

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA BASILICATA
SCUOLA DI INGEGNERIA

Prova di¹
Analisi Matematica I
(ING0002, ING0276, ING0008, IN0500)

6 febbraio 2024

[1] Senza usare i teoremi di de l'Hôpital, calcolare i seguenti limiti di funzione:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} \quad , \quad \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^e - 1}{x - 1} \quad , \\ \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin x \cos \frac{1}{\pi - x} \quad , \quad \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x + \cos x - 2}{\sin^3 x - 2x} \quad . \end{aligned}$$

[2] (i) Dimostrare che se $A \subset \mathbb{R}$ è un sottoinsieme inferiormente limitato allora l'insieme dei minoranti ha massimo.

(ii) Dare un esempio di integrale improprio del tipo $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ convergente.

(iii) Dimostrare che, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{d}{dx} \sin x \Big|_{x=x_0} = \cos x_0 \quad , \quad \frac{d}{dx} \cos x \Big|_{x=x_0} = -\sin x_0 \quad .$$

(iv) Definire il logaritmo $\log z$ per $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ e calcolare $\log(-1)$.

[3] Risolvere le seguenti equazioni differenziali e determinare per ciascuna le soluzioni per cui sia $y(0) = 1$, $0 \leq k \leq 3$:

$$\text{(A)} \quad y^{(4)} + y^{(2)} + y = 0 \quad ,$$

$$\text{(B)} \quad 16y^{(6)} - 2y^{(4)} + \frac{1}{16}y'' = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - 32 \quad .$$

¹Ogni esercizio ben risolto vale 10 punti. Durata totale della prova: 2 ore.
Risposte non attinenti alle lezioni svolte (ad esempio scaricate da internet) non verranno prese in considerazione.