = \sin z$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$;
- **(2)** $\cos^2 z + \sin^2 = 1$;
- **(3)** $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$, $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$;
- **(4)** $\cos\frac{z}{2} = \left(\frac{1+\cos z}{2}\right)^{1/2}$, $\sin\frac{z}{2} = \left(\frac{1-\cos z}{2}\right)^{1/2}$.

■ *Soluzione di* **(1)**. Si ha

$$\begin{aligned}\cos(z+2k\pi) &= \frac{e^{i(z+2k\pi)} + e^{-i(z+2k\pi)}}{2} = \frac{e^{iz}e^{i2k\pi} + e^{-iz}e^{-i2k\pi}}{2} = \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(z+2k\pi) &= \frac{e^{i(z+2k\pi)} - e^{-i(z+2k\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz}e^{i2k\pi} - e^{-iz}e^{-i2k\pi}}{2i} = \\ &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z \ .\end{aligned}$$

Soluzione di **(2)**. Si ha

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{1}{4}\left[\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)^2 - \left(e^{iz}-e^{-iz}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{2iz}+2+e^{-2iz} - \left(e^{2iz}-2+e^{-2iz}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2iz}+2+e^{-2iz} - e^{2iz}+2-e^{-2iz}\right) = 1\ .$$

Soluzione di **(3)**. Si ha

$$\cos^2 z - \sin^2 z = \frac{\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)^2}{4} + \frac{\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)^2}{4} =$$

$$= \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}+e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{4} =$$

$$= \frac{2e^{2iz}+2e^{-2iz}}{4} = \frac{e^{2iz}+e^{-2iz}}{2} = \cos 2z\ ,$$

$$2\sin z\cos z = 2\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\quad\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{e^{2iz}-e^{-2iz}}{2i} = \sin 2z\ .$$

Soluzione di **(4)**. Si ha

$$\frac{1+\cos z}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right) = \frac{2+e^{iz}+e^{-iz}}{4} =$$

$$= \frac{2+e^{2i\,z/2}+e^{-2i\,z/2}}{4} = \frac{\left(e^{i\,z/2}+e^{-i\,z/2}\right)^2}{4} = \cos^2\frac{z}{2}\ ,$$

$$\frac{1-\cos z}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right) = \frac{2-e^{iz}-e^{-iz}}{4} = \frac{2-e^{2i\,z/2}-e^{-2i\,z/2}}{4} =$$

$$= -\frac{\left(e^{i\,z/2}-e^{-i\,z/2}\right)^2}{4} = \sin^2\frac{z}{2}$$

di conseguenza

$$\cos\frac{z}{2} = \left(\frac{1+\cos z}{2}\right)^{1/2}\quad,\quad \sin\frac{z}{2} = \left(\frac{1-\cos z}{2}\right)^{1/2}\ .$$

■

7. Esercizi sugli integrali indefiniti

Premettiamo una breve ricapitolazione delle sostituzioni da fare in alcuni tipi di integrali classici.

Integrazione di funzioni razionali fratte

• Si consideri l'integrale

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

dove $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. La sostituzione

$$t = \frac{2ax + b}{2Aa}$$

permette di scrivere

$$I = \int \frac{A\,dt}{aA^2\,(t^2+1)} = \frac{1}{aA}\ \arctan t + C$$

ovvero

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\ \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C\ .$$

• Si consideri l'integrale

$$I = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \quad , \quad p(x),\ q(x) \text{ polinomi in } x\ .$$

(i) $\mathrm{gr}(p(x)) < \mathrm{gr}(q(x))$,

$$q(x) = a(x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_h)^{m_h} (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^{n_1} \cdots (a_k x^2 + b_k x + c_k)^{n_k}\ ,$$

con $\Delta_j = b_j^2 - 4a_j c_j < 0$, $1 \le j \le k$, si decompone

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{h} \frac{A_i}{x - x_i} + \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{B_j}{a_j x^2 + b_j x + c_j} + \frac{C_j(2a_j x + b_j)}{a_j x^2 + b_j x + c_j}\right] +$$

$$+ \frac{d}{dx}\left(\frac{s(x)}{\prod_{i=1}^{h}(x - x_i)^{m_i - 1} \prod_{j=1}^{k}(a_j x^2 + b_j x + c_j)^{n_j - 1}}\right)\ .$$

Quindi

$$I = \sum_{i=1}^{h} A_i \log|x - x_i| + \sum_{j=1}^{k} \frac{2B_j}{\sqrt{-\Delta_j}}\ \arctan\left(\frac{2a_j x + b_j}{\sqrt{-\Delta_j}}\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} C_j \log(a_j x^2 + b_j x + c_j) +$$

$$+ \frac{s(x)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{h}(x - x_i)^{m_i - 1} \prod_{j=1}^{k}(a_j x^2 + b_j x + c_j)^{n_j - 1}} + C\ .$$

(ii) $\mathrm{gr}(p(x)) \ge \mathrm{gr}(q(x))$: si esegue la divisione tra $p(x)$ e $q(x)$ ottenendo

$$p(x) = m(x)q(x) + r(x) \quad , \quad \mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(q(x))$$

quindi

$$I = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int m(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx$$

e l'integrale $\displaystyle\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx$ si risolve come in **(i)**.

Integrali trigonometrici

• Si consideri l'integrale

$$I = \int R(\cos x, \sin x)\ dx\ ;$$

la sostituzione

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

dà

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}\ .$$

Queste riconducono l'integrale dato all'integrale di una funzione razionale fratta.

Integrali abeliani

• Si consideri l'integrale

$$I = \int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx$$

con la sostituzione

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

ci si riconduce ad un integrale di una funzione razionale fratta.

• Si consideri l'integrale

$$I = \int R(x, \sqrt{x^2+a})\,dx$$

con la sostituzione

$$(t+x)^2 = x^2 + a \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

ci si riconduce all'integrale di una funzione razionale fratta

• Si consideri l'integrale

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx\ .$$

Se $a > 0$ si considera la sostituzione

$$t = \frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}\ .$$

Se $a < 0$ si considera la sostituzione

$$t = \frac{-2ax-b}{\sqrt{\Delta}}\ .$$

In ogni caso si è ricondotti all'integrale di una funzione razionale fratta.

Integrale differenziale binomio

• Si consideri l'integrale

$$I_{m,n,p} = \int x^m (a+bx^n)^p \, dx \tag{7.1}$$

con $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Questo è risolubile se almeno uno tra p, $\frac{m+1}{n}$, $p + \frac{m+1}{n}$ è intero. Le sostituzioni da fare sono:

- Se $p \in \mathbb{Z}$ si considera la sostituzione
$$t = x^{1/s_1 s_2} \quad \text{per} \;\; m = \frac{r_1}{s_1} \;, \;\; n = \frac{r_2}{s_2} \;.$$
- Se $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, scritto $p = \frac{r}{s}$, si considerano due casi:
  (i) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$: si prende
$$t = (a+bx^n)^{1/s} \;,$$
  (ii) $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$: si prende
$$t = x^n, \; u = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{1/s} \;.$$

In ogni caso si è ricondotti all'integrale di una funzione razionale fratta.

Esercizi

Esercizio 7.1. *Calcolare i seguenti integrali indefiniti*

$$(\mathbf{1}) \;\; \int \sinh x \, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \;\; \cosh x \, dx \;.$$

■ *Soluzione di* **(1)**. L'integrale è immediato e

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C \;.$$

Soluzione di **(2)**. Come per **(1)**,

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C \;.$$

■

Esercizio 7.2. *Calcolare i seguenti integrali:*

$$(\mathbf{1}) \;\; \int x^{4/5} \, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \;\; \int x^2 \sqrt{x^3+5} \, dx \;.$$

Esercizio 7.3. *Calcolare i seguenti integrali*

$$(\mathbf{1}) \quad \int x\sqrt{6+x^2}\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int (x+1)(x^2+2x-5)^{6/7}\,dx \ .$$

Esercizio 7.4. *Calcolare*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \sin^3 x \cos^4 x\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int x^4 \log x\,dx \ .$$

Esercizio 7.5. *Calcolare*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \sin\log x\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \arcsin x\,dx \ .$$

Esercizio 7.6. *Calcolare i seguenti integrali*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \arccos x\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \ .$$

Esercizio 7.7. *Calcolare i seguenti integrali*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{6}{x^{-4/5}}\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int 4\sinh x\,dx \ .$$

Esercizio 7.8. *Calcolare*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{3x}{x^2-3x+2}\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{2x+1}{x^2-3x+3}\,dx \ .$$

Esercizio 7.9. *Calcolare*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \ .$$

Esercizio 7.10. *Calcolare*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{1}{e^{-x/3}}\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x}\,dx \ .$$

Esercizio 7.11. *Calcolare gli integrali*

$$(\mathbf{1}) \quad \int (3x+1)^{2/3}\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int (4x-9)^5\,dx \ .$$

Esercizio 7.12. *Calcolare gli integrali*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{5}{\cos^2 x}\,dx \ .$$

Esercizio 7.13. *Calcolare gli integrali*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{3}{\sin x}\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{3}{\cos x}\,dx \ .$$

Esercizio 7.14. *Calcolare i seguenti integrali*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{\sqrt{\pi}}{1+\tan^2 x}\, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\, \arcsin x}\, dx \; .$$

Esercizio 7.15. *Calcolare*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \; .$$

Esercizio 7.16. *Risolvere i seguenti integrali:*

$$(\mathbf{1}) \quad l \int \frac{\arcsin^{-4/7} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\, dx \; .$$

Esercizio 7.17. *Risolvere gli integrali:*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{2+\sin x}{(\sin x - \cos x)^3}\, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int x^4 \sin x\, dx \; .$$

Esercizio 7.18. *Risolvere*

$$(\mathbf{1}) \quad \int e^{4x} \cos x\, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \sqrt{x}\, \log x\, dx \; .$$

Esercizio 7.19. *Risolvere gli integrali:*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{x^3+1}{x^3+3x^2-4}\, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{x^3-1}{x^3+3x^2-4}\, dx \; .$$

Esercizio 7.20. *Risolvere gli integrali*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{x^2+x+1}{(2x+3)^2(3x-1)}\, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{4x-3}{(2x^2-3x+2)^3}\, dx \; .$$

Esercizio 7.21. *Risolvere*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{x^3-x^2+x-1}{(2x^2-3x+2)^2}\, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{\tan x}{1-\sin x}\, dx \; .$$

Esercizio 7.22. *Calcolare gli integrali*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{\sin x}{1+\cos x}\, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{\cos x}{1+\cos x}\, dx \; .$$

Esercizio 7.23. *Calcolare gli integrali*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{\sin x}{1+\sin x}\, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \sqrt{a-x^2}\, dx \quad , \quad a > 0 \; .$$

Esercizio 7.24. *Trovare le formule iterative per*

$$I_n = \int \sin^n x\, dx \quad , \quad J_n = \int \cos^n x\, dx \; ,$$

dove $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 7.25. *Trovare le formule iterative per*

$$I_n = \int e^x \sin^n x \, dx \quad , \quad J_n = \int e^x \cos^n x \, dx \ ,$$

dove $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

Esercizio 7.26. *Determinare, in funzione di* $m, n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, *la soluzione dell'integrale*

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx \ .$$

Esercizio 7.27. *Calcolare i seguenti integrali:*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{x^3}{(x^4+1)^2} \, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{x^3-1}{(x^4+1)^2} \, dx \ .$$

Esercizio 7.28. *Calcolare:*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{x^2+x-1}{(2x+1)^2(x^2+2x+2)} \, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}} \ .$$

Esercizio 7.29. *Calcolare*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \sqrt{x^2+5} \, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2}} \, dx \ .$$

Esercizio 7.30. *Calcolare*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+11}} \, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{x-1}{1-\sqrt{x^2-3x+2}} \, dx \ .$$

Esercizio 7.31. *Risolvere gli integrali*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \sqrt{-x^2+x-1} \, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \sqrt{-x^2+x+1} \, dx \ ,$$

$$(\mathbf{3}) \quad \int (x+2)\sqrt{x^2+4x+3} \, dx \ .$$

Esercizio 7.32. *Trovare la formula iterativa per*

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2-1)^n} \ ,$$

per $n \in \mathbb{N}$.

■ *Soluzione.* Si ha

$$\text{per} \quad n = 0 \quad , \quad I_0 = \int dx = x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{per} \quad n = 1 \quad , \quad I_1 = \int \frac{dx}{x^2-1} = \log \sqrt{\left| \frac{x-1}{x+1} \right|} + c \ , \quad c \in \mathbb{R}$$

perché

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} \quad \Longrightarrow \quad A_1 = -A_2 = \frac{1}{2} \ .$$

Sia $n \geq 2$ e decomponiamo

$$\frac{1}{(x^2-1)^n} = \frac{1-x^2+x^2}{(x^2-1)^n} = \frac{x^2}{(x^2-1)^n} - \frac{1}{(x^2-1)^{n-1}} \tag{7.2}$$

dove

$$\int \frac{x^2}{(x^2-1)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2-1)^n}\,x\,dx =$$

$$\underset{\text{per parti}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{(x^2-1)^{-n+1}}{1-n}\,x - \frac{1}{1-n}\int (x^2-1)^{-n+1}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2-2n}\,\frac{x}{(x^2-1)^{n-1}} - \frac{1}{2-2n}\,I_{n-1}\,.$$

Allora integrando la (7.2) si ottiene

$$I_n = \frac{1}{2-2n}\,\frac{x}{(x^2-1)^{n-1}} - \frac{1}{2-2n}\,I_{n-1} - I_{n-1}$$

ovvero la formula iterativa

$$I_n = \frac{1}{2-2n}\,\frac{x}{(x^2-1)^{n-1}} - \frac{3-2n}{2-2n}\,I_{n-1}\,. \tag{7.3}$$

■

Esercizio 7.33. *Trovare la formula iterativa per*

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}\,,$$

per $n \in \mathbb{N}$.

■ *Soluzione.* Si ha

$$\text{per}\quad n=0 \quad,\quad J_0 = \int dx = x + c \quad,\quad c \in \mathbb{R}$$
$$\text{per}\quad n=1 \quad,\quad J_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + c \;\;,\;\; c \in \mathbb{R}\,.$$

Sia $n \geq 2$ e decomponiamo

$$\frac{1}{(x^2+1)^n} = \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)^n} \tag{7.4}$$

dove

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^n}\,x\,dx =$$

$$\underset{\text{per parti}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+1)^{-n+1}}{1-n}\,x - \frac{1}{1-n}\int (x^2+1)^{-n+1}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2-2n}\,\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2-2n}\,J_{n-1}\,.$$

Allora integrando la (7.4) si ottiene

$$J_n = J_{n-1} - \frac{1}{2-2n}\ \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2-2n}\ J_{n-1}$$

ovvero la formula iterativa

$$J_n = \frac{3-2n}{2-2n}\ J_{n-1} - \frac{1}{2-2n}\ \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}\ . \tag{7.5}$$

■

Esercizio 7.34. *Sia $a \in \mathbb{R}$. Trovare la formula iterativa per*

$$I_{a,n} = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} \quad , \quad J_{a,n} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\ .$$

■ *Soluzione per $I_{a,n}$.*

$$\begin{aligned} &\text{per}\ \ n=0 \quad , \quad I_{a,0} = \int dx = x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \\ &\text{per}\ \ n=1 \quad , \quad I_{a,1} = \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c \ \ , \ \ c \in \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

Sia $n \geq 2$, posto $t = \dfrac{x}{a}$ si ha

$$I_{a,n} = \frac{1}{a^{2n}} \int \frac{dx}{\left[\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - 1\right]^n} = \frac{1}{a^{2n}} \int \frac{a}{(t^2-1)^n}\ dt = \frac{1}{a^{2n-1}}\ I_n$$

Applicando allora la formula iterativa (7.3) si ottiene

$$I_{a,n} = \frac{1}{a^{2n-1}}\left(\frac{1}{2-2n}\ \frac{t}{(t^2-1)^{n-1}} - \frac{3-2n}{2-2n}\ I_{n-1}\right)$$

ovvero, essendo $I_{a,n-1} = \dfrac{1}{a^{2n-3}} I_{n-1}$, a conti fatti, si ha la formula iterativa

$$I_{a,n} = \frac{1}{(2-2n)a^2}\left[\frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} - (3-2n) I_{a,n-1}\right]\ . \tag{7.6}$$

Soluzione per $J_{a,n}$.

$$\begin{aligned} &\text{per}\ \ n=0 \quad , \quad J_{a,0} = \int dx = x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \\ &\text{per}\ \ n=1 \quad , \quad J_{a,1} = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\ \arctan\frac{x}{a} + c \ \ , \ \ c \in \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

Sia $n \geq 2$, posto $t = \dfrac{x}{a}$ si ha

$$J_{a,n} = \frac{1}{a^{2n}} \int \frac{dx}{\left[\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + 1\right]^n} = \frac{1}{a^{2n}} \int \frac{a}{(t^2+1)^n}\ dt = \frac{1}{a^{2n-1}}\ J_n$$

Applicando allora la formula iterativa (7.5) si ottiene

$$J_{a,n} = \frac{1}{a^{2n-1}} \left(\frac{3-2n}{2-2n} \, J_{n-1} - \frac{1}{2-2n} \, \frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} \right)$$

ovvero, essendo $J_{a,n-1} = \dfrac{1}{a^{2n-3}} J_{n-1}$, a conti fatti, si ha la formula iterativa

$$J_{a,n} = \frac{1}{(2-2n)a^2} \left[(3-2n) J_{a,n-1} - \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} \right] . \tag{7.7}$$

■

Esercizio 7.35. *Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Trovare la formula iterativa per*

$$K_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} .$$

■ *Soluzione.* Sia $t = 2ax + b$, allora

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a} \, x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{4a} [(2ax+b)^2 - \Delta] = \frac{1}{2^2 a} (t^2 - \Delta) .$$

Pertanto integrando per sostituzione si ha:

$$K_n = 2^{2n-1} a^{n-1} \int \frac{dt}{(t^2 - \Delta)^n} .$$

Se $\Delta > 0$, posto $\Delta = A^2$ si ottiene

$$K_n = 2^{2n-1} a^{n-1} I_{A,n} \quad \Longrightarrow \quad I_{A,n} = \frac{1}{2^{2n-1} a^{n-1}} \, K_n$$

che dalla (7.6) dà

$$K_n = \frac{2^{2n-1} a^{n-1}}{(2-2n)A^2} \left[\frac{t}{(t^2 - A^2)^{n-1}} - (3-2n) I_{A,n-1} \right] =$$

$$= \frac{2^{2n-1} a^{n-1}}{(2-2n)\Delta} \left[\frac{2ax+b}{[(2ax+b)^2 - \Delta]^{n-1}} - \frac{3-2n}{2^{2n-3} a^{n-2}} \, K_{n-1} \right]$$

ovvero, essendo $(2ax+b)^2 - \Delta = 4a(ax^2+bx+c)$, si ha la formula iterativa

$$K_n = \frac{1}{(1-n)\Delta} \left[\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} - 2a(3-2n) \, K_{n-1} \right] . \tag{7.8}$$

Se invece $\Delta < 0$, posto $\Delta = -A^2$ si ottiene

$$K_n = 2^{2n-1} a^{n-1} J_{A,n} \quad \Longrightarrow \quad J_{A,n} = \frac{1}{2^{2n-1} a^{n-1}} \, K_n$$

che dalla (7.7) dà

$$K_n = \frac{2^{2n-1} a^{n-1}}{(2-2n)A^2} \left[(3-2n) J_{A,n-1} - \frac{t}{(t^2 + A^2)^{n-1}} \right] =$$

$$= -\frac{2^{2n-1} a^{n-1}}{(2-2n)\Delta} \left[\frac{3-2n}{2^{2n-3} a^{n-2}} \, K_{n-1} - \frac{2ax+b}{[(2ax+b)^2 - \Delta]^{n-1}} \right]$$

ovvero (essendo sempre $(2ax+b)^2 - \Delta = 4a(ax^2+bx+c)$), si ha la formula iterativa

$$K_n = \frac{1}{(1-n)\Delta}\left[\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} - 2a(3-2n)\,K_{n-1}\right] . \tag{7.9}$$

Si osservi che la (7.8) e la (7.9) sono la stessa formula.

■

Esercizio 7.36. *Calcolare i seguenti integrali*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{x^2}{(x^2-3)^3}\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{x+1}{(x^2+2)^4}\,dx \ .$$

Esercizio 7.37. *Calcolare*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{x^2}{(x^2-3)^{3/2}}\,dx \ .$$

Esercizio 7.38. *Calcolare*

$$(\mathbf{1}) \quad \int x^2(x^2-3)^{3/2}\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{x^5}{\sqrt{x^3+6}}\,dx \ .$$

Esercizio 7.39. *Calcolare i seguenti integrali:*

$$(\mathbf{1}) \quad \int \frac{x^7}{(3+2x)^{1/2}}\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int \frac{x^3}{(3+2x^5)^{3/2}}\,dx \ ,$$

$$(\mathbf{3}) \quad \int x^3(3x^2+5)^{5/2}\,dx \ .$$

8. Esercizi sugli integrali generalizzati

Esercizio 8.1. *Verificare l'eventuale convergenza dei seguenti integrali generalizzati:*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\,\log x} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^3 - \log x)}\, dx\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \frac{1}{x\log x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ \alpha > 1 \\ 0 & \text{se } \ 0 < \alpha \le 1\ , \end{cases}$$

quindi il criterio per la convergenza degli integrali impropri del tipo $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è inefficace. Usando allora la definizione di questo integrale generalizzato si ha:

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\log x} = \lim_{b\to+\infty} \int_3^b \frac{dx}{x\log x} = \lim_{b\to+\infty} \int_3^b \frac{1/x}{\log x}\, dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \log|\log x|\Big|_3^b = \lim_{b\to+\infty} (\log\log b - \log\log 3) = +\infty$$

quindi l'integrale diverge.

Soluzione di **(2)**. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x(x^3 - \log x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x^4\left(1 - \dfrac{\log x}{x}\right)} = 0$$

per cui la funzione integranda è infinitesima per $x \to +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{x(x^3 - \log x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{x^4\left(1 - \dfrac{\log x}{x}\right)} = 0$$

se $0 < \alpha < 4$: in particolare questo vale per $\alpha = 3 > 1$ e, dal criterio della convergenza per gli integrali del tipo $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, l'integrale dato converge.

■

Esercizio 8.2. *Verificare la convergenza dei seguenti integrali ed eventualmente calcolarli:*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^3} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\, dx\ .$$

Esercizio 8.3. *Verificare la convergenza di*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+5}{(x^2+3)^2}\, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin x}{x}\, dx\ .$$

■ *Soluzione di* **(2)**. Poiché la funzione $\sin x$ è limitata (pur non avendo limite per $x \to -\infty$), si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha \frac{\sin x}{x} = -\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha \frac{\sin x}{|x|} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} |x|^{\alpha-1} \sin x = \begin{cases} \text{non esiste} & \text{se } \alpha \geq 1 \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1 \, . \end{cases}$$

Quindi il criterio per la convergenza degli integrali impropri del tipo $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ è inefficace. Integrando per parti si ottiene:

$$\lim_{b\to-\infty} \int_b^{-1} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b\to-\infty} -\frac{\cos x}{x}\bigg|_b^{-1} - \int_{-\infty}^{-1} \frac{\cos x}{x^2}\,dx =$$

$$= \cos 1 + \lim_{b\to-\infty} \frac{\cos b}{b} - \int_{-\infty}^{-1} \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \cos 1 - \int_{-\infty}^{-1} \frac{\cos x}{x^2}\,dx \, .$$

Ora

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} |x|^{\alpha-2} \cos x = 0$$

se $\alpha - 2 < 0$, i.e. per $\alpha < 2$. Scelto allora un qualsiasi valore $1 < \alpha < 2$ (ad esempio $\alpha = \frac{3}{2}$), dal criterio per la convergenza degli integrali impropri del tipo $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$, l'integrale

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

converge e quindi converge anche l'integrale improprio dato.

■

Esercizio 8.4. *Verificare la convergenza di*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_1^{+\infty} \sqrt{x}\, \sin x^2\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \, .$$

Esercizio 8.5. *Verificare la convergenza di*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \log x} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{(2\sqrt{x}+7)^{8/5}}\,dx \, .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \frac{1}{x^2 \log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{2-\alpha} \log x} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha \leq 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2 \, . \end{cases}$$

Scelto ad esempio $\alpha = 2 > 1$, dal criterio per la convergenza degli integrali del tipo $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, l'integrale dato converge.

Esercizio 8.6. *Verificare la convergenza degli integrali impropri:*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2\sqrt{x}+7)^{8/5}} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2\sqrt{x}+7)^{8/3}} \, .$$

Esercizio 8.7. *Verificare l'eventuale convergenza degli integrali impropri:*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_{-\infty}^{1} \frac{2x-1}{(1-x^5)^4+3}\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{(1-x^5)^4+3}\,.$$

Esercizio 8.8. *Quali dei seguenti integrali diverge?*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{x-3}{x^3-\log x}\,dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_{-\infty}^{1} \left(-1+e^{x^{-1/3}}\right)dx\,.$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{x^3-\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}{x^3\left(1-\dfrac{\log x}{x^3}\right)} = 0$$

quindi la funzione integranda è infinitesima per $x \to +\infty$ e inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}\,\frac{(x-3)}{x^3-\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+1}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}{x^3\left(1-\dfrac{\log x}{x^3}\right)} = 1$$

se $\alpha+1=3$ ovvero per $\alpha=2>1$. L'integrale converge dal criterio per la convergenza degli integrali impropri del tipo $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Soluzione di **(2)**. Scritto $x^{-1/3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-1+e^{x^{-1/3}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{1/\sqrt[3]{x}}-1\right) \underset{y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{=} \lim_{y\to0^-}(e^y-1) = 0$$

per cui la funzione integranda $-1+e^{x^{-1/3}}$ è infinitesima per $x\to-\infty$; inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^{\alpha}\left(e^{x^{-1/3}}-1\right) = \lim_{x\to-\infty} |x|^{\alpha}\left(e^{1/\sqrt[3]{x}}-1\right) =$$

$$\underset{y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{=} \lim_{y\to0^-} \frac{e^y-1}{|y^3|^{\alpha}} = \lim_{y\to0^-} \frac{e^y-1}{|y|^{3\alpha}} = -1$$

se $3\alpha=1$, ovvero la funzione integranda è infinitesima di ordine $\alpha = \dfrac{1}{3} < 1$ e questo non permetterebbe di concludere sul comportamento dell'integrale generalizzato dato. Tuttavia, per x < 0, è $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} < 0$, perciò $e^{1/\sqrt[3]{x}} < 1$. Dunque la funzione integranda è una funzione infinitesima per $x\to-\infty$ di ordine < 1 di segno costante (negativo) e pertanto l'integrale diverge.

■

Esercizio 8.9. *Calcolare i seguenti integrali impropri*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_{5}^{+\infty} \frac{dx}{x\log^n x} \quad , \quad n\in\mathbb{N}\backslash\{0\} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{3x+1}{x^3+4}\,dx\,.$$

Esercizio 8.10. *Calcolare i seguenti integrali*

$$(\mathbf{1})\quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} \quad , \quad (\mathbf{2})\quad \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+3}\, dx\ ,$$

$$(\mathbf{3})\quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\ .$$

■ *Soluzione di* **(2)**. L'integrale è generalizzato sia perché l'intervallo di integrazione è superiormente illimitato sia perché la funzione integranda è un infinito per $x \to 0^+$. Tuttavia è facile provare che la funzione integranda, per $x \to +\infty$, è infinitesima di ordine superiore ad ogni α, $1 < \alpha < 2$, mentre per $x \to 0^+$ è un infinito di ordine inferiore ad ogni α, $0 < \alpha < 1$. Quindi l'integrale converge e avremo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+3}\, dx = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\dfrac{x^2}{3}+1}\, dx \underset{t=\frac{x}{\sqrt{3}}}{=} \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\log \sqrt{3}\, t}{t^2+1}\, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\log \sqrt{3}}{t^2+1}\, dt + \int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2+1}\, dt \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \log \sqrt{3} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2+1}\, dt\ .$$

Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \arctan t \Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}\ .$$

Per calcolare il secondo integrale poniamo dapprima $s = \arctan t$ da cui $t = \tan s$ e quindi $dt = (1+\tan^2 s)\, ds$. Allora

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2+1}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \tan s}{\tan^2 s + 1}\, (1+\tan^2 s)\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan s\, ds =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin s\, ds - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos s\, ds\ .$$

Ora, posto $u = \dfrac{\pi}{2} - s$, si ha $ds = -du$ e $\cos s = \cos(\dfrac{\pi}{2} - u) = \sin u$, da cui

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos s\, ds = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \log \sin u\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin u\, du\ .$$

Sostituendo si ottiene:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2+1}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin s\, ds - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin s\, ds = 0\ .$$

In conclusione

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+3}\, dx = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}\ \log \sqrt{3}\ .$$

Esercizio 8.11. *Verificare l'eventuale convergenza dei seguenti integrali generalizzati:*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2\, dx \; .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\, dx = \int_{-\infty}^{0} \sin x^2\, dx + \int_{0}^{+\infty} \sin x^2\, dx = 2\int_{0}^{+\infty} \sin x^2 dx$$

perché in ogni caso $x^2 \in [0, +\infty)$. Ora

$$\int \sin x^2\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$$

avendo considerato la sostituzione $x^2 = t$, quindi

$$\int_{0}^{+\infty} \sin x^2\, dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt\right) \; .$$

Siccome

$$\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{t}}$$

l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$$

converge. Si ha poi

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\cos t}{t^{1/2}}\bigg|_1^b - \frac{1}{2}\int_1^b \frac{\cos t}{t^{3/2}}\, dt\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\cos b}{b^{1/2}} + \cos 1 - \frac{1}{2}\int_1^b \frac{\cos t}{t^{3/2}}\, dt\right)$$

dove

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{\cos b}{b^{1/2}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\cos t}{t^{3/2}}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\, dt \; .$$

Poiché

$$\left|\frac{\cos t}{t^{3/2}}\right| \le \frac{1}{t^{3/2}}$$

con $\dfrac{1}{t^{3/2}}$ integrabile in senso generalizzato in $[1, +\infty)$, si ottiene che l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\, dt$$

converge. Pertanto, poiché

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = -\lim_{b\to+\infty} \frac{\cos b}{b^{1/2}} + \cos 1 - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\, dt = \cos 1 - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\, dt \; ,$$

l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$ converge. In conclusione l'integrale **(1)** converge.

Soluzione di **(2)**. Si risolve come **(1)** appena svolto.

■

Esercizio 8.12. *Sia $a > 0$. Determinare per quali valori di $u, v > 0$ convergono gli integrali generalizzati*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_a^{+\infty} x^u \sin x^v \, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_a^{+\infty} x^u \cos x^v \, dx \; .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. La funzione integranda $f(x) = x^u \sin x^v$ non ha singolarità in $[a, +\infty)$ per $a > 0$. Integrando per parti si ottiene

$$\int_a^{+\infty} x^u \sin x^v \, dx = -\frac{1}{v} \lim_{b \to +\infty} \left[(x^{u-v+1} \cos x^v) \Big|_a^b + \frac{u-v+1}{v} \int_a^b \frac{\cos x^v}{x^{v-u}} \, dx \right] =$$

$$= -\frac{1}{v} \lim_{b \to +\infty} \left(b^{u-v+1} \cos b^v - a^{u-v+1} \cos a^v + \frac{u-v+1}{v} \int_a^b \frac{\cos x^v}{x^{v-u}} \, dx \right)$$

dove

$$\lim_{b \to +\infty} b^{u-v+1} \cos b^v \begin{cases} \text{non esiste} & \text{se} \;\; u - v + 1 \geq 0 \\ = 0 & \text{se} \;\; u - v + 1 < 0 \end{cases}$$

Resta perciò soltanto il caso $u - v + 1 < 0$ i.e. $v - u > 1$. Inoltre

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{\cos x^v}{x^{v-u}} \, dx = \int_a^{+\infty} \frac{\cos x^v}{x^{v-u}} \, dx$$

dove

$$\left| \frac{\cos x^v}{x^{v-u}} \right| \leq \frac{1}{|x|^{v-u}} \quad , \quad v - u > 1 \; .$$

Quindi l'integrale generalizzato

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x^v}{x^{v-u}} \, dx$$

converge. Ne segue che, per $u - v + 1 < 0$,

$$\int_a^{+\infty} x^u \sin x^v \, dx = -\frac{1}{v} \lim_{b \to +\infty} b^{u-v+1} \cos b^v + \frac{a^{u-v+1}}{v} \cos a^v - \frac{u-v+1}{v^2} \int_a^{+\infty} \frac{\cos x^v}{x^{v-u}} \, dx =$$

$$= \frac{a^{u-v+1}}{v} \cos a^v - \frac{u-v+1}{v^2} \int_a^{+\infty} \frac{\cos x^v}{x^{v-u}} \, dx$$

per cui in conclusione se $u, v > 0$ allora l'integrale generalizzato **(1)** converge per $v - u > 1$.

Soluzione di **(2)**. Si precede esattamente come per la soluzione di **(1)** appena svolta.

■

Esercizio 8.13. *Studiare la convergenza dell'integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8.14. *Sia $a > 0$. Studiare la convergenza dell'integrale*

$$\int_a^{+\infty} x^m \sin^n x \, dx$$

al variare di $m, n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 8.15. *Calcolare i seguenti integrali:*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_{-3}^3 \log(9 - x^2) \, dx \, .$$

Soluzione di **(2)**. La funzione integranda è definita per $x \in (-3, 3)$, inoltre per tali valori di x è $3 - x > 0$, $3 + x > 0$, e quindi $\log(9 - x^2) = \log(3 - x) + \log(3 + x)$. Dunque

$$\begin{aligned} \int \log(9 - x^2) \, dx &= \int \log(3 - x) \, dx + \int \log(3 + x) \, dx = \\ &= (3 - x)[1 - \log(3 - x)] + (3 + x)[\log(3 + x) - 1] + C \end{aligned}$$

perché

$$\int \log(3 - x) \, dx \underset{t=3-x}{=} - \int \log t \, dt = t - t \log t + C = (3 - x)[1 - \log(3 - x)] + C \, ,$$

$$\int \log(3 + x) \, dx \underset{t=x+3}{=} \int \log t \, dt = t \log t - t + C = (3 + x)[\log(3 + x) - 1] + C \, .$$

Allora, poiché $\lim\limits_{x \to 3^-} \log(9 - x^2) = -\infty = \lim\limits_{x \to -3^+} \log(9 - x^2)$ si ha

$$\int_{-3}^3 \log(9 - x^2) \, dx = \int_{-3}^0 \log(9 - x^2) \, dx + \int_0^3 \log(9 - x^2) \, dx$$

dove

$$\begin{aligned} \int_{-3}^0 \log(9 - x^2) \, dx &= \lim_{a \to -3^+} \int_a^0 \log(9 - x^2) \, dx = \\ = \lim_{a \to -3^+} \{3(1 - \log 3) &+ 3(\log 3 - 1) - (3 - a)[1 - \log(3 - a)] - \\ &- (3 + a)[\log(3 + a) - 1]\} = \\ = - \lim_{a \to -3^+} &\{(3 - a)[1 - \log(3 - a)] + (3 + a)[\log(3 + a) - 1]\} = \\ = 6(\log 6 - 1) &- \lim_{a \to -3^+} (3 + a)[\log(3 + a) - 1] = 6(\log 6 - 1) \, , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 \log(9 - x^2) \, dx &= \lim_{a \to 3^-} \int_0^a \log(9 - x^2) \, dx = \\ = \lim_{a \to 3^-} \{(3 - a)[1 &- \log(3 - a)] + (3 + a)[\log(3 + a) - 1] - \\ &- 3(1 - \log 3) - 3(\log 3 - 1)\} = \\ = \lim_{a \to 3^-} (3 - a)[1 &- \log(3 - a)] + 6(\log 6 - 1) = 6(\log 6 - 1) \, . \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_{-3}^3 \log(9 - x^2) \, dx = 12(\log 6 - 1) \, .$$

■

Esercizio 8.16. *Calcolare gli integrali*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \log x} \; .$$

Esercizio 8.17. *Calcolare gli integrali*

$$(\mathbf{1}) \int_{0}^{1} \frac{1+\cos x}{(1-x^3)^{4/3}} \, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_{0}^{1} \frac{2 - 2\cos x - \sqrt{x}}{x} \, dx \; .$$

Esercizio 8.18. *Calcolare*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_{0}^{2} \frac{\log(2-x)}{(2-x)^3} \, dx \; .$$

Esercizio 8.19. *Divergono i seguenti integrali?*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_{0}^{2} \frac{dx}{x^3 \sin x} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \log^n x} \; , \; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \; .$$

Esercizio 8.20. *Quali dei seguenti integrali converge?*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_{0}^{4} \frac{x+1}{x^{1/2}} \, dx \; .$$

Esercizio 8.21. *Verificare l'eventuale convergenza di*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_{0}^{\pi} \frac{dx}{1-\cos^2 x} \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_{0}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{dx}{1+2\cos x} \; .$$

Esercizio 8.22. *Verificare la convergenza di*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_{-3}^{1} \frac{x+2}{(x^2-2x+1)(x+3)^{2/3}} \, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \; .$$

Esercizio 8.23. *Sia $\alpha > 0$. Studiare la convergenza dell'integrale*

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx \; .$$

La funzione $\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$, sopra definita si chiama *integrale di Eulero di seconda specie* (o funzione *Gamma di Eulero* o anche *Gamma euleriana*).

Esercizio 8.24. *Dimostrare che*

(i) $\Gamma 1) = 1$,
(ii) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, *e di conseguenza*
(iii) $\Gamma(n+1) = n!$ *per ogni* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Esercizio 8.25. *Calcolare i seguenti integrali*

$$(\mathbf{1}) \quad \int_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x} \, dx \quad , \quad (\mathbf{2}) \quad \int_{0}^{+\infty} x^{5/2} e^{-x} \, dx \; .$$

Esercizio 8.26. *Calcolare i seguenti integrali*

$$(\mathbf{1})\quad \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x+1)\log(x+1)} \quad , \quad (\mathbf{2})\quad \int_{2}^{\frac{5}{2}} \frac{dx}{(x-2)\log^3(x-2)}\ ,$$

$$(\mathbf{3})\quad \int_{2}^{3} \frac{2x+1}{x^3-3x^2+4}\,dx \quad , \quad (\mathbf{4})\quad \int_{0}^{1} \frac{x+1}{(x+2)\sqrt{x-1}}\,dx\ ,$$

$$(\mathbf{5})\quad \int_{1}^{2} \frac{2x^2-x-1}{x^2+x-2}\,dx \quad , \quad (\mathbf{6})\quad \int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{x+1}{(x^2-2)^2}\,dx\ ,$$

$$(\mathbf{7})\quad \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^3} \quad , \quad (\mathbf{8})\quad \int_{-\infty}^{0} \frac{1-x^2}{x^3-5x^2+3x+9}\,dx\ ,$$

$$(\mathbf{9})\quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1-\sin x}{x-\pi}\,dx \quad , \quad (\mathbf{10})\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1-\cos x}\,dx\ ,$$

$$(\mathbf{11})\quad \int_{-3}^{1} \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x+3}\,dx \quad , \quad (\mathbf{12})\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx\ .$$

9. Esercizi sulle equazioni differenziali del I ordine

Premettiamo una breve ricapitolazione per la risoluzione di alcuni tipi di equazioni differenziali del I ordine.

• **Equazione differenziale ordinaria:**

$$y'(x) = f(x) ,$$

con $f \in C^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Per ogni fissato $x_0 \in A$, la soluzione è

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)dt .$$

• **Equazione differenziale ordinaria a variabili separabili (o separate):**

$$y'(x) = a(x)b(y(x)) ,$$

con $a \in C^0(A)$, $b \in C^0(B)$ per $A, B \subseteq \mathbb{R}$ intervalli.
Se l'equazione numerica $b(y) = 0$ ha una soluzione y_0 allora la funzione costante

$$y(x) = y_0$$

è soluzione dell'equazione differenziale.
Se $b(y)$ non è identicamente nulla allora, per ogni fissato $x_0 \in A$, le soluzioni $y(x)$ si ricavano da

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{b(t)}\, dt = \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds .$$

• **Equazione differenziale lineare omogenea del I ordine:**

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0 ,$$

per $a \in C^0(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Per ogni fissato $x_0 \in A$, le soluzioni sono

$$y(x) = y(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\, ds} .$$

• **Equazione differenziale lineare affine del I ordine:**

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) ,$$

per $a, b \in C^0(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Per ogni fissato $x_0 \in A$, le soluzioni sono

$$y(x) = y(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\, ds} + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{\int_{x}^{t} a(s)\, ds}\, dt .$$

• **Equazione differenziale di Bernoulli:**

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^n(x) ,$$

per $a, b \in C^0(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Per ogni fissato $x_0 \in A$, le soluzioni sono

$$y(x) = \left[y^{1-n}(x_0)\, e^{(n-1)\int_{x_0}^{x} a(s)\, ds} + (1-n) \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{(1-n)\int_{x}^{t} a(s)\, ds}\, dt \right]^{1/(1-n)} .$$

• **Equazione differenziale di Riccati:**

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^2(x) + c(x) ,$$

per $a, b, c \in C^0(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Determinata una soluzione particolare $\hat{y}(x)$ si pone $z(x) = y(x) - \hat{y}(x)$ e sostituendo nell'equazione differenziale $y(x) = z(x) + \hat{y}(x)$, si ottiene l'equazione differenziale di Bernoulli con $n = 2$,

$$z'(x) + [a(x) - 2b(x)\hat{y}(x)]z(x) = b(x)z^2(x)$$

la quale risolta, permette di determinare $y(x) = z(x) + \hat{y}(x)$.

• **Equazioni differenziali del tipo** $y' = f\Big(\dfrac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\Big)$,

con $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$, $a_1x + b_1y + c_1 \neq 0$, $f \in c^0(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Caso (1). $\det \begin{bmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix} \neq 0$. Si considera il sistema lineare

$$\begin{cases} X = ax + by + c \\ Y = a_1x + b_1y + c_1 \end{cases}$$

da cui, risolvendo, si ottiene

$$\begin{cases} x = AX + BY + C \\ y = A_1X + B_1Y + C_1 \end{cases}$$

con $A, B, C, A_1, B_1, C_1 \in \mathbb{R}$ e $Y = Y(X)$. Allora

$$\frac{dx}{dX} = A + BY' \quad , \quad \frac{dy}{dX} = A_1 + B_1Y' \quad , \quad Y' = \frac{dY}{dX} \ .$$

L'equazione differenziale data diventa

$$\frac{A_1 + B_1Y'}{A + BY'} = f\Big(\frac{X}{Y}\Big)$$

che generalmente si risolve ponendo $T = \dfrac{Y}{X}$.

Caso (2). $\det \begin{bmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix} = 0$. Si pone $t = ax + by$, $t = t(x)$, ottenendo l'equazione differenziale

$$\frac{t' - a}{b} = f\Big(\frac{t + c}{\lambda t + c_1}\Big) \ .$$

• **Equazione differenziale di Clairaut:**

$$y(x) = xy'(x) + g(y'(x)) \ ,$$

per $g \in C^1(B)$, $B \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Per derivazione si ottiene

$$y''(x) \left[x + g'\big(y'(x)\big)\right] = 0 \ .$$

Ogni funzione $y(x) = ax + b$ è soluzione. Per $t = y'$ si ha la soluzione in forma parametrica

$$\begin{cases} x = -g'(t) \\ y = -t\, g'(t) + g(t) \ . \end{cases}$$

• **Equazione differenziale di D'Alembert-Lagrange:**

$$y(x) = xf(y'(x)) + g(y'(x)) \ ,$$

per $f, g \in C^1(B)$, $B \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, f e g non contemporaneamente costanti. Derivando rispetto a x e posto $t = y'$, si ottiene, per[11] $xf'(t) + g'(t) \neq 0$,

$$t' = \frac{t - f(t)}{xf'(t) + g'(t)} \ .$$

Se $t' = 0$ allora le funzioni $y(x) = ax + b$ sono soluzioni. Se $t' \neq 0$, dove t è invertibile si ha $t' = \dfrac{1}{x'(t)}$ da cui l'equazione differenziale affine del primo ordine

$$x'(t) + \frac{f'(t)}{f(t) - t}\, x(t) = \frac{g'(t)}{t - f(t)}$$

che permette di determinare x in funzione del parametro t e dunque dall'equazione differenziale iniziale, si ha la soluzione parametrica

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = x(t)f(t) + g(t) \ . \end{cases}$$

• **Equazione differenziale di Manfredi:**

$$y'(x) = \varphi(x, y(x))$$

con $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione di due variabili reali, continua e omogenea di grado 0. Ponendo $t = \dfrac{y}{x}$ e differenziando rispetto a x si ottiene $y' = t + xt'$ da cui $xt' = f(t) - t$ che dà l'equazione differenziale a variabili separabili

$$t'(x) = \frac{f(t(x)) - t(x)}{x}$$

la cui soluzione $t(x)$ permette di ricavare $y(x) = xt(x)$.

Esercizi sulle equazioni differenziali del I ordine

Esercizio 9.1. *Risolvere le equazioni differenziali ordinarie*

$$(\mathbf{1})\ \ y' = 3x^2 - 5x + 10 \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ y' = \tan x + x \ .$$

Esercizio 9.2. *Risolvere le equazioni differenziali a variabili separabili*

$$(\mathbf{1})\ \ y' = 4y^2 - y + 7 \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ y' = \sqrt{2}\, y^2 + 2y + \sqrt{2} \ .$$

Esercizio 9.3. *Risolvere le equazioni differenziali a variabili separabili*

$$(\mathbf{1})\ \ y' = (3y - 2)x^4 \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ (x^3 + 1)y' = (x - 1)(y^2 + y + 1) \ .$$

Esercizio 9.4. *Risolvere le equazioni differenziali a variabili separabili*

$$(\mathbf{1})\ \ (2x^2 - x + 1)y' = (x^2 + 2x - 1)(y^3 - 1) \ ,$$

$$(\mathbf{2})\ \ (x^2 + 2x - 1)y' = (2x^2 - x + 1)(y^3 + 1) \ .$$

---

[11] Se $xf'(t) + g'(t) = 0$ allora l'equazione differenziale è di Clairaut.

Esercizio 9.5. *Risolvere le equazioni differenziali*

$$(\mathbf{1})\ \ y' + \frac{1}{x^2}\ y = 0 \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ y' = \sin x\ \cos y\ ,$$

$$(\mathbf{3})\ \ y' = \frac{\log x}{y} \quad , \quad (\mathbf{4})\ \ y' + 2xy = 0 \quad , \quad (\mathbf{5})\ \ y' = x^2 y^3\ .$$

Esercizio 9.6. *Risovere le seguenti equazioni differenziali lineari affini:*

$$(\mathbf{1})\ \ y' - \frac{1}{1-x}\ y - x = 0 \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ y' - y\ \tan x = \sin x\ \cos^2 x\ .$$

Esercizio 9.7. *Risolvere le equazioni differenziali lineari affini:*

$$(\mathbf{1})\ \ y' + 2xy = x^3 \quad , \quad (\mathbf{1})\ \ y' + (x^2+x)y = (x^2+x)(x^3 + \frac{3}{2}\ x^2 + 1)\ .$$

Esercizio 9.8. *Risolvere le seguenti equazioni differenziali*

$$(\mathbf{1})\ \ y' + \frac{6x}{3x^2-1}\ y = \frac{1}{-1+3x^2} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ y' - y\sin x = \sin x\ .$$

Esercizio 9.9. *Risolvere le seguenti equazioni differenzaili del I ordine:*

$$(\mathbf{1})\ \ yy' + 2x^5 = 0 \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ y^2 y' + x^3 = 0\ .$$

Esercizio 9.10. *Risolvere le equazioni differenziali del I ordine:*

$$(\mathbf{1})\ \ xy' = -y + \frac{x^2 e^x}{4y^3} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ xy' = y + \frac{x^3 e^x}{4y^2}\ .$$

Esercizio 9.11. *Risolvere le equazioni differenziali del I ordine*

$$(\mathbf{1})\ \ y' = \frac{-x+y-1}{x+y-1} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ y' = \left(\frac{x-y+1}{2x-2y+1}\right)^2\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Posto

$$\begin{cases} X = -x+y+1 \\ Y = x+y-1 \end{cases}$$

il determinante del sistema è

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{2}Y \\ \\ y = \dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{2}Y + 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dX} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}Y' \\ \dfrac{dy}{dX} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}Y' \end{cases}$$

dove $Y' = \dfrac{dY}{dX}$. Poiché

$$y' = \frac{\dfrac{dy}{dX}}{\dfrac{dx}{dX}} = \frac{Y'+1}{Y'-1}\ ,$$

l'equazione differenziale **(1)** diventa

$$\frac{Y'+1}{Y'-1} = \frac{X}{Y} \quad \Longleftrightarrow \quad Y' = \frac{X+Y}{X-Y}\ .$$

Posto $T = \dfrac{Y}{X}$ si ricava $Y' = XT' + T$ da cui

$$XT' = -T + \frac{1+T}{1-T} \quad \Longleftrightarrow \quad T' = \frac{1}{X}\ \frac{T^2+1}{1-T}\ .$$

Posto $A(X) = \dfrac{1}{X}$ e $B(T) = \dfrac{T^2+1}{1-T}$ si ha l'equazione differenziale a variabili separabili $T' = A(X)B(T)$ ovvero

$$\frac{T'(X)}{B(T(X))} = A(X) \quad \text{da cui} \quad \int_{X_0}^{X} \frac{T'(S)}{B(T(S))}\, dS = \int_{X_0}^{X} A(S)\, dS$$

per $X_0 = -x_0 + y(x_0) + 1$. Poiché $dT = T'(S)\, dS$ si ha

$$\int_{T(X_0)}^{T(X)} \frac{dT}{B(T)} = \int_{X_0}^{X} A(S)\, dS$$

dove

$$\int_{T(X_0)}^{T(X)} \frac{dT}{B(T)} = \int_{T(X_0)}^{T(X)} \frac{1-T}{1+T^2}\, dT = \int_{T(X_0)}^{T(X)} \frac{dT}{1+T^2} - \int_{T(X_0)}^{T(X)} \frac{T}{1+T^2}\, dT =$$

$$= \arctan T(X) - \frac{1}{2}\ \log\big(1+T(X)^2\big) - \Big[\arctan T(X_0) - \frac{1}{2}\ \log\big(1+T(X_0)^2\big)\Big]\ ,$$

$$\int_{X_0}^{X} A(S)\, dS = \int_{X_0}^{X} \frac{1}{S}\, dS = \log|X| - \log|X_0|\ .$$

Pertanto se $C_0' = \arctan T(X_0) - \dfrac{1}{2}\ \log\big(1+T(X_0)^2\big) - \log|X_0|$ allora si ha

$$\arctan T(X) - \frac{1}{2}\ \log\big(1+T(X)^2\big) = \log|X| + C_0'$$

da cui

$$\arctan\frac{Y}{X} - \frac{1}{2}\ \log\frac{X^2+Y^2}{X^2} = \log|X| + C_0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \arctan\frac{Y}{X} - \log\sqrt{X^2+Y^2} + \log|X| = \log|X| + C_0$$

con costante $C_0 = \arctan\dfrac{Y(X_0)}{X_0} - \log\sqrt{X_0^2 + Y(X_0)^2}$. La soluzione dell'equazione differenziale è allora espressa in forma implicita da

$$\arctan\frac{x+y-1}{-x+y+1} - \log\sqrt{2x^2+2y^2-4x+2} + C = 0$$

per $C \in \mathbb{R}$ costante dipendente dalle condizioni iniziali x_0, $y(x_0)$.

Esercizio 9.12. *Risolvere le seguenti equazioni differenziali del I ordine:*

$$(\mathbf{1})\ \ y' = \frac{3x + 2y - 1}{-x + 2y - 3} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ y' = \frac{x - y + 3}{2x - 2y + 1} \ .$$

Esercizio 9.13. *Risolvere le equazioni differenziali*

$$(\mathbf{1})\ \ x^2 y' = x^3 + y \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ x^2 y' = x^2 - xy + y^2 \ .$$

Esercizio 9.14. *Risolvere*

$$(\mathbf{1})\ \ y' + xy = x^2 y^3 \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ xy' = (y - x)^3 + y \ .$$

Esercizio 9.15. *Risolvere le seguenti equazioni differenziali*

$$(\mathbf{1})\ \ y' + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x^3} \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ y' + \frac{x}{x+1}\, y = x^2 - 1 \ ,$$

$$(\mathbf{3})\ \ y' + \frac{4x}{x^2+1}\, y = 3x^2 + x + 1 \quad , \quad (\mathbf{4})\ \ y' - \frac{1}{1-x}\, y = x \ ,$$

$$(\mathbf{5})\ \ y' - y\, \tan x = \sin x\, \cos^2 x \ .$$

10. Esercizi sulle equazioni differenziali a coefficienti costanti di ordine $n \geq 2$

Premettiamo anche qui una breve ricapitolazione per la risoluzione dell'equazioni differenziali del tipo

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x) \tag{10.1}$$

$a_j \in \mathbb{R}$, $0 \leq j \leq n-1$. Sia $\mathcal{S}$ lo spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale (10.1) e $y_0(x)$ una soluzione particolare di (10.1); considerato il *polinomio caratteristico* di grado n

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

associato all'equazione differenziale lineare omogenea

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_o y = 0 \ ,$$

se

- $p(\lambda)$ ha n radici reali e distinte $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ allora
$$\mathcal{S} = \left\{ y \in C^n(A) : y = y_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j \, e^{\lambda_j x}, \ c_j \in \mathbb{R}, \ 1 \leq j \leq n \right\} .$$
- $p(\lambda)$ ha radici reali distinte $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, $k < n$, ma una di esse ha molteplicità, ad esempio λ_k ha molteplicità m_k $(2 \leq m_k \leq n)$, allora
$$\mathcal{S} = \left\{ y \in C^n(A) : y = y_0 + \sum_{j=1}^{k} c_j \, e^{\lambda_j x} + \sum_{h=1}^{m_k-1} c_{kh} \, x^h \, e^{\lambda_k x} \ , \right.$$
$$\left. c_j, c_{kh} \in \mathbb{R}, \ 1 \leq j \leq k, \ 1 \leq h \leq m_k - 1 \right\} .$$
- $p(\lambda)$ ha una radice complessa semplice, ad esempio $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$, allora
$$\mathcal{S} = \left\{ y \in C^n(A) : y = y_0 + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \, e^{\lambda_j x} + c_{1n} \, e^{\alpha_n x} \cos\beta_n \, x \ + \ c_{2n} \, e^{\alpha_n x} \sin\beta_n x \ , \right.$$
$$\left. c_j, c_{1n}, c_{2n} \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n-1 \right\} .$$
- $p(\lambda)$ ha una radice complessa con molteplicità, ad esemio $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ con molteplicità m_k allora,
$$\mathcal{S} = \left\{ y \in C^n(A) : y = y_0 + \sum_{j=1}^{k-1} c_j \, e^{\lambda_j x} + \right.$$
$$+ \sum_{h=0}^{m_k-1} \left(c_{1kh} \, x^h \, e^{\alpha_k} \cos\beta_k \, x \ + \ c_{2kh} \, x^j \, e^{\alpha_k x} \sin\beta_k x \right) \ ,$$
$$\left. c_j, c_{1kh}, c_{2kh} \in \mathbb{R}, \ 1 \leq j \leq k-1, \ 1 \leq h \leq m_k - 1 \right\} .$$

Una soluzione particolare $y_0(x)$ per l'equazione differenziale (10.1) si può determinare nei modi seguenti[12].

(1) Il dato $b(x)$ è un polinomio di grado r
- se $a_0 \neq 0$ allora ricerchiamo

$$y_0(x) = b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} \cdots + b_1 x + b_0 \ ;$$

- se $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$ e $a_m \neq 0$ allora ricerchiamo

$$y_0(x) = x^m (b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} \cdots + b_1 x + b_0) \ .$$

(2) Il dato $b(x)$ è multiplo della funzione $f(x) = e^{kx}$, per $k \in \mathbb{R}$
- k non è radice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ allora ricerchiamo

$$y_0(x) = c\, e^{kx} \ ;$$

- k è radice di $p(\lambda)$ con molteplicità $m \geq 1$ allora ricerchiamo

$$y_0(x) = c\, x^m e^{kx} \ .$$

(3) Il dato $b(x)$ è il prodotto di un polinomio di grado r e di e^{kx}
- k non è radice del polinomio caratteristico, allora ricerchiamo

$$y_0(x) = e^{kx}(b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r) \ ;$$

- k è radice del polinomio caratteristico con molteplicità $m \geq 1$, allora ricerchiamo

$$y_0(x) = x^m e^{kx}(b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r) \ .$$

(4) Il dato $b(x)$ è una combinazione lineare delle funzioni $f(x) = \cos kx$ e $g(x) = \sin kx$, per $k \in \mathbb{R}$
- ik non è radice del polinomio caratteristico allora ricerchiamo

$$y_0(x) = \alpha \cos kx + \beta \sin kx \ .$$

(5) Il dato $b(x)$ non rientra nei casi precedenti
- si usa il *metodo della variazione delle costanti*. Si determinano n soluzioni linearmente indipendenti $u_1, \cdots, u_n$ dell'equazione differenziale omogenea e scritta la sua generica soluzione $u(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(x)$, per $c_j \in \mathbb{R}$, ricerchiamo

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x) u_j(x)$$

[12]Usando il principio di identità dei polinomi o l'indipendenza lineare delle funzioni una volta sostituito y_0 e le sue derivate in (10.1).

dove le funzioni incognite $c_j(x)$, $1 \leq j \leq n$, si determinano risolvendo il sistema di equazioni differenziali del I ordine

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j'(x) u_j(x) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_j'(x) u_j^{(n-2)}(x) = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} c_j'(x) u_j^{(n-1)}(x) = b(x) \; . \end{cases}$$

Esercizio 10.1. *Risolvere le seguenti equazioni differenziali omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti*

$$(1) \;\; y'' + y = 0 \quad , \quad (2) \;\; y'' - 2y' - 3y = 0 \; .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ che ha le due radici complesse e coniugate $\lambda_1 = i$, $\overline{\lambda}_1 = -i$. Pertanto le soluzioni della 1) sono le funzioni $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ date da

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \; .$$

Soluzione di **(2)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$, dove $\dfrac{\Delta}{4} = 4$, quindi le sue radici sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. I generatori delle soluzioni dell'equazione differenziale 2) sono così le funzioni $u_1(x) = e^{-x}$, $u_2(x) = e^{3x}$, per cui tali soluzioni sono le funzioni $y \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \; .$$

■

Esercizio 10.2. *Risolvere le seguenti equazioni differenziali omogenee del III ordine a coefficienti costanti*

$$(1) \;\; y''' + 2y' + 3y = 0 \quad , \quad (2) \;\; y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \; .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda + 3$. Osserviamo che $p(-1) = 0$, dunque $\lambda_1 = -1$ è una radice (reale) di $p(\lambda)$. Per determinare le altre radici operiamo la divisione tra $p(\lambda)$ e il monomio $\lambda + 1$ ottenendo così $\lambda^3 + 2\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 3)$ dove, per il trinomio di II grado, è $\Delta = -11$. Ne segue che $p(\lambda)$ ha le due radici complesse e coniugate

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2} \quad , \quad \overline{\lambda}_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2} \; .$$

I generatori delle soluzioni sono dunque

$$u_1(x) = e^{-x} \quad , \quad u_2(x) = e^{x/2} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} x \quad , \quad u_3(x) = e^{x/2} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x$$

per cui le generiche soluzioni dell'equazione differenziale 1) sono le funzioni $y \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$y(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{x/2} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} x + c_3\, e^{x/2} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x \quad , \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ .$$

Esercizio 10.3. *Risolvere le seguenti equazioni differenziali omogenee del V ordine a coefficienti costanti*

$$(1)\ \ y^{(5)} - 5y^{(4)} - 9y' + 45y = 0 \quad , \quad (2)\ \ y^{(5)} - 5y^{(4)} + 7y''' - 3y'' = 0 \ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^4 - 9\lambda + 45$ che si decompone in $p(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda^4 - 9)$. Le sue radici sono $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$, $\lambda_3 = -\sqrt{3}$, $\lambda_4 = \sqrt{3}\, i$, $\lambda_5 = -\sqrt{3}\, i = \overline{\lambda_4}$, tutte semplici. Pertanto le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea proposta sono

$$y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{\sqrt{3}\, x} + c_3 e^{-\sqrt{3}\, x} + c_4 \cos \sqrt{3}x + c_5 \sin \sqrt{3}x \quad , \quad c_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le 5 \ .$$

Soluzione di **(2)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^4 + 7\lambda^3 - 3\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3)$. Allora $\lambda_1 = 0$ è radice di molteplicità 2 e si trova anche la radice $\lambda_2 = 1$. Dividendo per $\lambda - 1$ si ricava $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$. Si determinano così altre due radici che sono $\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$ e $\lambda_4 = 2 + \sqrt{3}$. Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea **(2)** sono dunque

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{(2-\sqrt{3})x} + c_5 e^{(2+\sqrt{3})x} \quad , \quad c_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le 5 \ .$$

■

Esercizio 10.4. *Risolvere le seguenti equazioni differenziali omogenee di ordine superiore al primo*

$$(\mathbf{1})\ \ y^{(6)} + 3y^{(4)} + 3y'' + y = 0 \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ y''' - 8y'' + 25y' - 26y = 0 \ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^6 + 3\lambda^4 + 3\lambda^2 + 1$ ovvero $p(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^3$, quindi ha due radici complesse coniugate $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i$, ciascuna di molteplicità $m = 3$. Pertanto la generica soluzione dell'equazione differenziale **(1)** è

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x + c_5 x^2 \cos x + c_6 x^2 \sin x \ , \ \ c_j \in \mathbb{R},\ 1 \le j \le 6 \ .$$

Soluzione di **(2)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 26$ e $p(2) = 0$ perciò si ha la radice reale $\lambda_1 = 2$. Per le altre radici operiamo la divisione tra $p(\lambda)$ e il monomio $\lambda - 2$ ottenendo $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 26 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 13)$, dove il trinomio di II grado ha $\dfrac{\Delta}{4} = -4$, per cui il polinomio caratteristico ha anche le due radici complesse e coniugate $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = -2i$. La generica soluzione dell'equazione differenziale **(2)** è dunque

$$y(x) = c_1\, e^{2x} + c_2\, \cos 2x + c_3\, \sin 2x \ \ , \ \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ .$$

■

Esercizio 10.5. *Risolvere le seguenti equazioni differenziali omogenee:*

$$(\mathbf{1})\ y^{(4)} - 4y''' - 2y'' + 12y' + 9y = 0 \quad , \quad (\mathbf{2})\ y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0 \ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 2\lambda^2 + 12\lambda + 9$. Si osserva che $\lambda_1 = -1$ è una radice, per cui dividendo per $\lambda + 1$ si ottiene

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9)$$

dove $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9$ è ancora divisibile per $\lambda + 1$ per cui

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)^2 \, .$$

Le radici, dunque, sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$ ciascuna con molteplicità $m = 2$. Pertanto le soluzioni dell'equazione differenziale **(1)** sono

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x e^{3x} \quad , \quad c_j \in \mathbb{R}, \; 1 \le j \le 4 \, .$$

Soluzione di **(2)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4$.
Si osservi che

$$(\lambda - 1)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \lambda^k (-1)^{4-k} = 1 - 4\lambda + 6\lambda^2 - 4\lambda^3 + \lambda^4$$

quindi

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^4 + 2\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)^4 + 2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 1 = (\lambda - 1)^4 + 2(\lambda - 1)^2 + 1 =$$
$$= \left[(\lambda - 1)^2 + 1\right]^2 \, .$$

Le radici di $p(\lambda)$ sono le soluzioni (ciascuna con molteplicità 2) di $(\lambda - 1)^2 + 1 = 0$ ovvero $\lambda - 1 = \pm i$ che dà $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i = \overline{\lambda_1}$. Pertanto le soluzioni dell'equazione differenziale proposta sono

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + c_3 x e^x \cos x + c_4 x e^x \sin x \quad , \quad c_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le 4 \, .$$

■

Esercizio 10.6. *Risolvere le seguenti equazioni differenziali a coefficienti costanti*

$$\textbf{(1)} \;\; y^{(3)} - 3y' - 2y = e^x \cos x \quad , \quad \textbf{(2)} \;\; y^{(4)} - 2y^{(2)} + y = 5e^x \sin x + x^2 + 1 \, .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$ e $\lambda_1 = -1$ ne è una radice per cui, dividendo per $\lambda + 1$, si ottiene $p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2)$. Le radici del trinomio risultano essere -1 e $\lambda_2 = 2$. Quindi il polinomio caratteristico ha la radice doppia $\lambda_1 = -1$ e la radice (semplice) $\lambda_2 = 2$. Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata all'equazione differenziale **(1)** sono

$$u(x) = c_1 e^{2x} + e^{-x}(c_2 + c_3 x) \quad , \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \, .$$

Poiché il dato è del tipo prodotto di un'esponenziale e di una combinazione lineare di $\cos x$ e $\sin x$, la soluzione particolare la ricerchiamo del tipo

$$y_0(x) = e^x (a \cos x + b \sin x) \quad , \quad a, b \in \mathbb{R} \, .$$

Calcolando la derivate fino al III ordine si ottiene

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= e^x[(a + b)\cos x + (b - a)\sin x] \\ y_0''(x) &= e^x(2b\cos x - 2a\sin x) \\ y_0'''(x) &= e^x[2(b - a)\cos x - 2(a + b)\sin x)] \, . \end{aligned} \tag{10.2}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale e semplificando per $e^x \neq 0$, si ha la relazione

$$-(b+7a)\cos x + (a-7b)\sin x = \cos x \ .$$

Siccome le funzioni $\cos x$ e $\sin x$ sono linearmente indipendenti, si ottiene il sistema lineare in a, b

$$\begin{cases} b+7a = -1 \\ a-7b = 0 \end{cases}$$

da cui $a = -\dfrac{7}{50}$, $b = -\dfrac{1}{50}$. Pertanto

$$y_0(x) = -\frac{1}{50}e^x(7\cos x + \sin x) \ .$$

In conclusione le soluzioni dell'equazione differenziale **(1)** sono le funzioni $y(x) = y_0(x) + u(x)$ ovvero

$$y(x) = -\frac{1}{50}e^x(7\cos x + \sin x) + c_1 e^{2x} + e^{-x}(c_2 + c_3 x) \quad , \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ .$$

Soluzione di **(2)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2-1)^2$. Le radici sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ entrambe con molteplicità 2. Pertanto le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono le funzioni

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^x + c_4 x e^{-x} \quad , \quad c_j \in \mathbb{R},\ 1 \leq j \leq 4 \ .$$

Osservando il dato dell'equazione differenziale, la soluzione particolare è del tipo

$$y_0(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

per y_1, y_2 rispettivamente soluzioni particolari delle equazioni differenziali

$$y^{(4)} - 2y^{(2)} + y = 5e^x \sin x \quad , \quad y^{(4)} - 2y^{(2)} + y = x^2 + 1 \ .$$

Perciò esse saranno del tipo

$$y_1(x) = e^x(a\cos x + b\sin x) \quad , \quad y_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ .$$

Derivando

$$\begin{aligned}
&y_1'(x) = e^x[(a+b)\cos x + (b-a)\sin x] && , && y_2'(x) = a_1 + 2a_2 x \\
&y_1''(x) = e^x(2b\cos x - 2a\sin x) && , && y_1''(x) = 2a_2 \\
&y_1'''(x) = e^x[2(b-a)\cos x - 2(a+b)\sin x)] && , && y_1'''(x) = y_1^{(4)}(x) = 0 \\
&y_1^{(4)}(x) = e^x(-4a\cos x - 4b\sin x) \ .
\end{aligned}$$

Sostituendo nelle equazioni differenziali si ottengono le relazioni

$$-(3a+4b)\cos x + (4a-3b)\sin x = 5\sin x \quad , \quad a_2 x^2 + a_1 x + a_0 - 4a_2 = x^2 + 1$$

da cui i sistemi lineari

$$\begin{cases} 3a+4b = 0 \\ 4a-3b = 5 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_0 - 4a_2 = 1 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $a = \dfrac{4}{5}$, $b = -\dfrac{3}{5}$, $a_0 = 5$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. La soluzione particolare risulta dunque

$$y_0(x) = \frac{1}{5}e^x(4\cos x - 3\sin x) + x^2 + 5 \ .$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione differenziale **(2)** sono

$$y(x) = \frac{1}{5}e^x(4\cos x - 3\sin x + c_1) + c_2e^{-x} + c_3xe^x + c_4xe^{-x} + x^2 + 5 \quad , \quad c_j \in \mathbb{R},\ 1 \leq j \leq 4 \ .$$

■

Esercizio 10.7. *Risolvere le seguenti equazioni differenziali*

$$(\mathbf{1})\ \ y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = e^x\cos(x+2) \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ 2y'' + y' - y = 2e^x \ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2$. Osserviamo che tale polinomio non può avere radici negative. Una rapida verifica prova che $\lambda_1 = 2$ è radice del polinomio Con la divisione per $\lambda - 2$ si ottiene $p(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2$ così si hanno anche le radici complesse coniugate $\lambda_2 = i$ e $\overline{\lambda}_2 = -i$, con $\mathrm{molt}(\lambda_2) = \mathrm{molt}(\overline{\lambda}_2) = 2$. Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea sono le funzioni $u \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$u(x) = c_1e^{2x} + c_2\cos x + c_3\sin x + c_4x\cos x + c_5x\sin x \ ,$$

$c_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq 5$. Il dato $b(x) = e^x\cos(x+2) = e^x(\cos 2\,\cos x - \sin 2\,\sin x)$ è del tipo $b(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ con $\alpha = \beta = 1$, $A = \cos 2, B = -\sin 2$. Determiniamo una soluzione particolare dello stesso tipo, cioè

$$y_0(x) = e^x(a\cos x + b\sin x)$$

Derivando si ha

$$\begin{aligned}
y_0'(x) &= e^x[(a+b)\cos x + (b-a)\sin x] \\
y_0''(x) &= 2e^x(b\cos x - a\sin x) \\
y_0'''(x) &= 2e^x[(b-a)\cos x - (a+b)\sin x] \\
y_0^{(4)}(x) &= -4e^x(a\cos x + b\sin x) \\
y_0^{(5)}(x) &= -4e^x[(a+b)\cos x + (b-a)\sin x] \ .
\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene la relazione

$$-(a+7b)\cos x + (7a-b)\sin x = \cos 2\,\cos x - \sin 2\,\sin x$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} -a - 7b = \cos 2 \\ 7a - b = -\sin 2 \end{cases}$$

con soluzioni

$$a = -\frac{1}{50}(\cos 2 + 7\sin 2) \quad , \quad b = \frac{1}{50}(\sin 2 - 7\cos 2)$$

Ne segue che

$$y_0(x) = \frac{1}{50}e^x\left[-(\cos 2 + 7\sin 2)\cos x + (\sin 2 - 7\cos 2)\sin x\right] \ .$$

Infine le soluzioni dell'equazione differenziale sono le funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$

$$y(x) = \frac{1}{50}e^x\left[-(\cos 2 + 7\sin 2)\cos x + (\sin 2 - 7\cos 2)\sin x\right] +$$
$$+c_1 e^{2x} + c_2\cos x + c_3\sin x + c_4 x\cos x + c_5 x\sin x$$

per $c_j \in \mathbb{R}$, $1 \le j \le 5$.

Soluzione di **(2)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = 2\lambda^2 + \lambda - 1$ le cui radici risultano essere $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$. Ne segue che le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono

$$u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

La soluzione particolare è del tipo $y_0(x) = ce^x$ per cui $y'(x) = y''(x) = ce^x$. Sostituendo nell'equazione differenziale si determina $c = 1$. Dunque $y_0(x) = e^x$. Le soluzioni dell'equazione differenziale **(2)** sono

$$y(x) = e^x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

■

Esercizio 10.8. *Risolvere le equazioni differenziali*

$$(\mathbf{1})\ \ 2y'' + y' - y = 2e^x\cos x \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. L'equazione differenziale omogenea associata è la stessa di quella dell'equazione differenziale **(2)** dell'Esercizio 10.7 per cui le sue soluzioni sono

$$u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

La soluzione particolare è del tipo

$$y_0(x) = e^x(a\cos x + b\sin x)$$

come quella di **(1)** dell'Esercizio 10.7. Pertanto, con le stesse espressioni di y_0', y_0'' trovate in tale esercizio, sostituendo nella **(1)**, si ottiene la relazione

$$5b\cos x - 5a\sin x = 2\cos x$$

da cui $a = 0$, $b = \dfrac{2}{5}$. In definitiva le soluzioni dell'equazione differenziale **(1)** sono

$$y(x) = \frac{2}{5}e^x\sin x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Soluzione di **(2)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ per cui le radici (reali, semplici e distinte) sono $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, quindi le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono le funzioni

$$u(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Per determinare una soluzione particolare, il dato $b(x) = xe^{-x}$ è del tipo $b(x) = (b_0 + b_1 x)e^{\alpha x}$ con $\alpha = -1$ che è radice del polinomio caratteristico. Cercheremo allora una soluzione particolare del tipo

$$y_0(x) = x(a_1 x + a_0)e^{-x} \quad \text{ovvero} \quad y_0(x) = e^{-x}(a_1 x^2 + a_0 x)\ .$$

Si ha

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= e^{-x}(-a_1x^2 - a_0x + 2a_1x + a_0) = \\ &= e^{-x}[-a_1x^2 + (2a_1 - a_0)x + a_0] \\ y_0''(x) &= e^{-x}(a_1x^2 - (2a_1 - a_0)x - a_0 - 2a_1x + 2a_1 - a_0) = \\ &= e^{-x}[a_1x^2 + (-4a_1 + a_0)x + 2(a_1 - a_0)] \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale, si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} 2a_1 = 1 \\ 2a_1 + a_0 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a_0 = -1,\ a_1 = \frac{1}{2}$$

quindi

$$y_0(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{2}\,x^2 - x\right) .$$

Infine la generica soluzione dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{2}\,x^2 - x + c_1\right) + c_2e^{-2x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

■

Esercizio 10.9. *Risolvere le equazioni differenziali*

$$(\mathbf{1})\ \ y'' + y' = \sin x - \cos x \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ y'' - y = e^x \sin x .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)$ le cui radici (semplici) sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ per cui le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono le funzioni $u \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$u(x) = c_1 + c_2\, e^{-x} \ \ , \ \ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R} .$$

Il dato è del tipo $b(x)$ è una combinazione lineare di $\cos\alpha x$ e $\sin\alpha x$ con $\alpha = 1$ e dunque $i\alpha = i$ non è soluzione del polinomio caratteristico. In questo caso una soluzione particolare la ricerchiamo dello stesso tipo del dato, cioè

$$y_0(x) = a\cos x + b\sin x .$$

Si ha

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= -a\sin x + b\cos x \\ y_0''(x) &= -a\cos x - b\sin x . \end{aligned}$$

La sostituzione nell'equazione differenziale dà la relazione

$$(b - a)\cos x - (a + b)\sin x = \sin x - \cos x$$

quindi si ha il sistema lineare

$$\begin{cases} b - a = -1 \\ a + b = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a = 0,\ b = -1 .$$

Pertanto $y_0(x) = -\sin x$. Infine le soluzioni dell'equazione differenziale data sono le funzioni $y \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$y(x) = c_1 + c_2\, e^{-x} - \sin x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Soluzione di **(2)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ con radici 1 e -1 per cui le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono le funzioni

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

La soluzione particolare è del tipo

$$y_0(x) = e^x (a \cos x + b \sin x) .$$

Derivando (cfr. (10.2)) e sostituendo nell'equazione differenziale si perviene alla relazione

$$(2b - a) \cos x - (2a + b) \sin x = \sin x$$

che dà il sistema

$$\begin{cases} 2b - a = 0 \\ -2a - b = 1 \end{cases} \implies a = \frac{2}{5} , \; b = -\frac{1}{5} .$$

Quindi

$$y_0(x) = \frac{1}{5} e^x (2 \cos x - \sin x)$$

avendo così le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y(x) = \frac{1}{5} e^x (2 \cos x - \sin x + c_1) + c_2 e^{-x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

■

Esercizio 10.10. *Risolvere le equazioni differenziali*

$$\textbf{(1)} \;\; y'' - y = e^x + \sin x \quad , \quad \textbf{(2)} \;\; y^{(2)} - 3y' + 2y = (2x - 1) e^{-x} .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ le cui radici (semplici) sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Quindi le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono

$$u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y_0(x) = a_1 x e^x + a_2 \sin x + a_3 \cos x$$

somma delle soluzioni particolari dell'equazioni differenziali

$$y'' - y = e^x \quad , \quad y'' - y = \sin x .$$

Derivando si ottiene:

$$\begin{aligned} y_0' &= a_1 e^x + a_1 x e^x + a_2 \cos x - a_3 \sin x \\ y_0'' &= 2a_1 e^x + a_1 x e^x - a_2 \sin x - a_3 \cos x \end{aligned}$$

che sostituite nell'equazione differenziale $y'' - y = e^x + \sin x$ danno il sistema lineare

$$\begin{cases} 2a_1 = 1 \\ -2a_2 = 1 \\ -2a_3 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = 0$. Pertanto una soluzione particolare è $y_0(x) = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}\sin x$ e le soluzioni dell'equazione differenziale data sono

$$y(x) = \frac{1}{2}\, xe^x - \frac{1}{2}\, \sin x + c_1 e^{-x} + c_2 e^x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \, .$$

Soluzione di **(2)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ le cui radici sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono

$$u(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{2x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \, .$$

Una soluzione particolare la cerchiamo del tipo

$$y_0(x) = (C_1 x + C_0)e^{-x} \, .$$

Derivando

$$y_0'(x) = e^{-x}(-C_1 x - C_0 + C_1)$$
$$y_0''(x) = e^{-x}(C_1 x + C_0 - 2C_1) \, .$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$6C_1 x + 6C_0 - 5C_1 = 2x - 1$$

da cui il sistema lineare

$$\begin{cases} 6C_1 = 2 \\ 6C_0 - 5C_1 = -1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad C_0 = \frac{1}{9},\, C_1 = \frac{1}{3} \, .$$

Perciò

$$y_0(x) = \left(\frac{1}{3}\, x + \frac{1}{9}\right) e^{-x}$$

e le soluzioni dell'equazione differenziali sono le funzioni

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}\, x + \frac{1}{9}\right) e^{-x} + c_1\, e^x + c_2\, e^{2x} \quad , \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R} \, .$$

■

Esercizio 10.11. *Risolvere le equazioni differenziali*

$$\textbf{(1)}\ y'' - 2y' + y = e^x - x + \sin x \quad , \quad \textbf{(2)}\ \ y''' + y'' - y' - y = (x+1)e^{-x} \, .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il polinimio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ che ha $\lambda = 1$ come radice doppia. Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \, .$$

Ricerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y_0(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 e^x + a_3 \sin x + a_4 \cos x$$

somma delle soluzioni particolari delle equazioni differenziali

$$y'' - 2y' + y = -x \quad , \quad y'' - 2y' + y = e^x \quad , \quad y'' - 2y' + y = \sin x \, .$$

Si ha

$$y_0' = a_1 + a_2 x e^x (2 + x) + a_3 \cos x - a_4 \sin x \; ,$$
$$y_0'' = a_2 e^x (2 + 4x + x^2) - a_3 \sin x - a_4 \cos x \; .$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} 2a_2 = 1 \\ a_1 = -1 \\ 2a_4 = 1 \\ -2a_3 = 0 \\ a_0 - 2a_1 = 0 \end{cases}$$

che ha la soluzione $a_0 = -2$, $a_1 = -1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 0$, $a_4 = \frac{1}{2}$. Pertanto una soluzione particolare è

$$y_0 = -2 - x + \frac{1}{2}\, x^2 e^x + \frac{1}{2}\, \cos x$$

e le soluzioni dell'equazione differenziale data sono

$$y(x) = -2 - x + \frac{1}{2}\, x^2 e^x + \frac{1}{2}\, \cos x + c_1 e^x + c_2 x e^x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \; .$$

Soluzione di **(2)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$ che si decompone in $p(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)$: ha quindi la radice semplice $\lambda_1 = 1$ e la radice doppia $\lambda_2 = -1$. Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono dunque

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} \; .$$

Siccome il dato è $b(x) = (x+1)e^{-x}$ (cioè prodotto di un polinomio per un'esponenziale e^{kx} con $k = -1$ che è radice doppia del polinomio caretteristico) cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y_0(x) = x^2 (a_0 + a_1 x) e^{-x} \; .$$

Derivando successivamente si ha

$$\begin{aligned} y_0' &= \left(-a_1 x^3 + (3a_1 - a_0)x^2 + 2a_0 x\right) e^{-x} \; , \\ y_0'' &= \left(a_1 x^3 - (6a_1 - a_0)x^2 + 2(3a_1 - 2a_0)x + 2a_0\right) e^{-x} \; , \\ y_0''' &= \left(-a_1 x^3 + (9a_1 - a_0)x^2 - 2(9a_1 - 3a_0)x + 6a_1 - 6a_0\right) e^{-x} \; . \end{aligned}$$

Sostituite nell'equazione differenziale $y''' + y'' - y' - y = (x+1)e^{-x}$ danno il sistema lineare

$$\begin{cases} -12a_1 = 1 \\ 6a_1 - 4a_0 = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è $a_0 = -\frac{3}{8}$, $a_1 = -\frac{1}{12}$ ovvero $y_0(x) = -x^2 \left(\frac{1}{12}x + \frac{3}{8}\right) e^{-x}$. Le soluzioni dell'equazione differenziale proposta sono pertanto

$$y(x) = -x^2 \left(\frac{1}{12}\, x + \frac{3}{8}\right) e^{-x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} \quad , \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \; .$$

■

Esercizio 10.12. *Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali di ordine superiore al primo a coefficienti costanti:*

$$(\mathbf{1})\ \ y^{(3)} + y^{(2)} = x^2 + 2x + e^x \quad , \quad (\mathbf{2})\ \ y'' - 2y' + y = \cos x \ ,$$

$$(\mathbf{3})\ \ y'' + y = \sin x \ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. L'equazione differenziale omogenea associata è $y^{(3)} + y^{(2)} = 0$ il cui polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda + 1)$. Le sue radici sono $\lambda_1 = 0$ (doppia) e $\lambda_2 = -1$ (semplice). Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata all'equazione differenziale data sono

$$u(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} \ .$$

Poiché il dato $b(x) = x^2 + 2x + e^x$ è somma di un polinomio di II grado e di un'esponenziale e la prima derivata non nulla nell'equazione differenziale è la seconda, cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y_0(x) = x^2(a_2 x^2 + a_1 x + a_0) + a_3 e^x$$

che è la somma delle due soluzioni particolari dell'equazioni differenziali

$$y^{(3)} + y^{(2)} = x^2 + 2x \quad , \quad y^{(3)} + y^{(2)} = e^x \ .$$

Derivando successivamente si ha

$$\begin{aligned} y_0' &= 4a_2 x^3 + 3a_1 x^2 + 2a_0 x + a_3 e^x \ , \\ y_0'' &= 12a_2 x^2 + 6a_1 x + 2a_0 + a_3 e^x \ , \\ y_0''' &= 24a_2 x + 6a_1 + a_3 e^x \ . \end{aligned}$$

Quindi sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} 12a_2 = 1 \\ 12a_2 + 3a_1 = 1 \\ 3a_1 + a_0 = 0 \\ 2a_3 = 1 \end{cases}$$

che ha le soluzioni $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = \dfrac{1}{12}$, $a_3 = \dfrac{1}{2}$. La soluzione particolare è

$$y_0(x) = \frac{1}{12}\, x^4 + \frac{1}{2}\, e^x$$

e quindi le soluzioni dell'equazione differenziale data sono

$$y(x) = \frac{1}{12}\, x^4 + \frac{1}{2}\, e^x + c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} \quad , \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ .$$

Soluzione di **(2)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ che ha $\lambda = 1$ come radice doppia. Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono allora

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y_0(x) = a_1 \cos x + a_2 \sin x \quad , \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Derivando si ha

$$y_0' = -a_1 \sin x + a_2 \cos x$$
$$y_0'' = -a_1 \cos x - a_2 \sin x$$

che sostituite nell'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = \cos x$ dà

$$2a_1 \sin x - 2a_2 \cos x = \cos x$$

per cui è $a_1 = 0$, $a_2 = -\dfrac{1}{2}$ e la soluzione particolare cercata risulta essere $y_0(x) = -\dfrac{1}{2}\sin x$. Ne segue che le soluzioni dell'equazione differenziale data sono

$$y(x) = -\frac{1}{2}\ \sin x + c_1 e^x + c_2 x e^x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Soluzione di **(3)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ che ha le radici (semplici) complesse e coniugate $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono

$$u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

In questo caso per determinare una soluzione particolare useremo il *metodo della variazione delle costanti*. Sia dunque

$$y_0(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x\ .$$

Derivando

$$y_0' = c_1' \cos x + c_2' \sin x - c_1 \sin x + c_2 \cos x \qquad \text{con}\ \ c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0$$
$$y_0'' = -c_1' \sin x + c_2' \cos x - c_1 \cos x - c_2 \sin x$$

da cui, sostituendo nell'equazione differenziale $y'' + y = \sin x$ e tenendo conto della condizione imposta a $c_1' \cos x + c_2' \sin x$ si ottiene il sistema di equazioni differenziali del I ordine

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x = \sin x\ . \end{cases}$$

Risolvendo si ha

$$\begin{cases} c_1' = -\sin^2 x \\ c_2' = \sin x \cos x \end{cases}$$

che integrate danno $c_1(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\sin x\, \cos x$, $c_2 = \dfrac{1}{2}\sin^2 x$.

La soluzione particolare risulta allora essere $y_0(x) = -\dfrac{1}{2}x \cos x + \dfrac{1}{2}\sin x$ e di conseguenza le soluzioni dell'equazione differenziale data sono

$$y(x) = -\frac{1}{2}x \cos x + c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(essendo $\dfrac{1}{2}\sin x$ già compresa in $c_2 \sin x$).

■

Esercizio 10.13. *Usando il metodo della variazione delle costanti, determinare le soluzioni delle equazioni differenziali*

$$(\mathbf{1})\ \ y''+2y'+5y=2xe^{-x}\cos 2x \quad ,(\mathbf{2})\ \ y''-y=e^{x}\sin x\ ,$$
$$(\mathbf{3})\ \ y''-2y'+y=(x-1)^4\cos x\ .$$

■ *Soluzione di* **(1)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+5$ le cui radici (complesse e semplici) sono $\lambda_1=-1+2i$, $\lambda_2=\overline{\lambda_1}=-1-2i$. Allora le soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata sono

$$u(x)=c_1e^{-x}\cos 2x+c_2e^{-x}\sin 2x \quad , \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}\ .$$

Cerchiamo dunque una soluzione particolare del tipo

$$y_0(x)=e^{-x}\left(c_1(x)\cos 2x+c_2(x)\sin 2x\right)\ .$$

Usando il metodo della variazione delle costanti si ha

$$y_0'(x)=e^{-x}\left[\sin 2x(-2c_1(x)-c_2(x))+\cos 2x(-c_1(x)+2c_2(x))\right]$$

con $e^{-x}\left[c_1'(x)\cos 2x+c_2'(x)\sin 2x\right]=0$,

$$y_0''(x)=e^{-x}\left[\sin 2x\left(-2c_1'(x)-c_2'(x)+4c_1(x)-3c_2(x)\right)+\right.$$
$$\left.+\cos 2x\left(2c_2'(x)-c_1'(x)-3c_1(x)-4c_2(x)\right)\right]\ ;$$

sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$e^{-x}\left[c_1'(x)(-2\sin 2x-\cos 2x)+c_2'(x)(2\cos 2x-\sin 2x)\right]=2xe^{-x}\cos 2x\ .$$

Dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos 2x+c_2'(x)\sin 2x=0\\ -c_1'(x)(2\sin 2x+\cos 2x)+c_2'(x)(2\cos 2x-\sin 2x)=2x\cos 2x\end{cases}$$

ovvero, per $\cos 2x\neq 0$,

$$\begin{cases} c_1'(x)=-(\tan 2x)c_2'(x)\\ c_2'(x)[(2\sin 2x+\cos 2x)\tan 2x+(2\cos 2x-\sin 2x)]=2x\cos 2x\ .\end{cases}$$

La seconda equazione differenziale del sistema si riscrive

$$c_2'(x)(2\sin^2 2x+\sin 2x\cos 2x+2\cos^2 2x-\sin 2x\cos 2x)=2x\cos^2 2x$$

che dà

$$c_2'(x)=x\cos^2 2x\ .$$

Quindi si ha il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)=-x\sin 2x\cos 2x\\ c_2'(x)=x\cos^2 2x\end{cases} \iff \begin{cases} c_1'(x)=-\dfrac{1}{2}x\sin 4x\\ c_2'(x)=x\cos^2 2x\ .\end{cases}$$

Poiché

$$-\frac{1}{2}\int x\sin 4x\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x\cos 4x-\frac{1}{4}\int\cos 4x\,dx\right)=$$
$$=\frac{1}{8}\left(x\cos 4x-\int\cos 4x\,dx\right)=\frac{1}{8}\left(x\cos 4x-\frac{1}{4}\ \sin 4x\right)+c$$

allora
$$c_1(x) = \frac{1}{32}(4x\cos 4x - \sin 4x) \ .$$
Poiché
$$\int \cos^2 2x\,dx \underset{t=2x}{=} \frac{1}{2}\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}(t+\sin t\cos t) + c = \frac{1}{4}(2x+\sin 2x\cos 2x) + c =$$
$$= \frac{1}{8}(4x+\sin 4x) + c$$
allora
$$\int x\cos^2 2x\,dx = \frac{1}{8}\left[x(4x+\sin 4x) - \int (4x+\sin 4x)\,dx\right] =$$
$$= \frac{1}{8}\left[4x^2 + x\sin 4x - 2x^2 + \frac{1}{4}\ \cos 4x\right] + c = \frac{1}{32}(8x^2+4x\sin 4x+\cos 4x) + c$$
per cui
$$c_2(x) = \frac{1}{32}(8x^2+4x\sin 4x+\cos 4x) \ .$$
Pertanto
$$y_0(x) = \frac{1}{32}\ e^{-x}[(4x\cos 4x - \sin 4x)\cos 2x + (8x^2+4x\sin 4x+\cos 4x)\sin 2x] \ .$$
Le soluzioni dell'equazione differenziale data sono
$$y(x) = \frac{1}{32}\ e^{-x}[(4x\cos 4x - \sin 4x + c_1)\cos 2x + (8x^2+4x\sin 4x+\cos 4x + c_2)\sin 2x] \ ,$$
per $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Soluzione di **(2)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ le cui radici sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ per cui le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono le funzioni
$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$
Sia allora
$$y_0(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$$
una soluzione particolare dell'equazione differenziale data. Allora
$$\begin{aligned} y_0' &= c_1' e^x + c_2' e^{-x} + c_1 e^x - c_2 e^{-x} \quad \text{con} \ \ c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0 \\ y_0'' &= c_1' e^x - c_2' e^{-x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x} \end{aligned}$$
e sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene il sistema di equazioni differenziali del I ordine
$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0 \\ c_1' e^x - c_2' e^{-x} = e^x \sin x \ . \end{cases}$$
Sommando membro a membro si ricava $2c_1' = \sin x$ che sostituito nella I equazione del sistema dà $2c_2' = -e^{2x}\sin x$, quindi
$$\begin{cases} c_1' = \dfrac{1}{2}\sin x \\ c_2' = -\dfrac{1}{2}\ e^{2x}\sin x \ . \end{cases}$$

Abbiamo

$$\int \frac{1}{2}\ \sin x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x + C$$

mentre integrando per parti

$$\int -\frac{1}{2}\ e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{10}\ e^{2x}(\cos x - 2\sin x) + C\ .$$

Prendiamo allora

$$c_1(x) = -\frac{1}{2}\ \cos x \quad , \quad c_2(x) = \frac{1}{10}\ e^{2x}(\cos x - 2\sin x)$$

per cui

$$y_0(x) = -\frac{1}{2}\ e^x\cos x + \frac{1}{10}\ e^x(\cos x - 2\sin x) = \frac{1}{10}\ e^x(-5\cos x + \cos x - 2\sin x)$$

ovvero

$$y_0(x) = -\frac{1}{5}\ e^x(2\cos x + \sin x)$$

Infine le soluzioni dell'equazione differenziale data sono le funzioni

$$y(x) = -\frac{1}{5}\ e^x(2\cos x + \sin x + c_1) + c_2 e^{-x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Soluzione di **(3)**. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ che ha $\lambda = 1$ come radice doppia. Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea sono

$$u(x) = c_1 x e^x + c_2 e^x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Sia

$$y_0(x) = c_1(x) x e^x + c_2(x) e^x = [x\,c_1(x) + c_2(x)]e^x$$

abbiamo allora

$$y_0' = [x\,c_1' + c_2' + c_1 + x\,c_1 + c_2]e^x = [x\,c_1' + c_2' + (x+1)c_1 + c_2]e^x$$

con $x\,c_1' + c_2' = 0$,

$$y_0'' = [(x+1)c_1' + c_2' + c_1 + (x+1)c_1 + c_2]e^x$$

che sostituite nell'equazione differenziale assieme alla condizione imposta $xc_1' + c_2' = 0$ dà il sistema di equazioni differenziali del I ordine

$$\begin{cases} xc_1' + c_2' = 0 \\ [(x+1)c_1' + c_2']e^x = (x-1)^4\cos x \end{cases} \iff \begin{cases} c_1' = (x-1)^4 e^{-x}\cos x \\ c_2' = -x(x-1)^4 e^{-x}\cos x\ . \end{cases}$$

Per $n \in \mathbb{N}$ siano

$$I_n = \int (x-1)^n e^{-x}\cos x\,dx = F_n(x) + C\ ,$$

$$J_n = \int (x-1)^n e^{-x}\sin x\,dx$$

in modo che

$$\int (x-1)^4 e^{-x}\cos x\,dx = I_4 = F_4(x) + C$$

mentre notiamo che

$$\int -x(x-1)^4 e^{-x}\cos x\,dx = -xF_4(x) + \int F_4(x)\,dx = -xF_4(x) + F(x) + C\ .$$

Prendiamo allora

$$c_1(x) = F_4(x) \quad , \quad c_2(x) = -x\,F_4(x) + F(x)$$

cosicché

$$xc_1(x) + c_2(x) = xF_4(x) - xF_4(x) + F(x) = F(x)\ ,$$

dunque

$$y_0(x) = e^x F(x)$$

e le soluzioni dell'equazione differenziale sono le funzioni

$$y(x) = e^x[F(x) + c_1 x + c_2]$$

Dobbiamo ora determinare $F(x)$. È facile verificare che, per $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{1}{2}(x-1)^n e^{-x}(\sin x - \cos x) + \frac{n}{2}\ I_{n-1} - \frac{n}{2}\ J_{n-1}\ ,$$

$$J_n = -\frac{1}{2}(x-1)^n e^{-x}(\sin\ x + \cos x) + \frac{n}{2}\ I_{n-1} + \frac{n}{2}\ J_{n-1}\ ,$$

da cui si ricavano

$$I_n + J_n = -(x-1)^n e^{-x}\cos x + nI_{n-1} \quad , \quad I_n - J_n = (x-1)^n e^{-x}\sin x - nJ_{n-1}\ .$$

Inoltre

$$I_0 = \int e^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\ e^{-x}(\sin x - \cos x) + C\ ,$$

$$J_0 = \int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}\ e^{-x}(\sin x + \cos x) + C\ .$$

Le relazioni sopra scritte permettono di calcolare

$$F_4(x) = e^{-x}\sin x\left[\frac{1}{2}(x-1)^4 + 2(x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 3\right] +$$

$$+e^{-x}\cos x\left[-\frac{1}{2}\ (x-1)^4 + 3(x-1)^2 + 6(x-1) + 3\right]$$

e infine

$$F(x) + C = \int F_4(x)\,dx = e^{-x}\sin x\left[-\frac{1}{2}(x-1)^4 - 2(x-1)^3 + 12(x-1) + 15\right] -$$

$$-(x-1)e^{-x}\cos x\left[2(x-1)^2 + 9(x-1) + 12\right] + C\ .$$

■

Esercizio 10.14. *Risolvere le seguenti equazioni differenziali*

$$(\mathbf{1}^*)\quad 2yy'' - 4{y'}^2 - y' = 0 \quad , \quad (\mathbf{2})\quad y'' - \sin y'' = 0\ ,$$

$$(\mathbf{3}^*)\quad 27y'y'' - (1 + 9{y'}^2)\frac{y'''}{y''} = 0 \quad , \quad y'' \neq 0\ .$$

■ *Soluzione di* ($\mathbf{1}^*$). Posto $t(y) = y'$ si ha $t\big(y(x)\big) = y'(x)$ da cui

$$y''(x) = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dx}t\big(y(x)\big) = \frac{dt}{dy}\big(y(x)\big)\,\frac{dy}{dx}(x) = t'\big(y(x)\big)y'(x) = t'\big(y(x)\big)t\big(y(x)\big)\ .$$

Dunque $y'' = t'(y)t(y)$, cosicché l'equazione differenziale si riscrive come l'equazione differenziale nella variabile y

$$2ytt' - 4t^2 - t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t(2yt' - 4t - 1) = 0\ .$$

A $t = 0$ corrispondono le funzioni costanti $y = c$, $c \in \mathbb{R}$, soluzioni dunque dell'equazione differenziale ($\mathbf{1}^*$). Considerando l'equazione differenziale $2yt' - 4t - 1 = 0$ per $y \neq 0$, si è ricondotti all'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili

$$t' = \frac{1}{2y}(4t + 1)\ .$$

Se $4t + 1 = 0$ è $y' = -\dfrac{1}{4}$ per cui le rette $y = -\dfrac{1}{4}x + c$ sono soluzioni della ($\mathbf{1}^*$).
Se $4t + 1 \neq 0$ le soluzioni sono

$$\log|4t + 1| = 2\log|y| + c \iff |4t + 1| = Cy^2 \quad , \quad C > 0$$

da cui

$$4t + 1 = \pm Cy^2 \iff t = \frac{1}{4}(\pm Cy^2 - 1) \quad , \quad C > 0\ .$$

Abbiamo allora le equazioni differenziali (a variabili separabili) $y' = \dfrac{1}{4}(\pm Cy^2 - 1)$.
Posto $C = a^2$, $a \neq 0$, si hanno

$$y' = \frac{1}{4}(a^2y^2 - 1) \qquad \text{e} \qquad y' = -\frac{1}{4}(a^2y^2 + 1)\ .$$

La prima equazione ha le soluzioni $y = \pm\dfrac{1}{a}$. Considerando $a^2y^2 - 1 \neq 0$ nella prima, risolviamo le equazioni differenziali

$$\frac{4}{a^2y^2 - 1}y' = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{4}{a^2y^2 + 1}y' = -1\ .$$

Integrando si ottengono le soluzioni

$$\frac{1}{a}\log\left(\frac{ay - 1}{ay + 1}\right)^2 = x + b \qquad \text{e} \qquad \frac{4}{a}\arctan ay = -x + b \quad , \quad b \in \mathbb{R}\ ,$$

da cui

$$\left(\frac{ay - 1}{ay + 1}\right)^2 = e^{a(x+b)} \qquad \text{e} \qquad ay = \tan\left[\frac{a}{4}(-x + b)\right]\ .$$

La seconda dà le soluzioni

$$y = \frac{1}{a}\tan\left[\frac{a}{4}(-x + b)\right] \quad , \quad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0\ .$$

Per la prima si ha

$$\left|\frac{ay - 1}{ay + 1}\right| = e^{a(x+b)/2} \iff \frac{ay - 1}{ay + 1} = \pm e^{a(x+b)/2}$$

Risolvendo rispetto a y si determinano le soluzioni

$$y = \frac{1}{a}\,\frac{1 \pm e^{a(x+b)/2}}{1 \mp e^{a(x+b)/2}} \iff y = \frac{1}{a}\,\frac{\left(1 \pm e^{a(x+b)/2}\right)^2}{1 - e^{a(x+b)}} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \ .$$

Soluzione di **(2)**. Derivando si ottiene

$$y''' - y''' \cos y'' = 0 \qquad \iff \qquad y'''(1 - \cos y'') = 0 \ .$$

Se $y''' = 0$ allora $y = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$; se $\cos y'' = 1$ allora $y = a\pi x^2 + bx + c$ con $a \in \mathbb{Z}$, $b, c \in \mathbb{R}$.

Soluzione di (**3***). Sia $t = y'$, $t = t(x)$, allora $t' = y''$, $t'' = y'''$. L'equazione differenziale si riscrive

$$27tt' = (1 + 9{y'}^2)t'' = 0 \ .$$

Sia $z\big(t(x)\big) = t'(x)$ allora

$$t'' = z't' = z'z$$

dove $z' = \dfrac{dz}{dt}$, perciò l'equazione diventa

$$27tz - (1 + 9t^2)z' = 0 \iff z' = \frac{27t}{1 + 9t^2}z$$

ottenendo così un'equazione differenziale (in z) a variabili separabili. Integrando si ha

$$c_1 z = (1 + 9t^2)^{3/2} \quad , \quad c_1 \in \mathbb{R} \ .$$

Tuttavia $z = t'$ per cui questa è l'equazione a variabili separabili (in t)

$$c_1 t' = (1 + 9t^2)^{3/2}$$

la cui soluzione è data da

$$c_1 \int (1 + 9t^2)^{-3/2}\, dt = x + c_2 \quad , \quad c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Una soluzione dell'integrale (differenziale binomio[13], cfr. (7.1)) è

$$\frac{t}{(1 + 9t^2)^{1/2}}$$

quindi si ha

$$c_1 \frac{t}{(1 + 9t^2)^{1/2}} = x + c_2 \iff c_1^2 t^2 = (x + c_2)^2 (1 + 9t^2) \iff$$

$$\left[c_1^2 - 9(x + c_2)^2\right] t^2 = (x + c_2)^2$$

dalla quale si ricava

$$t = \pm \frac{x + c_2}{\left[c_1^2 - 9(x + c_2)^2\right]^{1/2}} \ .$$

Notiamo che, poichè $t = y'$, queste sono ancora equazioni differenziali a variabili separabili (in y)

$$y' = \pm \frac{x + c_2}{\left[c_1^2 - 9(x + c_2)^2\right]^{1/2}}$$

---

[13] $m = 0$, $n = 2$, $p = -\dfrac{3}{2}$.

con soluzioni

$$y(x)+c_3=\pm\int\frac{x+c_2}{\left[c_1^2-9(x+c_2)^2\right]^{1/2}}\,dx$$

i.e.

$$y(x)+c_3=\mp\frac{1}{18}\int -18(x+c_2)\left[c_1^2-9(x+c_2)^2\right]^{-1/2}\,dx$$

da cui, integrando,

$$y(x)+c_3=\mp\frac{1}{9}\left[c_1^2-9(x+c_2)^2\right]^{1/2}\iff\left[y(x)+c_3\right]^2=\frac{1}{81}\left[c_1^2-9(x+c_2)^2\right]\ ,$$

$c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$. In conclusione le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale **(3)** devono soddisfare alla relazione

$$9\left[y(x)+a\right]^2+(x+b)^2=c^2\quad,\quad a,b,c\in\mathbb{R}\ .$$

■

11. Appendice

Esercizio 11.1. *Il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \cos n$$

non esiste.

■ *Soluzione.* Se fosse $\lim_{n\to\infty} \cos n = +\infty$ allora per ogni $K \geq 2$ dovrebbe esistere $n_K \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > n_K$ sia $\cos n > K \geq 2$ e questo è assurdo.
In modo analogo non può essere $\lim_{n\to\infty} \cos n = -\infty$. Supponiamo allora che sia $\lim_{n\to\infty} \cos n = \ell$. In particolare sarebbe $\lim_{n\to\infty} \cos 2n = \ell$ ovvero $\lim_{n\to\infty} (2\cos^2 n - 1) = \ell$ e questo equivarrebbe a $2 \lim_{n\to\infty} \cos^2 n = \ell + 1$. Per l'unicità del limite necessariamente dovrebbe dunque essere $2\ell^2 = \ell + 1$. Pertanto

$$\ell = 1 \qquad \text{o} \qquad \ell = -\frac{1}{2}\,. \tag{11.1}$$

D'altra parte sarebbe anche $\lim_{n\to\infty} \cos 3n = \ell$ ovvero, poiché $\cos 3n = 4\cos^3 n - 3\cos n$, dovrebbe essere (sempre per l'unicità del limite) $4\ell^3 - 3\ell = \ell$. Questo, tenuto conto della (11.1), darebbe l'unica soluzione

$$\ell = 1\,. \tag{11.2}$$

Ora sarebbe

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2 n = \lim_{n\to\infty} (1 - \cos^2 n) = 0$$

e quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esisterebbe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tale che per $n > n_\varepsilon$ si avrebbe $\sin^2 n < \varepsilon^2$ ovvero $|\sin n| < \varepsilon$. Dunque sarebbe $\lim_{n\to\infty} \sin n = 0$. Siccome per la (11.2) sarebbe anche $\lim_{n\to\infty} \cos(n+1) = 1$, si avrebbe l'assurdo

$$1 = \lim_{n\to\infty} (\cos 1\, \cos n - \sin 1\, \sin n) = \cos 1\,.$$

Ne segue allora che il limite $\lim_{n\to\infty} \cos n$ non esiste.

■

• L'esercizio sopra implica che anche il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sin n$$

non esiste.

Esercizio 11.2. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n!}{n \log n}\,.$$

■ *Soluzione.* Poiché per $n \geq 2$

$$\log \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{n} \log n! - \log n = \log n \left(\frac{\log n!}{n \log n} - 1 \right)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \log \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \log \frac{1}{e} = -1$$

allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $n_\varepsilon \geq 2$, tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$ si abbia

$$\left|\log n \left(\frac{\log n!}{n \log n} - 1\right) + 1\right| < \varepsilon$$

cioè

$$-\varepsilon - 1 < \log n \left(\frac{\log n!}{n \log n} - 1\right) < \varepsilon - 1$$

da cui

$$-\frac{\varepsilon + 1}{\log n} < \frac{\log n!}{n \log n} - 1 < \frac{\varepsilon - 1}{\log n} \ .$$

In particolare per $\varepsilon = 2$ esiste $n_2 \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n_2$ sia

$$-\frac{3}{\log n} < \frac{\log n!}{n \log n} - 1 < \frac{1}{\log n} \ .$$

Applicando il teorema dei due carabinieri si ottiene

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log n!}{n \log n} = 1 \ .$$

■

Esercizio 11.3. *Dimostrare la seguente generalizzazione del Teorema di Rolle:*

Teorema 11.1. *Sia* $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua, derivabile in* $(-\infty, a)$ *e tale che* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = f(a)$. *Allora esiste* $x_0 \in (-\infty, a)$ *tale che* $f'(x_0) = 0$.

In modo analogo, se $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua, derivabile in* $[a, +\infty)$ *e tale che* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$, *allora esiste* $x_0 \in [a, +\infty)$ *tale che* $f'(x_0) = 0$.

■ *Soluzione*. (1) Supponiamo che esista $x_1 < a$ per cui $f(x_1) = f(a)$: dal teorema di Rolle esisterebbe $x_0 \in (x_1, a)$ per cui$f'(x_0) = 0$ e questo concluderebbe la dimostrazione. (2) Se invece $f(x_1) \neq f(a)$ per ogni $x_1 < a$, poiché la funzione f ha minimo e massimo sul compatto $[x_1, a]$, si può supporre che essi cadano in x_1 e a, per ogni $x_1 < a$. Se ad esempio a è il punto di minimo e x_1 è il punto di massimo allora $f(a) < f(x_1)$. D'altra parte per ogni $x_2 < x_1$ i punti di estremo di f su $[x_2, a]$ sono x_2 e a. Se a fosse il punto di massimo allora per ogni $x \in [x_2, a]$ sarebbe $f(x) \leq f(a)$: in particolare sarebbe $f(x_1) \leq f(a)$ (perché $x_1 \in [x_2, a]$) che sarebbe dunque un assurdo. Pertanto per ogni $x_2 < x_1$, a è il punto di minimo e x_2 è il punto di massimo di f su $[x_2, a]$. Allora, poiché $f(x_2) \neq f(a)$, è $f(x_2) > f(a)$ e per ogni $x_2 < x_1$, $f(x_1) \leq f(x_2)$, cioè f è decrescente su $(-\infty, x_1]$ e di conseguenza

$$f(a) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \sup_{x \in (-\infty, x_1]} f(x)$$

da cui l'assurdo $f(x_2) \leq f(a)$. In modo analogo si procede se a è il punto di massimo. In ogni caso dunque se per ogni $x_1 < a$ è $f(x_1) \neq f(a)$ allora esiste $x_1' < a$ per cui almeno uno dei punti di estremo di f su $[x_1', a]$ sia in (x_1', a): se x_0 è tale punto, si ha $f'(x_0) = 0$.

In modo analogo si procede se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$.

■

Bibliografia

[1] E. Barletta & S. Dragomir, *Lezioni di Analisi Matematica I*, Edizioni Ermes, Potenza, 1999.
[2] E. Giusti, *Analisi Matematica I*, Bollati Boringhieri Ed., Torino, 1989.
[3] E. Giusti, *Esercizi e complementi di Analisi matematica I*, Bollati Boringhieri Ed., Torino, 1991.