

Esercizi e complementi relativi al corso

Analisi Matematica I
(12 C.F.U.)

Elisabetta Barletta

INDICE

1. Esercizi sul principio di induzione matematica	4
2. Esercizi sulle successioni e serie di numeri reali	9
3. Esercizi sui limiti di una funzione di una variabile reale	45
4. Esercizi sullo studio del grafico di una funzione di una variabile reale	61
5. Esercizi sulle formule di Taylor e di Mac Laurin	82
6. Esercizi sui numeri complessi	97
7. Esercizi sugli integrali indefiniti	101
8. Esercizi sugli integrali generalizzati	111
9. Esercizi sulle equazioni differenziali del I ordine	120
10. Esercizi sulle equazioni differenziali a coefficienti costanti di ordine $n \geq 2$	126
11. APPENDICE	147
BIBLIOGRAFIA	149

1. ESERCIZI SUL PRINCIPIO DI INDUZIONE MATEMATICA

Teorema 1.1 (Principio d'induzione matematica). Sia $\{P(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di proposizioni enunciate ciascuna per il naturale $n \in \mathbb{N}$. Se

- (i) $P(0)$ è vera,
- (ii) per $n \in \mathbb{N}$ l'implicazione " $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ " è vera,

allora la proposizione $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dal principio d'induzione matematica segue il seguente

Corollario 1.1. Sia $\{P(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di proposizioni enunciate ciascuna per il naturale $n \in \mathbb{N}$. Se

- (i) $P(n_0)$ è vera per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$,
- (ii) l'implicazione " $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ " è vera per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$,

allora la proposizione $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Esercizio 1.1. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ è:

- (i) $1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$,
- (ii) $1 + 3 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$,
- (iii) $1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

■ *Soluzione di (i).* Sia $P(n)$ data da:

$$P(n) : 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Per dimostrare la formula data, basta usare il principio d'induzione matematica. A tal fine verifichiamo la veridicità della $P(0)$. È ovvio che per $n = 0$ i membri dell'uguaglianza scritta sopra sono entrambi uguali a 0 e dunque $P(0)$ è soddisfatta.

Supponiamo ora che $P(n)$ sia soddisfatta; vogliamo provare che anche $P(n+1)$ è soddisfatta. Essa afferma che

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &\stackrel{P(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Dunque il principio d'induzione matematica ci permette di affermare che la formula

$$1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione di (ii). Sia ora $P(n)$ data da:

$$P(n) : 1 + 3 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Per dimostrare la formula data, anche qui basta usare il principio d'induzione matematica. Verifichiamo la veridicità della $P(0)$. Per $n = 0$ i membri dell'uguaglianza scritta sopra

sono entrambi uguali a 1 e dunque $P(0)$ è soddisfatta.

Supponiamo ora che $P(n)$ sia soddisfatta; vogliamo provare che anche $P(n+1)$ è soddisfatta, e cioè che

$$P(n+1) : 1 + 3 + \cdots + (2n+1) + (2n+3) = (n+2)^2 .$$

Si ha:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \cdots + (2n+1) + (2n+3) &\stackrel{P(n)}{=} (n+1)^2 + 2n+3 = \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 . \end{aligned}$$

Dunque il principio d'induzione matematica ci permette di affermare che la formula

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$$

è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione di (iii). Sia $P(n)$ data da:

$$P(n) : 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Usiamo anche qui il principio d'induzione matematica. Per $n=0$ i membri dell'uguaglianza scritta sopra sono entrambi uguali a 0 e dunque $P(0)$ è soddisfatta.

Supponiamo ora che $P(n)$ sia soddisfatta; vogliamo provare che anche $P(n+1)$ è soddisfatta, e cioè che

$$P(n+1) : 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} .$$

Si ha:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &\stackrel{P(n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \\ &= \frac{(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 3n + 6)}{6} = \\ &= \frac{(n+1)[2n(n+2) + 3(n+2)]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} . \end{aligned}$$

Dunque il principio d'induzione matematica ci permette di affermare che la formula

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. ■

Esercizio 1.2. Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è:

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} .$$

■ *Soluzione.* Poniamo

$$P(n) : a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} .$$

Per $n = 1$ il primo membro dell'uguaglianza è $a - b$, così come lo è il secondo. Quindi $P(1)$ è soddisfatta.

Supponiamo vera $P(n)$ e proviamo $P(n + 1)$, cioè che

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} .$$

Scriviamo

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a^{n+1} - a^n b + a^n b - b^{n+1} = \\ &= a^n(a - b) + b(a^n - b^n) \stackrel{P(n)}{=} (a - b) \left[a^n + b \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right] = \\ &= (a - b)[a^n + b^n + ab^{n-1} + \dots + a^{n-1}b] = (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} . \end{aligned}$$

Pertanto per il principio d'induzione matematica, la formula proposta è vera. \blacksquare

Esercizio 1.3. *Dimostrare la disuguaglianza di Bernoulli, e cioè, per $a \in \mathbb{R}, a > -1$ e per $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$(1 + a)^n \geq 1 + na .$$

■ *Soluzione.* Posto

$$P(n) : (1 + a)^n \geq 1 + na ,$$

per $n = 0$ la disuguaglianza è soddisfatta (in tal caso vale l'uguaglianza). Tenuto conto che $1 + a > 0$ si ha che

$$\begin{aligned} (1 + a)^{n+1} &= (1 + a)(1 + a)^n \stackrel{P(n)}{\geq} (1 + a)(1 + na) = 1 + na + a + na^2 > \\ &> 1 + (n + 1)a \end{aligned}$$

e di conseguenza $P(n)$ implica $P(n + 1)$. Dal principio d'induzione matematica si ottiene allora la disuguaglianza scritta. \blacksquare

Esercizio 1.4. *Dimostrare la formula del binomio di Newton e cioè che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ è*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

■ *Soluzione.* Per $n = 0$ la formula è banalmente verificata. Posto

$$P(n) : (a + b)^n = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^h b^{n-h}$$

si ha che

$$\begin{aligned} (1.1) \quad (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \stackrel{P(n)}{=} (a + b) \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^h b^{n-h} = \\ &= \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^{h+1} b^{n-h} + \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^h b^{n+1-h} . \end{aligned}$$

Nella prima sommatoria di (1.1) poniamo $k = h + 1$ cosicché $h = k - 1$ e

$$\sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^{h+1} b^{n-h} = \sum_{k-1=0}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k}.$$

Quindi sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \\ &= \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1}. \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \\ &= \frac{n!k + n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

e quindi

$$(a+b)^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

che dà la veridicità della $P(n+1)$. ■

Esercizio 1.5. Dimostrare che $2^n n! < n^n$ per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$.

■ *Soluzione.* Sia

$$P(n) : 2^n n! < n^n.$$

Per $n = 6$ si ha che $2^6 6! = 2^6 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 46.080$ mentre $n^n = 6^6 = 46.656$ e dunque la disuguaglianza è verificata. (Si osservi che per $1 \leq n \leq 5$ la disuguaglianza è falsa.) Supposta ora vera $P(n)$, proviamo $P(n+1)$. Si ha:

$$\begin{aligned} (n+1)^{n+1} &= (1+n)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} n^{n+1-k} \geq \\ &\geq \binom{n+1}{0} n^{n+1} + \binom{n+1}{1} n^n + \binom{n+1}{2} n^{n-1} = \\ &= n^{n+1} + (n+1)n^n + \frac{1}{2}(n+1)n^n = n^n \left[n + \frac{3}{2}(n+1) \right] = \\ &= n^n \left(\frac{5}{2}n + \frac{3}{2} \right) = n^n \left(2n + \frac{n+3}{2} \right) \geq n^n \left(2n + \frac{9}{2} \right) > n^n (2n+4) = 2n^n (n+2) \end{aligned}$$

cioè abbiamo

$$(1.2) \quad 2(n+2)n^n < (n+1)^{n+1}.$$

Si osservi che, dall'ipotesi di induzione,

$$2^{n+1}(n+1)! = 2(n+1)2^n n! < 2(n+1)n^n$$

per cui, tenuto conto della (1.2),

$$2^{n+1}(n+1)! < 2(n+1)n^n < 2(n+2)n^n < (n+1)^{n+1}$$

che è l'asserto della $P(n+1)$. ■

2. ESERCIZI SULLE SUCCESSIONI E SERIE DI NUMERI REALI

Esercizio 2.1. *Dimostrare che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

per $a \in \mathbb{R}, a > 0$.

■ *Soluzione.* L'asserto è banalmente vero se $a = 1$.

Se $a > 1$ allora $\sqrt[n]{a} > 1$ e dunque potremo scrivere $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$, con $a_n > 0$. Allora $a = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n > na_n$ da cui $a_n < \frac{a}{n}$. Pertanto

$$0 < a_n < \frac{a}{n}$$

e dal teorema dei due carabinieri si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n) = 1.$$

Se $0 < a < 1$ allora $0 < \sqrt[n]{a} < 1$ e $\frac{1}{a} > 1$. Si pone $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{1 + a_n}$, con $a_n > 0$. Allora $a = \frac{1}{(1 + a_n)^n}$ e siccome ancora $(1 + a_n)^n \geq 1 + na_n > na_n$, segue che $a_n < \frac{1}{na}$.

Pertanto

$$0 < a_n < \frac{1}{na}$$

e dal teorema dei due carabinieri si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + a_n} = 1. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2.2. *Dimostrare che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1.$$

■ *Soluzione.* Si scriva $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = \left(\sqrt{\sqrt[n]{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt[n]{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}}$. Siccome $n > 1$, allora $\sqrt[n]{\sqrt{n}} > 1$ e scriviamo $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + a_n$, con $a_n > 0$. Ne segue che

$$\sqrt{n} = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n > na_n$$

da cui $0 < a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ e, per il teorema dei due carabinieri, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Si ha allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{2}} = 1. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2.3. *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$$

per $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

■ *Soluzione.* Se $a = 1$ il limite proposto è 1. Se $a = -1$ si ottiene la successione $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ il cui limite non esiste.

Se $0 < a < 1$, poniamo $a = \frac{1}{1+h}$, con $h > 0$. Allora

$$0 < a^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}$$

e dal teorema dei due carabinieri segue che il limite proposto è 0.

Se $-1 < a < 0$ allora $0 < |a| < 1$ e per quanto visto $\lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = 0$. Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq n_\varepsilon$ sia $||a|^n| = |a|^n < \varepsilon$. Ora

$$|a|^n = \underbrace{|a| \cdots |a|}_{n\text{-volte}} = \underbrace{|a \cdots a|}_{n\text{-volte}} = |a^n|,$$

dunque per $n \geq n_\varepsilon$ è $|a^n| < \varepsilon$. Da questo segue che $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ anche nel caso $-1 < a < 0$.

Se $a > 1$ allora scriviamo $a = 1+h$, con $h > 0$ e quindi $a^n = (1+h)^n \geq 1+nh > nh$. Siccome $\lim_{n \rightarrow \infty} nh = +\infty$, per ogni $K > 0$ esiste $n_K \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_K$, si abbia $nh > K$ e di conseguenza per lo stesso n_K , se $n > n_K$, si ha che $a^n > K$ ovvero che $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$.

Se infine $a < -1$, scriviamo $a = -b$, per $b > 1$. Ne segue che $a^n = (-1)^n b^n$ e il limite della successione $\{(-1)^n b^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non esiste in quanto le due sottosuccessioni $\{(-1)^{2k} b^{2k}\}_{k \in \mathbb{N}} = \{b^{2k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{(-1)^{2k+1} b^{2k+1}\}_{k \in \mathbb{N}} = \{-b^{2k+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ divergono rispettivamente a $+\infty$ e $-\infty$.

Ricapitolando si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < |a| < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a \leq -1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Osservazione 2.1. Per $a = 0$ si ha la successione costantemente nulla ed è ovvio che $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$.

Esercizio 2.4. *Dimostrare che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

per $\alpha \in \mathbb{R}$.

■ *Soluzione.* Per $\alpha = 0$ è ovvio. Se $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, i.e. $\alpha = m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^m} = \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right) \cdots \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right)}_m = 1.$$

Se invece $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ allora si pone $\alpha = -m$, per $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{-m}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^m}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n^m})} = 1.$$

In ogni caso per $\alpha \in \mathbb{Z}$ è $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$.

Infine se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, tenuto conto che $[\alpha] \leq \alpha \leq [\alpha] + 1$, con $[\alpha] \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\sqrt[n]{n^{[\alpha]}} \leq \sqrt[n]{n^\alpha} \leq \sqrt[n]{n^{[\alpha]+1}}$$

e dal teorema dei due carabinieri si ricava l'asserto. ■

Esercizio 2.5. Calcolare, per $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n}$.

■ *Soluzione.* Se $0 < a < 1$ allora $\frac{1}{a} > 1$ e dunque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n = +\infty$. Poichè anche $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$, per $0 < a < 1$ si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{a^n} = +\infty.$$

Se invece $-1 < a < 0$ allora $a = -b$ con $0 < b < 1$. La sottosuccessione

$$\left\{ \frac{2k}{(-1)^{2k} b^{2k}} \right\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{2k}{b^{2k}} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

diverge a $+\infty$, mentre la sottosuccessione

$$\left\{ \frac{2k+1}{(-1)^{2k+1} b^{2k+1}} \right\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ -\frac{2k+1}{b^{2k+1}} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

diverge a $-\infty$. Di conseguenza non esiste il $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n}$ per $-1 < a < 0$.

Anche per $a = -1$ questo limite non esiste, mentre per $a = 1$ il limite è $+\infty$.

Se $a > 1$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. In questo caso $\sqrt{a} > 1$ e scriviamo $\sqrt{a} = 1 + h$, con $h > 0$. Allora

$$(\sqrt{a})^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh > nh$$

da cui $a^n > n^2 h^2$ e quindi

$$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{1}{nh^2}.$$

Applicando il teorema dei due carabinieri si ricava che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$ per $a > 1$.

Se invece $a < -1$ allora si pone $a = -b$, con $b > 1$, e $0 \leq \left| \frac{n}{a^n} \right| = \frac{n}{b^n} < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, per $n > n_\varepsilon$, essendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b^n} = 0$. Ne segue che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$ per $a < -1$.

Ricapitolando,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a \leq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } -1 \leq a < 0 \\ 0 & \text{se } a > 1, a < -1. \end{cases}$$

■

Osservazione 2.2. Si noti che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = +\infty \quad \text{se } a > 1$$

(essendo in tal caso $a^n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) mentre non esiste se $a < -1$.

Più in generale,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$$

per $a > 1$ e $\alpha > 0$.

Infatti

$$\frac{a^n}{n^\alpha} = \left(\frac{a^{n/\alpha}}{n} \right)^\alpha = \left(\frac{(a^{1/\alpha})^n}{n} \right)^\alpha = \left(\frac{b^n}{n} \right)^\alpha$$

dove si è posto $b = a^{1/\alpha}$ e $b > 1$. Per ogni $K > 0$ si consideri $K^{1/\alpha} > 0$ e poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n} = +\infty$, si ha che esiste $n_K \in \mathbb{N}$ tale che, per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_K$, sia $\frac{b^n}{n} > K^{1/\alpha}$.

Quindi anche $\left(\frac{b^n}{n} \right)^\alpha > K$ e perciò $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b^n}{n} \right)^\alpha = +\infty$.

Esercizio 2.6. Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$.

■ *Soluzione.* Se $|a| < 1$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$, dunque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Se $a = 1$ allora banalmente il limite proposto è nullo; se $a = -1$, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$\left| \frac{(-1)^n}{n!} \right| = \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

per $n > n_\varepsilon$, $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$. Dunque ancora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Se $a > 1$ poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, si abbia $\frac{a}{n} < \varepsilon$. In particolare per $\varepsilon = \frac{1}{2}$ si può prendere $n > [2a] + 1$.

Supponiamo allora di aver fissato $k \in \mathbb{N}$ con $k > [2a] + 1$. Ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > k$, è un naturale maggiore di $[2a] + 1$ e anche $k + 1 > [2a] + 1$, e così via i suoi successivi fino a n . Ne segue che $\frac{a}{k+1} < \frac{1}{2}$, $\frac{a}{k+2} < \frac{1}{2}$, ecc., $\frac{a}{n} < \frac{1}{2}$, da cui

$$\begin{aligned} 0 < \frac{a^n}{n!} &= \frac{a^k}{k!} \underbrace{\frac{a^{n-k}}{(k+1) \cdots n}}_{n-k} = \frac{a^k}{k!} \frac{a}{k+1} \frac{a}{k+2} \cdots \frac{a}{n} < \\ &< \frac{a^k}{k!} \underbrace{\frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{n-k} = \frac{a^k}{k!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k} = \frac{(2a)^k}{k!} \left(\frac{1}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

Ora $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$, dunque l'asserto segue dal teorema dei due carabinieri.

Se $a < -1$, posto $a = -b$, con $b > 1$, allora $\frac{a^n}{n!} = (-1)^n \frac{b^n}{n!}$ e poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n!} = 0$, si ottiene che anche il limite proposto per $a < -1$ è nullo. ■

Esercizio 2.7. *Dimostrare che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty .$$

■ *Soluzione.* Sia $K > 0$, allora sappiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K^n}{n!} = 0$. Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n_\varepsilon$ si abbia $\frac{K^n}{n!} < \varepsilon$. In particolare per $\varepsilon = 1$ esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ per cui per $n > n_1$ sia $\frac{K^n}{n!} < 1$. Questo accade se e solo se per $n > n_1$ è $n! > K^n$ ovvero se per $n > n_1$ è $\sqrt[n]{n!} > K$. Dalla scelta arbitraria di $K > 0$ segue allora che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty .$$

Esercizio 2.8. *Dimostrare che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 .$$

■ *Soluzione.* Sappiamo che per $n \geq 6$ è $2^n n! < n^n$; allora

$$0 < \frac{n!}{n^n} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

e pertanto l'asserto segue dal teorema dei due carabinieri. ■

Esercizio 2.9. *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} .$$

■ *Soluzione.* Basta scrivere

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

da cui si ricava che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0 .$$

Esercizio 2.10. *Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione divergente a $+\infty$. Se $b > 1$ dimostrare che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b^{a_n}} = 0 .$$

■ *Soluzione.* Senza perdere di generalità, si può supporre che sia $a_n > 1$, cosicché la parte intera $[a_n] \geq 1$. Di conseguenza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[a_n]}{b^{[a_n]}} = 0 .$$

Poiché

$$\frac{[a_n]}{b^{[a_n]+1}} \leq \frac{a_n}{b^{a_n}} \leq \frac{[a_n] + 1}{b^{[a_n]}} ,$$

passando al limite per n tendente all'infinito, dal teorema dei due carabinieri si ha la tesi.

Da questo segue anche che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^\beta}{b^{a_n}} = 0$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. ■

Esercizio 2.11. *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha} \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha (\log n)^\beta}{a^n},$$

per $a > 1$, $\alpha, \beta > 0$.

■ *Soluzione.* Per il primo limite, posto $a_n = \log n$, si ha che $n = e^{a_n}$ e dunque, dall'esercizio precedente, segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^\beta}{(e^\alpha)^{a_n}} = 0.$$

Per il secondo limite, posto $a^n = ((\sqrt{a})^n)^2$, siccome $\sqrt{a} > 1$, si ha

$$\frac{n^\alpha (\log n)^\beta}{a^n} = \frac{n^\alpha}{(\sqrt{a})^n} \frac{(\log n)^\beta}{(\sqrt{a})^n} = \frac{n^\alpha}{(\sqrt{a})^n} \frac{(\log n)^\beta}{n} \frac{n}{(\sqrt{a})^n}$$

e ciascun fattore è il termine generale di una successione convergente a 0. ■

Esercizio 2.12. *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}.$$

■ *Soluzione.* Osserviamo che

$$\left| \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, si abbia $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

Allora per $n > n_\varepsilon$, è $\left| \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon$, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2.13. *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 3).$$

Esercizio 2.14. *Sia $r \in \mathbb{Q}$ e $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione per cui $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + a_n)^r - 1}{a_n} = r.$$

■ *Soluzione.* Per $r = 0$ è banalmente vero. Per $r = p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha

$$(1 + a_n)^p - 1 = a_n \sum_{k=0}^{p-1} (1 + a_n)^k \quad \implies \quad \frac{(1 + a_n)^p - 1}{a_n} = \sum_{k=0}^{p-1} (1 + a_n)^k$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + a_n)^p - 1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{p-1} (1 + a_n)^k = \sum_{k=0}^{p-1} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^k = \sum_{k=0}^{p-1} 1 = p.$$

Per $r \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, posto $r = -p$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + a_n)^{-p} - 1}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1 + a_n)^p}{a_n(1 + a_n)^p} = \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + a_n)^p - 1}{a_n(1 + a_n)^p} = - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + a_n)^p - 1}{a_n} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + a_n)^p} \right) = -p. \end{aligned}$$

Per $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, poniamo $r = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, p e q primi fra loro; senza perdere di generalità, possiamo assumere $p > 0$. Si ha

$$\frac{(1 + a_n)^{p/q} - 1}{a_n} = \frac{[(1 + a_n)^{1/q}]^p - 1}{(1 + a_n)^{1/q} - 1} \cdot \frac{(1 + a_n)^{1/q} - 1}{a_n}$$

dove

$$[(1 + a_n)^{1/q}]^p - 1 = [(1 + a_n)^{1/q} - 1] \sum_{k=0}^{p-1} (1 + a_n)^{k/p},$$

quindi

$$(2.1) \quad \frac{(1 + a_n)^{p/q} - 1}{a_n} = \frac{(1 + a_n)^{1/q} - 1}{a_n} \sum_{k=0}^{p-1} (1 + a_n)^{k/p}.$$

Scriviamo $a_n = 1 + a_n - 1 = [(1 + a_n)^{1/q}]^q - 1$.

Se $q > 0$ allora

$$a_n = [(1 + a_n)^{1/q} - 1] \sum_{k=0}^{q-1} (1 + a_n)^{k/q}.$$

Se invece $q < 0$, posto $q = -m$, $m > 0$, si ha

$$\begin{aligned} a_n &= [(1 + a_n)^{1/m}]^m - 1 = [(1 + a_n)^{1/m} - 1] \sum_{k=0}^{m-1} (1 + a_n)^{k/m} = \\ &= [(1 + a_n)^{-1/q} - 1] \sum_{k=0}^{-q-1} (1 + a_n)^{-k/q} = \frac{1 - (1 + a_n)^{1/q}}{(1 + a_n)^{1/q}} \sum_{k=0}^{-q-1} (1 + a_n)^{-k/q} \end{aligned}$$

i.e.

$$a_n = - \frac{(1 + a_n)^{1/q} - 1}{(1 + a_n)^{1/q}} \sum_{k=0}^{-q-1} (1 + a_n)^{-k/q}.$$

Ne segue che

$$\frac{(1+a_n)^{p/q} - 1}{a_n} = \begin{cases} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} (1+a_n)^{k/q}}{q-1} & , \quad q > 0 \\ -(1+a_n)^{1/q} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} (1+a_n)^{k/p}}{-q-1} & , \quad q < 0 . \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+a_n)^{p/q} - 1}{a_n} = \begin{cases} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} 1}{q-1} = \frac{p}{q} & , \quad q > 0 \\ -\frac{\sum_{k=0}^{p-1} 1}{-q-1} = -\frac{p}{(-q)} = \frac{p}{q} & , \quad q < 0 . \end{cases}$$

In ogni caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+a_n)^{p/q} - 1}{a_n} = \frac{p}{q} . \quad \blacksquare$$

Osservazione 2.3. Più in generale per $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \alpha .$$

Esercizio 2.15. *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) .$$

■ *Soluzione.* Poiché $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$, si ha

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2} = \frac{n+1}{2n}$$

e pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} . \quad \blacksquare$$

Esercizio 2.16. *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} \right).$$

■ *Soluzione.* Si ha

$$\frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)},$$

inoltre $(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$ e dunque

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} &= \left(\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} \right) \left(\prod_{k=2}^n \frac{(k+1)^2 - (k+1) + 1}{k^2 - k + 1} \right) = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{3 \cdot \dots \cdot (n+1)} \cdot \frac{3^2 - 3 + 1}{2^2 - 2 + 1} \cdot \frac{4^2 - 4 + 1}{3^2 - 3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{(n+1)^2 - (n+1) + 1}{n^2 - n + 1} = \\ &= \frac{2(n-1)![(n+1)^2 - (n+1) + 1]}{3(n+1)!} = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} \right) = \frac{2}{3}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2.17. *Sia $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$. Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a^k.$$

■ *Soluzione.* Dal fatto che

$$1 - a^{n+1} = (1-a) \sum_{k=0}^n a^{n-k} = (1-a)(a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1) = (1-a) \sum_{k=0}^n a^k$$

segue che $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ e siccome $|a| < 1$, si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n a^k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}. \quad \blacksquare$$

Si noti che questo fatto permette di dire che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$$

detta *serie geometrica di ragione a* , converge per $|a| < 1$ ed ha somma $S = \frac{1}{1-a}$ ovvero

$$(2.2) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

mentre diverge per $|a| \geq 1$. ■

Esercizio 2.18. *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right).$$

■ *Soluzione.* Si noti che per ogni $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right) = 1. \quad \blacksquare$$

Si noti che questo fatto permette di dire che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

detta *serie di Mengoli* converge ed ha somma 1.

Esercizio 2.19. *Verificare che la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

converge.

■ *Soluzione.* Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$, segue che per $\varepsilon = 1$ si ha che esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n_1$, sia $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e dal criterio del confronto, poiché la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge, si ottiene la convergenza della serie proposta. ■

La serie convergente

$$(2.3) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

si chiama *serie esponenziale* e la sua somma si chiama il *numero di Nepero* che si indica con e , ovvero

$$e := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2.20. *Provare che la successione*

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$$

è *strettamente crescente*.

■ *Soluzione.* Osserviamo dapprima che

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)n!}{k!(n-k+1)(n-k)!} = \frac{n+1}{n-k+1} \binom{n}{k}$$

da cui

$$\binom{n}{k} = \frac{n+1-k}{n+1} \binom{n+1}{k} \implies \binom{n}{k} = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \binom{n+1}{k}.$$

Siccome $-\frac{1}{n+1} > -1$, si ha che

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 - \frac{k}{n+1}$$

e quindi

$$\binom{n}{k} \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k \binom{n+1}{k}$$

ovvero

$$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \binom{n+1}{k}$$

cioè

$$\binom{n+1}{k} \geq \frac{(n+1)^k}{n^k} \binom{n}{k}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} + \binom{n+1}{n+1} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > \\ &> \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \geq \\ &\geq \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)^k}{n^k} \binom{n}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

cioè $a_{n+1} > a_n$. ■

Esercizio 2.21. *Dimostrare che*¹

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

¹E. Giusti, *Analisi Matematica I*, Bollati Boringhieri, Torino 1988, pp. 76-77

■ *Soluzione.* Dallo sviluppo del binomio di Newton si ha:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{n^k(n-k)!} \end{aligned}$$

cioè

$$(2.4) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}.$$

Se s_n è la somma parziale n -esima della serie esponenziale allora $e = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$ si ha $e - \varepsilon < s_m < e + \varepsilon$. Dalla (2.4) si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \right) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} = s_m > e - \varepsilon.$$

Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ è

$$\sup_n \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > e - \varepsilon$$

che, dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, dà

$$\sup_n \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} \geq e \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq e.$$

D'altra parte

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!}$$

per cui dalla (2.4)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = s_n.$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup_n \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} \leq \sup_n \{s_n\} = e.$$

Allora

$$e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2.22. *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

■ *Soluzione.* Si ha che

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{\frac{n-1+1}{n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}},$$

di conseguenza si scrive

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}$$

e tenuto conto dell'osservazione precedente, si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}} \right) = \frac{1}{e}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2.23. Sia $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{rn}\right)^{rn} = e.$$

■ *Soluzione.* Dal fatto che $0 \leq [rn] \leq rn \leq [rn] + 1$, si ha

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{[rn] + 1}\right)^{[rn]} &\leq \left(1 + \frac{1}{rn}\right)^{[rn]} \leq \left(1 + \frac{1}{rn}\right)^{rn} \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{rn}\right)^{[rn]+1} \leq \left(1 + \frac{1}{[rn]}\right)^{[rn]+1}, \end{aligned}$$

inoltre, poiché $[rn] = m \in \mathbb{N}$, si ha che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[rn] + 1}\right)^{[rn]} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m + 1}\right)^m = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{m + 1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{1}{m + 1}} = e, \end{aligned}$$

e anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[rn]}\right)^{[rn]+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 + \frac{1}{m}\right) = e.$$

Dal teorema dei due carabinieri, si ha la tesi. ■

Esercizio 2.24. Provare che il numero di Nepero e è un numero irrazionale e che $2 < e < 3$.

■ *Soluzione.* Poichè $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{s_n\}$, s_n somma parziale n -sima

della serie esponenziale. Si ha

$$e \geq s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} > 2$$

Per provare che e è un numero irrazionale, seguiremo la *dimostrazione di Fourier*.

Per assurdo si supponga che $e \in \mathbb{Q}$, i.e. $e = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geq 1$ perchè $e > 0$.

Fissiamo $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > q \geq 1$: allora $n_0 \geq 2$ e

$$n_0! = 1 \cdots (q-1)q(q+1) \cdots n_0$$

per cui

$$\frac{n_0!}{q} = 1 \cdots (q-1)(q+1) \cdots n_0 = m_0 \in \mathbb{N}.$$

Inoltre se $n > n_0$ allora $s_n > s_{n_0}$, dunque $e \geq s_n > s_{n_0}$. Ne segue che

$$\begin{aligned} 0 < n_0!(e - s_{n_0}) &= n_0! \left(\frac{p}{q} - s_{n_0} \right) = p \frac{n_0!}{q} - n_0! \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} = \\ &= p m_0 - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{n_0!}{k!}. \end{aligned}$$

dove, poiché $0 \leq k \leq n_0$, è $\frac{n_0!}{k!} = (k+1) \cdots n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Quindi da

$$p m_0 - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{n_0!}{k!} > 0$$

segue che

$$n_0!(e - s_{n_0}) \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad n_0!(e - s_{n_0}) \geq 1$$

Ora per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$s_{n_0+n} = s_{n_0} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n_0+k)!} = s_{n_0} + \sigma_n \quad , \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n_0+k)!}$$

σ_n essendo la somma parziale n -sima della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n_0+n)!}.$$

Allora $\sigma_n = s_{n_0+n} - s_{n_0}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, perciò

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n_0+n} - s_{n_0}) = e - s_{n_0}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} n_0! \sigma_n &= n_0! \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n_0+k)!} = \sum_{k=1}^n \frac{n_0!}{(n_0+k)!} = \\ &= \frac{n_0!}{(n_0+1)!} + \frac{n_0!}{(n_0+2)!} + \cdots + \frac{n_0!}{(n_0+n)!} = \\ &= \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{(n_0+1)(n_0+2)} + \cdots + \frac{1}{(n_0+1) \cdots (n_0+n)} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n_0+1)(n_0+2) + \dots + (n_0+k)}$$

dove

$$\underbrace{(n_0+1)(n_0+2) \cdots (n_0+k)}_{k\text{-fattori}} \geq (n_0+1)^k$$

perciò

$$n_0! \sigma_n \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n_0+1} \right)^k = \tau_n,$$

τ_n somma parziale n -esima della serie geometrica a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0+1} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0+1} \right)^n - 1$$

che converge a

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{n_0+1}} - 1 = \frac{n_0+1}{n_0} - 1 = \frac{1}{n_0}.$$

Pertanto $\tau_n \leq \frac{1}{n_0}$ per cui $n_0! \sigma_n \leq \frac{1}{n_0}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, che implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n_0! \sigma_n) \leq \frac{1}{n_0}.$$

In definitiva

$$1 \leq n_0! (e - s_{n_0}) = n_0! \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n_0! \sigma_n) \leq \frac{1}{n_0} \leq \frac{1}{2}$$

che è assurdo. Di conseguenza $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Abbiamo già visto che $e > 2$. Proveremo che $e < 3$. Siccome per $k \geq 1$,

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k = \underbrace{2 \cdot 3 \cdots k}_{(k-1)\text{-fattori}} \geq 2^{k-1}$$

si ha

$$\begin{aligned} s_n < s_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} = \\ &= 1 + \sum_{k-1=h}^n \left(\frac{1}{2} \right)^h = 1 + \sigma_n \end{aligned}$$

per σ_n somma parziale n -sima della serie geometrica a termini positivi $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ che ha

somma $\sigma = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$. Allora

$$e = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{s_n\} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \{1 + \sigma_n\} = 1 + \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\sigma_n\} = 1 + 2 = 3$$

cioè risulterebbe $e \leq 3$, ma essendo $e \notin \mathbb{Q}$, si ha $e < 3$. ■

Esercizio 2.25. Calcolare i seguenti limiti di successioni

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n - \cos n^2}{n^2 - n + 6}, \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

■ *Soluzione di (1).* Poiché

$$\left| \frac{\sin n - \cos n^2}{n^2 - n + 6} \right| \leq \frac{|\sin n| + |\cos n^2|}{n^2 - n + 6} \leq \frac{2}{n^2 - n + 6}$$

e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 - n + 6} = 0$ segue che

$$\left| \frac{\sin n - \cos n^2}{n^2 - n + 6} \right| \leq \frac{2}{n^2 - n + 6} < \varepsilon$$

per $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, per un certo $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$. Dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n - \cos n^2}{n^2 - n + 6} = 0.$$

Soluzione di (2). Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \log e = 1. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2.26. Calcolare i seguenti limiti di successioni

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^n}{n!}, \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} + 1}{\sqrt{3} - \sqrt[n]{n}}.$$

■ *Soluzione di (1).* Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^n}{n!} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} \right) = +\infty.$$

Soluzione di (2). Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} + 1}{\sqrt{3} - \sqrt[n]{n}} = +\infty. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2.27.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} + 2}{\sqrt{3} - \sqrt[n]{n}}, \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{2n}}.$$

■ *Soluzione di (1).* Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} + 2}{\sqrt{3} - \sqrt[n]{n}} = \frac{3}{\sqrt{3} - 1}.$$

Soluzione di (2). Il limite si presenta nella forma indeterminata “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”. Proponiamo due diversi modi per risolverlo. Per via algebrica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(1 - \frac{4}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

perché $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. In altro modo notando che sia il numeratore che il denominatore sono infiniti di ordine $\frac{1}{2}$, si ottiene che il limite è il rapporto dei coefficienti di \sqrt{n} , cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{2n}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2.28. Calcolare i seguenti limiti

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/4} + n^{1/5} + 2}{n^{2/3} - n^{1/3} + 3}, \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

■ *Soluzione di (1).* Il limite si presenta nella forma indeterminata “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”. Anche in questo caso mostriamo due diversi modi per risolverlo. Per via algebrica si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/4} + n^{1/5} + 2}{n^{2/3} - n^{1/3} + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/4} \left(1 + \frac{1}{n^{1/20}} + \frac{2}{n^{1/4}}\right)}{n^{2/3} \left(1 - \frac{1}{n^{1/3}} + \frac{1}{n^{2/3}}\right)} = \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^{1/20}} + \frac{2}{n^{1/4}}}{1 - \frac{1}{n^{1/3}} + \frac{1}{n^{2/3}}}\right) = 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

In altro modo, tenuto conto che il numeratore è un infinito di ordine $\frac{1}{4}$, il denominatore è un infinito di ordine $\frac{2}{3}$ e che $\frac{2}{3} > \frac{1}{4}$, è immediato che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/4} + n^{1/5} + 2}{n^{2/3} - n^{1/3} + 3} = 0.$$

Soluzione di (2). Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = 0 \cdot e = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Esercizio 2.29. *Calcolare i limiti*

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{2n}, \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

■ *Soluzione di (1).* Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{\frac{2}{3} \cdot 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{2/3} = e^{-2/3}.$$

Soluzione di (2). Anche qui si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n/2} = \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n\right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{1/2}\right) = +\infty \end{aligned}$$

perché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{1/2} = \sqrt{e}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2.30. *Calcolare i seguenti limiti*

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5n}\right)^n, \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{an}\right)^n, \quad a \in \mathbb{Z}.$$

■ *Soluzione di (1).* Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(1 + \frac{1}{\frac{5}{3}n}\right)^{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3}n} = \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{5}{3}n}\right)^{\frac{5}{3}n}\right)^{3/5}\right) = 0 \cdot e^{3/5} = 0. \end{aligned}$$

Soluzione di (2). Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{an}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{an}\right)^{an}\right)^{1/a} = e^{1/a}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2.31. *Provare che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0.$$

■ *Soluzione.* Posto $a_n = \frac{n^n}{n!^2}$ per $n \neq 0$, si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!^2} \frac{(n!)^2}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{(n+1)^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1} \leq \frac{e}{n+1} < 1$$

per $n \geq [e - 1] + 1 = 2$; per $n = 1$ si ha $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{2^2}{2^2} = 1$ da cui $a_1 \leq a_2$. Pertanto la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente e quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$. Siccome $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, è $\inf_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\} \geq 0$ per cui $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$.

Sia $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, allora

$$0 \leq a_{n+1} \leq a_n \frac{e}{n+1}$$

e passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si ha

$$0 \leq \ell \leq \ell \cdot 0 = 0 \quad \text{ovvero} \quad \ell = 0. \quad \blacksquare$$

Definizione 2.1. Una successione si dice *regolare* se ammette limite (finito o infinito).

Esercizio 2.32. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione regolare. Dimostrare che anche la successione $\left\{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right\}_{n \geq 1}$ è regolare e che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

■ *Soluzione.* (I) Supponiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$; posto $b_n = a_n - \ell$ si ha che $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ e poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1 + \dots + b_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n - n\ell}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - \ell \right)$$

basta provare che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1 + \dots + b_n}{n} = 0$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n'_\varepsilon$ sia $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$; inoltre $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata per cui esiste $L > 0$ tale che $|b_n| \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$\begin{aligned} \left| \frac{b_1 + \dots + b_n}{n} \right| &\leq \frac{|b_1|}{n} + \dots + \frac{|b_{n'_\varepsilon}|}{n} + \frac{|b_{n'_\varepsilon+1}| + \dots + |b_n|}{n} < \\ &< \frac{n'_\varepsilon}{n} L + \frac{n - n'_\varepsilon}{n} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{n'_\varepsilon}{n} L + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

per $\frac{n'_\varepsilon}{n} L < \frac{\varepsilon}{2}$, i. e. per $n > n_\varepsilon = \left[\frac{2Ln'_\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1$.

(II) Se invece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ allora per ogni $M > 0$ esiste $n'_M \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n'_M$ sia $a_n > M$. Pertanto è anche $a_n > M$ per $n > 2n'_M$ e

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} &= \frac{a_1 + \dots + a_{n'_M}}{n} + \frac{a_{n'_M+1} + \dots + a_n}{n} > \\ &> -\frac{|a_1 + \dots + a_{n'_M}|}{n} + \frac{n - n'_M}{n} M. \end{aligned}$$

Sia $L_M = |a_1 + \dots + a_{n'_M}|$. Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_M}{n} = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n_\varepsilon$ sia $\frac{L_M}{n} < \varepsilon$. Sia $n_M = \max\{n'_M, n_\varepsilon\}$, allora per $n > 2n_M$ è

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} > -\varepsilon + \frac{n - n_M}{n} M.$$

Ora

$$\frac{n - n_M}{n} = \frac{2n - 2n_M}{2n} = \frac{n + (n - 2n_M)}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Per $K > 0$ prendiamo $M = 4K$, $\varepsilon = K$ e $n_K = 2n_M$: avremo che per $n > n_K$ è

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} > -K + \frac{1}{2} 4K = K$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = +\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

(III) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = +\infty$, dunque

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-a_1) + \dots + (-a_n)}{n} = \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty. \end{aligned}$$

Il numero

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

si chiama *media aritmetica* dei numeri a_1, \dots, a_n .

Esercizio 2.33. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri non negativi regolare. Dimostrare che anche la successione $\{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}\}_{n \geq 1}$ è regolare e che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

■ *Soluzione.* (I) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n'_\varepsilon$ si abbia

$$|a_n| = a_n < \frac{2}{3} \varepsilon, \text{ cosicché}$$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} < \frac{2}{3} \varepsilon \sqrt[n]{\frac{3^{n'_\varepsilon} a_1 \cdots a_{n'_\varepsilon}}{(2\varepsilon)^{n'_\varepsilon}}}.$$

Poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n'_\varepsilon} a_1 \cdots a_{n'_\varepsilon}}{(2\varepsilon)^{n'_\varepsilon}}} = 1$$

allora esisterà $n'' \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n''$ si abbia

$$\left| \sqrt[n]{\frac{3^{n'_\varepsilon} a_1 \cdots a_{n'_\varepsilon}}{(2\varepsilon)^{n'_\varepsilon}}} - 1 \right| < \frac{1}{2}$$

cosicché per $n > n''$ è

$$\sqrt[n]{\frac{3^{n'_\varepsilon} a_1 \cdots a_{n'_\varepsilon}}{(2\varepsilon)^{n'_\varepsilon}}} < \frac{3}{2}.$$

Sia $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''\}$, allora per $n > n_\varepsilon$ si ha

$$-\varepsilon < 0 \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} < \frac{2}{3} \varepsilon \sqrt[n]{\frac{3^{n'_\varepsilon} a_1 \cdots a_{n'_\varepsilon}}{(2\varepsilon)^{n'_\varepsilon}}} < \varepsilon$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

(II) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell \neq 0$ allora posto $b_n = \frac{a_n}{\ell}$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}{\ell} .$$

Se proviamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}{\ell} = 1 \quad \text{ovvero} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, per ogni $\sigma > 0$ esiste $n'_\sigma \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n'_\sigma$ sia $|b_n - 1| < \sigma$ i.e.

$$1 - \sigma < b_n < 1 + \sigma$$

da cui

$$(1 - \sigma)^n \leq (1 - \sigma)^{n-n'_\sigma} < b_{n'_\sigma+1} \cdots b_n < (1 + \sigma)^{n-n'_\sigma} \leq (1 + \sigma)^n$$

e quindi

$$1 - \sigma < \sqrt[n]{b_{n'_\sigma+1} \cdots b_n} < 1 + \sigma .$$

D'altra parte $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_1 \cdots b_{n'_\sigma}} = 1$, pertanto in corrispondenza a σ esiste $n''_\sigma \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n''_\sigma$ sia

$$1 - \sigma < \sqrt[n]{b_1 \cdots b_{n'_\sigma}} < 1 + \sigma .$$

Quindi posto $n_\sigma = \max\{n'_\sigma, n''_\sigma\}$, per $n > n_\sigma$ si ha

$$(1 - \sigma)^2 < \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} < (1 + \sigma)^2$$

dove $(1 - \sigma)^2 = 1 - 2\sigma + \sigma^2 > 1 - 2\sigma > 1 - 3\sigma$.

Sia $0 < \varepsilon < 3$ e si prenda $\sigma = \frac{\varepsilon}{3}$; allora $(1 - \sigma)^2 > 1 - \varepsilon$ mentre (poiché $0 < \sigma < 1$)

$(1 + \sigma)^2 = 1 + 2\sigma + \sigma^2 < 1 + 3\sigma = 1 + \varepsilon$. Di conseguenza per $n > n_\sigma \equiv n_\varepsilon$ si ha

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} < 1 + \varepsilon \quad \text{ovvero} \quad \left| \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} - 1 \right| < \varepsilon .$$

Se invece $\varepsilon \geq 3$, si prenda $\sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \geq 1$ cosicché $1 - \varepsilon = 1 - 3\sigma^2 \leq 1 - 3\sigma$ mentre

$(1 + \sigma)^2 = 1 + 2\sigma + \sigma^2 < 1 + 3\sigma^2 = 1 + \varepsilon$ da cui per $n > n_\varepsilon$ si ha

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} < 1 + \varepsilon \quad \text{ovvero} \quad \left| \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} - 1 \right| < \varepsilon .$$

In ogni caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} = 1 .$$

(III) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ allora per ogni $K > 0$ esiste $n'_K \in \mathbb{N}$ per cui $a_n > 2K$ per $n > n'_K$, quindi

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} > \sqrt[n]{a_1 \cdots a_{n_K}} \cdot \sqrt[n]{(2K)^{n-n_K}} = \sqrt[n]{\frac{a_1 \cdots a_{n_K}}{(2K)^{n_K}}} \cdot 2K$$

dove $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_1 \cdots a_{n_K}}{(2K)^{n_K}}} = 1$. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon > 0$ tale che per $n > n_\varepsilon$ si abbia

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{\frac{a_1 \cdots a_{n_K}}{(2K)^{n_K}}} < 1 + \varepsilon .$$

In particolare per $\varepsilon = \frac{1}{2}$ esiste $n'' \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n''$ sia

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 \cdots a_{n_K}}{(2K)^{n_K}}} > \frac{1}{2} .$$

Si prenda $n_K = \max\{n'_K, n''\}$, allora per $n > n_K$ si ha

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} > \frac{2K}{2} \quad \text{ovvero} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = +\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n . \quad \blacksquare$$

Il numero

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

è detto *media geometrica* dei numeri a_1, \dots, a_n .

Esercizio 2.34. Si provi che

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} .$$

Esercizio 2.35. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri positivi. Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} .$$

■ *Soluzione.* Si consideri la successione (di numeri positivi) $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ così definita:

$$b_0 = a_0 \quad , \quad b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \text{per } n \geq 1 .$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_0 \cdots b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1}$$

dove

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_0 \cdots b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_0 \frac{a_1}{a_0} \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} .$$

Dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} . \quad \blacksquare$$

Come applicazione dell'esercizio precedente svolgiamo il seguente

Esercizio 2.36. *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

■ *Soluzione.* Notiamo che

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}},$$

quindi applicando il risultato dell'esercizio precedente si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n!}{(n+1)^n(n+1)} \frac{n^n}{n!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-1} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Esercizio 2.37. *Siano $h, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq h \leq k$. Dimostrare che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{kn}{hn}} = \frac{k^k}{h^h(k-h)^{k-h}}$$

■ *Soluzione.* Posto

$$a_n = \binom{kn}{hn}$$

dall'Esercizio 2.33 si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{kn}{hn}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{k(n+1)}{h(n+1)}}{\binom{kn}{hn}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{kn+k}{hn+h}}{\binom{kn}{hn}}$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{\binom{kn+k}{hn+h}}{\binom{kn}{hn}} &= \frac{(kn+k)!}{(hn+h)! [(k-h)n + (k-h)]!} \\ &= \frac{(kn)! (kn+1) \cdots (kn+k)}{(hn)! (hn+1) \cdots (hn+h) [(k-h)n]! [(k-h)n+1] \cdots [(k-h)n + (k-h)]!} \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \frac{\binom{kn+k}{hn+h}}{\binom{kn}{hn}} &= \frac{(kn)! \prod_{j=1}^k (kn+j)}{(hn)! [(k-h)n]! \prod_{j=1}^h (hn+j) \prod_{j=1}^{k-h} [(k-h)n+j]} \times \\ &\quad \times \frac{(hn)! [(k-h)n]!}{(kn)!} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^k (kn + j) \\ = & \frac{\prod_{j=1}^k (kn + j)}{\prod_{j=1}^h (hn + j) \prod_{j=1}^{k-h} [(k-h)n + j]} \end{aligned}$$

Notiamo che, in quest'ultima frazione, il numeratore è il prodotto di k monomi in n di I grado e perciò è un polinomio in n di grado k ; il denominatore è il prodotto di h monomi in n di I grado e di $k-h$ monomi in n di I grado, quindi è il prodotto di un polinomio in n di grado h e di un polinomio in n di grado $k-h$. Dunque il denominatore è un polinomio in n di grado k . Osserviamo poi che il coefficiente di n^k al numeratore è k^k , al denominatore è $h^h(k-h)^{k-h}$, perciò

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\binom{kn}{hn}}{\binom{kn}{hn}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{kn+k}{hn+h}}{\binom{kn}{hn}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{j=1}^k (kn+j)}{\prod_{j=1}^h (hn+j) \prod_{j=1}^{k-h} [(k-h)n+j]} = \\ &= \frac{k^k}{h^h(k-h)^{k-h}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Esercizio 2.38. *Dimostrare il seguente criterio*

Teorema (Cesàro-Stolz). *Sia $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a termini positivi strettamente crescente e divergente. Allora per ogni successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

Esercizio 2.39. *Verificare che le seguenti serie convergono e determinarne la somma:*

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+a)}, \quad a \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)}, \quad a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a \neq b.$$

■ *Soluzione di (1).* La serie è convergente perché

$$n(n+a) > n^2 \quad \implies \quad \frac{1}{n(n+a)} < \frac{1}{n^2}$$

e dal criterio del confronto segue quanto detto. Si scompone

$$\frac{1}{n(n+a)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a} \right)$$

cosicché la somma parziale n -sima è

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+a)} = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+a} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a} \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \dots - \frac{1}{k+a-1} + \frac{1}{k+a-1} - \frac{1}{k+a} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{a} \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \dots + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+a-1} - \frac{1}{k+a} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{a} \left(\sum_{k=1}^a \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^a \frac{1}{n+k} \right).
\end{aligned}$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^a \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^a \frac{1}{n+k} \right)$$

che dà la somma della serie

$$S = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^a \frac{1}{k}.$$

Soluzione di (2). Come in (1), la serie è convergente perché

$$(n+a)(n+b) \geq n^2 \quad \implies \quad \frac{1}{(n+a)(n+b)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Per calcolarne la somma si decompone

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)} = \frac{A}{n+a} + \frac{B}{n+b}$$

determinando $A, B \in \mathbb{R}$ in modo che l'identità sia soddisfatta. Si ricava che $A = \frac{1}{b-a} = -B$ e quindi

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b} \right).$$

Siamo allora ricondotti a trovare la somma della serie

$$\frac{1}{b-a} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b} \right).$$

Senza perdere di generalità, si può supporre che sia $b > a$; sia s_n la somma parziale n -sima della serie $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b} \right)$ e poniamo $c = b - a \in \mathbb{N}$. Allora

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+b} \right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+a+c} \right) = \\
&= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+a+1} + \frac{1}{k+a+1} - \frac{1}{k+a+2} + \frac{1}{k+a+2} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \cdots - \frac{1}{k+a+c-1} + \frac{1}{k+a+c-1} - \frac{1}{k+a+c} \Big) = \\
& = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+a+1} \right) + \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+a+1} - \frac{1}{k+a+2} \right) + \\
& \quad + \cdots + \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+a+c-1} - \frac{1}{k+a+c} \right) = \\
& = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{n+a+1} \right) + \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{n+a+2} \right) + \\
& \quad + \cdots + \left(\frac{1}{a+c-1} - \frac{1}{n+a+c} \right) = \\
& = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} \cdots + \frac{1}{a+c-1} \right) - \\
& \quad - \left(\frac{1}{n+a+1} + \frac{1}{n+a+2} + \cdots + \frac{1}{n+a+c} \right)
\end{aligned}$$

e da questo segue che la somma della serie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+a)(n+b)}$$

è

$$S = \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{c-1} \frac{1}{a+k} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{b-a-1} \frac{1}{a+k}$$

ovvero

(2.5)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+a)(n+b)} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{b-a-1} \frac{1}{a+k} .$$

■

Esercizio 2.40. Verificare l'eventuale convergenza delle serie

$$(1) \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-n^2}}{n} \quad , \quad (2) \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-n}}{n^p} \quad , \quad p \in \mathbb{N} \setminus \{0\} .$$

■ *Soluzione di (1).* Poiché $n \geq 1$, si ha:

$$\frac{1}{ne^{n^2}} \leq \frac{1}{e^{n^2}} = \frac{1}{(e^n)^n} .$$

Ora $e^n \geq e$ per $n \geq 1$, dunque

$$\frac{1}{ne^{n^2}} \leq \left(\frac{1}{e} \right)^n$$

e siccome la serie geometrica $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{e} \right)^n$ converge, dal criterio del confronto converge anche la serie proposta.

Soluzione di (2). Il termine generale della serie è $a_n = \frac{1}{n^p e^n}$, dunque la serie è a termini positivi e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p e^n} = 0$$

quindi ancora non si può dire niente sul comportamento della serie. Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^p e^n}{(n+1)^p e^{n+1}} = \frac{1}{e} \frac{n^p}{n^p \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p} = \frac{1}{e} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}$$

dove

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p > 1$$

quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{e} < 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e dal criterio del rapporto, la serie converge. ■

Esercizio 2.41. Verificare l'eventuale convergenza delle seguenti serie numeriche

$$(1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n}, \quad (2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

■ *Soluzione di (1).* La serie è a termini positivi e il termine generale è $a_n = \frac{3^n + 4^n}{5^n}$; si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right] = 0$$

che non permette di concludere nulla sul comportamento della serie. Tuttavia

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 1$$

per ogni intero $n \geq 1$, dunque

$$a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right] \leq 2 \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Poiché la serie geometrica $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ converge, dal criterio del confronto, converge anche la serie data.

Soluzione di (2). Qui $a_n = \frac{3^n}{n!}$ quindi la serie è a termini positivi con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$$

che non permette di concludere sul comportamento della serie. Ora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1}$$

per $n \in \mathbb{N}$. È sempre possibile ad esempio avere

$$\frac{3}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

se $n \geq 5$. Pertanto per $n \geq 5$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{2} < 1$$

che, dal criterio del rapporto, dà la convergenza della serie data. ■

Esercizio 2.42. Studiare il comportamento delle seguenti serie delle seguenti serie numeriche

$$(1) \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n^2} \quad , \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{4^n} .$$

■ *Soluzione di (1).* Il fatto che $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-n^2} = 0$ non ci permette ancora di concludere niente sul comportamento della serie. Poiché $3^{n^2} \geq 3^n$ allora

$$3^{-n^2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e siccome la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge, dal criterio del confronto, la serie data converge.

Soluzione di (2). Si noti che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{4^n} = 0$$

dunque ancora non possiamo concludere niente sul comportamento della serie. Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^4}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n^4} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4$$

e se $n \geq 1$ è

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 < 2$$

da cui

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$$

che prova, dal criterio del rapporto, la convergenza della serie. ■

Esercizio 2.43. Verificare l'eventuale divergenza delle seguenti serie numeriche

$$(1) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} \quad , \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} .$$

■ *Soluzione di (1).* Poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

ancora non possiamo concludere niente sul comportamento di questa serie. Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

dove

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{e}.$$

Scelto $\varepsilon = \frac{1}{e}$, si ha che esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per $n > n_\varepsilon$, sia

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n < \frac{1}{e} < 1,$$

dunque, scelto $n \geq n_\varepsilon + 1$, dal criterio del rapporto, si conclude che la serie data converge.

Soluzione di (2). La successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ è decrescente e convergente a 0. Dal criterio di Leibnitz la serie data converge. ■

Esercizio 2.44. *Provare se le seguenti serie numeriche convergono*

$$(1) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+2}, \quad (2) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n-1}.$$

■ *Soluzione di (1).* La serie è a segni alterni; si osservi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+2} = 0$$

dunque non si può concludere niente sul comportamento della serie. D'altra parte, posto

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+2}$$

si ha $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{2}{3}$, quindi $a_0 < a_1$, mentre si verifica facilmente che $a_{n+1} < a_n$ per $n \geq 1$. In ogni caso la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non è decrescente anche se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Non possiamo allora usare il criterio di Leibnitz. Tuttavia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+2}$$

dove adesso, per il criterio di Leibnitz, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+2}$$

converge. Pertanto la serie data converge.

Soluzione di (2). Anche questa serie è a segni alterni. Qui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n-1}$$

non esiste, pertanto la serie diverge. ■

Esercizio 2.45. *Determinare il comportamento delle seguenti serie numeriche*

$$(1) \sum_{n \geq 0} \frac{2}{\sqrt{n} + 5} \quad , \quad (2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(n+1)(n^2+4)} .$$

■ *Soluzione di (1).* La serie data è a termini positivi e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n} + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{1 + \frac{5}{\sqrt{n}}} \right) = 0$$

quindi non si può ancora concludere niente circa il comportamento della serie. Si osservi però che per $n \rightarrow \infty$ il comportamento della successione $\left\{ \frac{2}{\sqrt{n} + 5} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ è lo stesso della successione $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$. Allora

$$\frac{2}{\sqrt{n} + 5} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{1 + \frac{5}{\sqrt{n}}} \right)$$

dove per $n \geq 1$

$$1 + \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 1 + 5 = 6 ,$$

di conseguenza

$$\frac{2}{1 + \frac{5}{\sqrt{n}}} \geq \frac{1}{3} .$$

Pertanto per $n \geq 1$

$$\frac{2}{\sqrt{n} + 5} \geq \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverge. Dal criterio del confronto la serie data diverge.

Soluzione di (2). La serie data è a termini positivi e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(n+1)(n^2+4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)} \right) = 0$$

quindi il comportamento della successione $\left\{ \frac{3}{(n+1)(n^2+4)} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ è come quello della

successione $\{\frac{1}{n^3}\}_{n \geq 1}$. Si ha $1 + \frac{1}{n} > 1$, $1 + \frac{4}{n^2} > 1$ per $n \geq 1$, quindi

$$\frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)} < 3.$$

Allora per $n \geq 1$ è

$$\frac{3}{(n+1)(n^2+4)} = \frac{1}{n^3} \left(\frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)} \right) < \frac{3}{n^3}$$

e siccome la serie $\sum_{n>0} \frac{1}{n^3}$ converge, converge anche la serie data. ■

Esercizio 2.46. Verificare l'eventuale divergenza delle seguenti serie numeriche

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n^3}}{n^{3/2}}, \quad (2) \sum_{n=0}^{+\infty} 4 \left(\frac{n+1}{n+2} \right).$$

■ *Soluzione.* Per le due serie (entrambe a termini positivi) si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n^3}}{n^{3/2}} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \frac{n+1}{n+2} = 4$$

e questo basta per dire che le due serie divergono. ■

Esercizio 2.47. Calcolare la somma delle serie

$$(1) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n!}, \quad (2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n!}.$$

■ *Soluzione.* Le serie sono entrambe assimilabili alla serie esponenziale (2.3) e precisamente:

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = e - \frac{5}{2}$$

e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n!} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 3e. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2.48. Determinare, se possibile, la somma delle seguenti serie

$$(1) \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad (2) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+3)}.$$

■ *Soluzione di (1).* La serie è assimilabile alla serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

che converge alla somma $S = \frac{3}{5}$ (cfr. (2.2)). Allora

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n - \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{15}.$$

Soluzione di (2). La serie è assimilabile alla serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$$

perché si scrive

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+3)} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{15} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{21}{40} \right). \end{aligned}$$

Dall'Esercizio 2.39, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ converge e ha somma (cfr. (2.5))

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}.$$

Allora

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{21}{40} \right) = \frac{9}{80}.$$

• Si osservi che l'esercizio può essere risolto anche nel modo seguente. Posto $m = n - 3$, la serie si riscrive come

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2(m+4)(m+6)} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+4)(m+6)}$$

che dunque ha somma

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 \frac{1}{4+k} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{9}{80}. \quad \blacksquare$$

Per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ il *fattore binomiale* α su k è il numero reale non nullo $\binom{\alpha}{k}$ così definito:

$$\text{per } k = 0, \quad \binom{\alpha}{0} := 1$$

$$\text{per } k \geq 1, \quad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-k+1)}{k!}.$$

Esercizio 2.49. Sia $a \in \mathbb{R}$; provare che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} a^n$$

è assolutamente convergente per $|a| < 1$.

■ *Soluzione.* Posto $b_n = \left| \binom{\alpha}{n} a^n \right|$ dobbiamo provare che la serie a termini non negativi

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge per $|a| < 1$. Se $a = 0$, la serie è la serie nulla e dunque convergente. Sia

dunque $a \neq 0$, cosicché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è a termini positivi e

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\left| \binom{\alpha}{n+1} a^{n+1} \right|}{\left| \binom{\alpha}{n} a^n \right|} = \frac{\left| \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-(n+1)+2)(\alpha-(n+1)+1)}{(n+1)!} a^{n+1} \right|}{\left| \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} a^n \right|} = \\ &= \frac{|\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)(\alpha-n)|}{|\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)|} \frac{n!}{(n+1)!} |a| = \frac{|\alpha-n|}{n+1} |a|. \end{aligned}$$

Perciò

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha-n|}{n+1} |a| = |a|$$

e se $|a| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge. ■

Esercizio 2.50. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione positiva decrescente. Dimostrare che le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ hanno lo stesso comportamento.

■ *Soluzione.* Poiché $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, basta provare che le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ hanno lo stesso carattere. Entrambe queste serie sono a termini positivi quindi le successioni delle loro somme parziali

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad , \quad \sigma_n = \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k}$$

sono strettamente crescenti. Perciò

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sup_{n \geq 1} \{s_n\} \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sup_{n \geq 0} \{\sigma_n\} .$$

Proviamo, per induzione su $n \geq 0$, che

$$(2.6) \quad s_{2^{n+1}-1} \leq \sigma_n .$$

Infatti per $n = 0$

$$s_{2-1} = s_1 = a_1 = \sigma_0 .$$

Ammissa vera la stima (2.6) per n , proviamola per $n + 1$. Si ha

$$\begin{aligned} s_{2^{n+2}-1} &= s_{2^{n+1}-1} + \underbrace{a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}+1} + \cdots + a_{2^{n+2}-1}}_{2^{n+1} \text{ addendi}} \leq s_{2^{n+1}-1} + 2^{n+1} a_{2^{n+1}} \leq \\ &\leq \sigma_n + 2^{n+1} a_{2^{n+1}} = \sigma_{n+1}. \end{aligned}$$

Dal principio di induzione matematica, la disuguaglianza (2.6) è dunque vera per ogni $n \geq 0$. Siccome $2^n > n$ per ogni $n \geq 1$, si ha $n < 2^{n+1} - 1$ per cui $s_n < s_{2^{n+1}-1}$ e la (2.6) dà

$$(2.7) \quad s_n < \sigma_n \quad , \quad n \geq 1 .$$

Proviamo ora, per induzione su $n \geq 1$,

$$(2.8) \quad \sigma_n < 2 s_{2^n} .$$

Infatti, poiché $a_2 \leq a_1$, per $n = 1$ si ha

$$\sigma_1 = a_1 + 2 a_2 = a_1 + a_2 + a_2 \leq 2 a_1 + a_2 < 2 a_1 + 2 a_2 = 2 s_2 .$$

Ammissa vera $\sigma_n < 2 s_{2^n}$, per $n + 1$ si ha

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} 2^k a_{2^k} = \sigma_n + 2^{n+1} a_{2^{n+1}} < 2 s_{2^n} + 2^{n+1} a_{2^{n+1}} = \\ &= 2 s_{2^n} + 2^{n+1} a_{2^{n+1}} - 2 a_{2^{n+1}} + 2 a_{2^{n+1}} = 2 s_{2^n} + 2(2^n - 1) a_{2^{n+1}} + 2 a_{2^{n+1}} . \end{aligned}$$

Per $1 \leq k \leq 2^n - 1$ è

$$2^n + 1 \leq 2^n + k \leq 2^n + 2^n - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1 < 2^{n+1} .$$

Perciò

$$a_{2^{n+1}} \leq a_{2^n+k} \quad , \quad 1 \leq k \leq 2^n - 1 .$$

Pertanto

$$\begin{aligned} 2(2^n - 1) a_{2^{n+1}} &= (2^n - 1)(a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}}) = \underbrace{(a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}}) + \cdots + (a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+1}})}_{(2^n-1) \text{ addendi}} \leq \\ &\leq 2 a_{2^{n+1}} + 2 a_{2^{n+2}} + \cdots + 2 a_{2^{n+2^n-1}} = 2(a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+2}} + \cdots + a_{2^{n+1-1}}) . \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &< 2 s_{2^n} + 2(a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+2}} + \cdots + a_{2^{n+1-1}}) + 2 a_{2^{n+1}} = \\ &= 2(s_{2^n} + a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+2}} + \cdots + a_{2^{n+1}}) = 2 s_{2^{n+1}} . \end{aligned}$$

Possiamo allora affermare, dal principio di induzione matematica, che la (2.8) vale per ogni $n \geq 1$. In definitiva, dalle (2.7) e (2.8), si ha

$$(2.9) \quad s_n < \sigma_n < 2 s_{2^n} \quad , \quad n \geq 1 .$$

Se la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge allora $\sup_{n \geq 1} \{s_n\}$ è finito, di conseguenza è finito anche² $\sup_{n \geq 1} \{s_{2^n}\}$

il quale, dalla (2.9), implica che $\sup_{n \geq 1} \{\sigma_n\}$ è finito. Pertanto anche $\sup_{n \geq 0} \{\sigma_n\}$ è finito

provando così la convergenza della serie $\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n}$. Se invece la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge

² $\{s_{2^n}\}_{n \geq 0}$ è una sottosuccessione di $\{s_n\}_{n \geq 1}$.

allora $\sup_{n \geq 1} \{s_n\} = +\infty$. Pertanto, dalla (2.9), anche $\sup_{n \geq 1} \{\sigma_n\} = +\infty$ da cui risulta

$\sup_{n \geq 0} \{\sigma_n\} = +\infty$. Perciò la serie $\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n}$ diverge.

Viceversa se la serie $\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n}$ converge allora $\sup_{n \geq 0} \{\sigma_n\}$ è finito, di conseguenza è finito anche $\sup_{n \geq 1} \{\sigma_n\}$. Dalla (2.9) risulta finito $\sup_{n \geq 1} \{s_n\}$ provando così la convergenza della

serie $\sum_{n \geq 1} a_n$. Se invece la serie $\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n}$ diverge allora $\sup_{n \geq 0} \{\sigma_n\} = +\infty$ da cui segue

che $\sup_{n \geq 1} \{\sigma_n\} = +\infty$ e, per la (2.9), è $\sup_{n \geq 1} \{s_{2^n}\} = +\infty$. Se in tal caso la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ convergesse, allora $\sup_{n \geq 1} \{s_n\}$ sarebbe finito per cui sarebbe finito anche $\sup_{n \geq 1} \{s_{2^n}\}$. Poiché

questo è falso, risulta che la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge. ■

Esercizio 2.51. Per $p, q > 0$ si consideri la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \log^q n}.$$

Provare che

se $p = 1$ allora la serie converge per $q > 1$ e diverge per $0 < q \leq 1$,

se $0 < p < 1$ allora la serie diverge,

se $p > 1$ allora la serie converge.

■ *Soluzione.* Per $p = 1$ la serie è

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^q n}$$

e, dalla Proposizione dell'Esercizio 2.50, essa ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \log^q 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log 2^n)^q} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^q \log^q 2} = \frac{1}{\log^q 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^q}$$

la quale converge per $q > 1$ e diverge per $0 < q \leq 1$.

Per $0 < p < 1$ è $1 - p > 0$ per cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^q n}{n^{1-p}} = 0.$$

Perciò per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq n_\varepsilon$ si abbia $\left| \frac{\log^q n}{n^{1-p}} \right| = \frac{\log^q n}{n^{1-p}} < \varepsilon$.

Scelto allora $\varepsilon = 1$, esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che, per $n \geq n_1$, si abbia

$$\log^q n < n^{1-p}$$

da cui

$$\frac{1}{n^p \log^q n} > \frac{1}{n^p n^{1-p}} = \frac{1}{n} \quad \text{per } n \geq n_1.$$

Dal criterio del confronto segue che la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \log^q n}$ diverge per $0 < p < 1$ per ogni $q > 0$.

Per $p > 1$, poiché $\log n \geq \log 2$, per ogni $q > 0$ si ha

$$\frac{1}{n^p \log^q n} \leq \frac{1}{\log^q 2} \frac{1}{n^p}$$

e poiché in tal caso la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$ converge, si conclude che la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \log^q n}$ converge per $p > 1$ per ogni $q > 0$. ■

3. ESERCIZI SUI LIMITI DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE REALE

Esercizio 3.1. Calcolare i seguenti limiti:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\cos \frac{1}{x}}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \tan x .$$

■ *Soluzione di (1).* Cambiando variabile e ponendo $y = \frac{1}{x}$ è $y \rightarrow 0^+$, dunque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\cos \frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{\cos y} = +\infty .$$

Soluzione di (2). Qui dobbiamo distinguere i due limiti laterali

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x \tan x \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} x \tan x$$

avendo quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x \tan x &= \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty , \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} x \tan x &= \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty . \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Esercizio 3.2. Calcolare i seguenti limiti:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x)^{x-3}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x+2} \right)^{\log x} .$$

■ *Soluzione di (1).* Si osservi che la funzione $(\log x)^{x-3}$ è definita per $\log x > 0$, cioè per $x > 1$. Dunque il limite proposto non ha senso.

Si osservi che invece sarebbe stata diversa la situazione di

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |\log x|^{x-3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(x-3) \log |\log x|}$$

dove $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-3) \log |\log x| = -3 \lim_{x \rightarrow 0^+} \log |\log x| = -\infty$ da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |\log x|^{x-3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(x-3) \log |\log x|} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0 .$$

Soluzione di (2). Si noti dapprima che la funzione $\left(\frac{1}{x+2} \right)^{\log x}$ è definita per $x > 0$,

inoltre

$$\left(\frac{1}{x+2} \right)^{\log x} = e^{(\log x) \cdot \log(x+2)^{-1}} = e^{-(\log x) [\log(x+2)]}$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x) [\log(x+2)] = -\infty .$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x+2} \right)^{\log x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-(\log x) [\log(x+2)]} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^{-y} = +\infty . \quad \blacksquare$$

Esercizio 3.3. Calcolare i seguenti limiti:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x \left(e^{-x} + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \left[\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \frac{x}{x-2} \right] .$$

■ *Soluzione di (1).* Poiché

$$\log_x \left(e^{-x} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\log \left(e^{-x} + \frac{1}{2} \right)}{\log x} ,$$

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(e^{-x} + \frac{1}{2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \log \left(y + \frac{1}{2} \right) = \log \frac{1}{2}$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty .$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x \left(e^{-x} + \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(e^{-x} + \frac{1}{2} \right)}{\log x} = 0 .$$

Soluzione di (2). La funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ è definita per $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ cioè per $x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$; la funzione $g(x) = \frac{x}{x-2}$ è definita per $x \neq 2$. Pertanto il limite proposto è in realtà

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \frac{x}{x-2} \right] .$$

Si ha che $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0$ mentre, essendo $x - 2 > 0$, è

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty .$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \frac{x}{x-2} \right] = -\infty . \quad \blacksquare$$

Esercizio 3.4. Calcolare i limiti

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log(2-x)}{-\log(x-1)} \quad , \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x}}{2-x} .$$

■ *Soluzione di (1).*

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log(2-x)}{-\log(x-1)} = - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log(2-x)}{\log(x-1)}$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \log(2-x) = \log 1 = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \log(x-1) = -\infty$$

per cui

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log(2-x)}{-\log(x-1)} = - \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\log(2-x) \cdot \frac{1}{\log(x-1)} \right) = 0 .$$

Soluzione di (2). Cambiando variabile e ponendo $y = 2 - x$ è $y \rightarrow 0^+$ per $x \rightarrow 2^-$ e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x}}{2-x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y}{y} = +\infty . \quad \blacksquare$$

Esercizio 3.5. *Calcolare i limiti:*

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\log^2 x} , \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{4 \log 2x} .$$

■ *Soluzione di (1).*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\log^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(\log^2 x)(\log x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\log^3 x}$$

dove $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log^3 x = -\infty$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\log^3 x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0 ,$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\log^2 x} = 0 .$$

Soluzione di (2).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{4 \log 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{4(\log 2x)(\log x)}$$

dove $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log 2x)(\log x) = +\infty$, quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{4(\log 2x)(\log x)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{4y} = +\infty$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{4 \log 2x} = +\infty . \quad \blacksquare$$

Esercizio 3.6. *Calcolare i seguenti limiti:*

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\cosh x} e^{\arctan \frac{1}{\sinh x}} , \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x + |x^2 - 2|}} .$$

■ *Soluzione di (1).* Si osservi che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sinh x} = 0$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan \frac{1}{\sinh x} = \lim_{y \rightarrow 0} \arctan y = 0$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\arctan \frac{1}{\sinh x}} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{\arctan y} = \lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\cosh x} = 0 .$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\cosh x} e^{\arctan \frac{1}{\sinh x}} = 0 \cdot 1 = 0 .$$

Soluzione di (2).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x + |x^2 - 2|}} = \frac{1}{\sqrt{|-2|}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 3.7. Calcolare i seguenti limiti:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 + 2x - 1}{2x^2}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x - 1}.$$

■ *Soluzione di (1).* Poiché $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 + 5x^2 + 2x - 1) = \infty$ ed è un infinito del terzo ordine, $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 = \infty$ ed è un infinito del primo ordine, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 + 2x - 1}{2x^2} = \infty$$

Soluzione di (2). Poiché $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 1) = -\infty$ ed è un infinito del terzo ordine, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) = -\infty$ ed è un infinito del primo ordine, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x - 1} = +\infty. \quad \blacksquare$$

Esercizio 3.8. Calcolare i seguenti limiti:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1 - \sqrt{x}}{(x-1)^2}.$$

■ *Soluzione di (1).* Il limite ha senso per $x \rightarrow 2^+$, inoltre si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Razionalizzando sia il numeratore che il denominatore si ha

$$\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} = \frac{(2-x)\sqrt{x-2}}{(x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x})} = -\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} = -\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}} = 0.$$

Soluzione di (2). Poiché $\lim_{x \rightarrow 1} x + 1 - \sqrt{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 = 0$ (con $(x - 1)^2 > 0$) si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1 - \sqrt{x}}{(x - 1)^2} = +\infty. \quad \blacksquare$$

Esercizio 3.9. Calcolare i limiti:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

■ *Soluzione di (1).* Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x} = +\infty$ ed è un infinito del primo ordine, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$ ed è un infinito di ordine $\frac{1}{2}$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = +\infty .$$

Soluzione di (2).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \log(1 + \frac{1}{x})}$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + y)}{y} = 0$$

perché il numeratore è un infinito di ordine $0 < k < 1$ (si noti anche che per $y \rightarrow +\infty$ è $\frac{\log(1 + y)}{y} > 0$); quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z \rightarrow 0^+} e^z = 1 . \quad \blacksquare$$

Esercizio 3.10. *Calcolare i limiti:*

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x} , \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 4}{x^2 - 1} .$$

■ *Soluzione di (1).* Si ha che $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 1) = +\infty$, infinito del secondo ordine, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, infinito del primo ordine, quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x} = +\infty .$$

Soluzione di (2). Si ha che $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 4) = +\infty$, infinito di ordine 4, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1) = +\infty$, infinito del secondo ordine, quindi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 4}{x^2 - 1} = +\infty . \quad \blacksquare$$

Esercizio 3.11. *Calcolare i seguenti limiti:*

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{3}x + 1}{\sqrt{2}x^2 + \sqrt{5}x - (\sqrt{5} + \sqrt{2})} , \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{-x^2 + 2x - 5} .$$

■ *Soluzione di (1).* Si ha che $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - \sqrt{3}x + 1) = 2 - \sqrt{3}$, $\lim_{x \rightarrow 1} [\sqrt{2}x^2 + \sqrt{5}x - (\sqrt{5} + \sqrt{2})] = 0$ quindi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{3}x + 1}{\sqrt{2}x^2 + \sqrt{5}x - (\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \infty .$$

Soluzione di (2). Si ha che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$, infinito di ordine $\frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 2x - 5) = -\infty$, infinito del secondo ordine, quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{-x^2 + 2x - 5} = 0.$$

■

Esercizio 3.12. *Calcolare i limiti:*

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{5x-1}}.$$

■ *Soluzione di (1).* Il limite si presenta nella forma indeterminata “ $\frac{0}{0}$ ”, tuttavia

$$\frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x+x^2}} = \frac{\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}.$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

Soluzione di (2). Il limite si presenta nella forma indeterminata “ $\frac{0}{0}$ ”. Razionalizzando il denominatore si ha

$$\frac{4-x^2}{3-\sqrt{5x-1}} = \frac{(2-x)(2+x)(3+\sqrt{5x-1})}{9-(5x-1)} = \frac{1}{5} (2+x)(3+\sqrt{5x-1}).$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{5x-1}} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 2} (2+x)(3+\sqrt{5x-1}) = \frac{36}{5}.$$

■

Esercizio 3.13. *Calcolare i seguenti limiti:*

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x} - 7}{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} + 5}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}.$$

■ *Soluzione di (1).* Il limite dato è ricondotto al calcolo del limite

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{3y^2 - 2y - 7}{5y^2 + 6y + 5}$$

dove $\lim_{y \rightarrow +\infty} (3y^2 - 2y - 7) = +\infty$, infinito del secondo ordine, $\lim_{y \rightarrow +\infty} (5y^2 + 6y + 5) = +\infty$, infinito anch'esso del secondo ordine. Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x} - 7}{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} + 5} = \frac{3}{5}.$$

Soluzione di (2).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\tan x \log \sin x}$$

dove

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x) \log \sin x &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \log \sin x}{\cos x} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \log \sin x \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} \right) \left(\lim_{y \rightarrow 0^+} y \log y \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} y \log y = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\log y}{\frac{1}{y}} = 0 \end{aligned}$$

perché al numeratore si ha un infinito di ordine $0 < k < 1$ e al denominatore si ha un infinito del primo ordine. Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x) \log \sin x = 0$$

con $(\tan x) \log \sin x < 0$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\tan x \log \sin x} = \lim_{y \rightarrow 0^-} e^y = 1 .$$

■

Esercizio 3.14. Calcolare i limiti

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin^2 x)^{1/x^4} \quad , \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} .$$

■ Soluzione di (1).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin^2 x)^{1/x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(1/x^4) \log(1 + \sin^2 x)}$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \sin^2 x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \sin^2 x)}{\sin^2 x} \frac{\sin^2 x}{x^4}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \sin^2 x)}{\sin^2 x} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + y)}{y} = 1 , \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty , \end{aligned}$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \sin^2 x)}{x^4} = +\infty .$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin^2 x)^{1/x^4} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty .$$

Soluzione di (2).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \frac{2x}{\sin 2x}$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} = 1$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}.$$

Un altro modo per risolvere il limite proposto è notare che la funzione $\sin ax$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 0$ del I ordine e precisamente si comporta come la funzione ax . Si può scrivere allora che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}.$$

■

Esercizio 3.15. *Calcolare i seguenti limiti*

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \tan x}{\sin x + \tan^2 x}.$$

■ *Soluzione di (1).* Il calcolo diretto è

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) = 1 - 1 = 0.$$

Soluzione di (2). Sappiamo che la funzione $f(x) = \tan x$ per $x \rightarrow 0$ è un infinitesimo del I ordine e si comporta come la funzione x . Stessa cosa per la funzione $\sin x$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \tan x}{\sin x + \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 + x} = 2.$$

■

Esercizio 3.16. *Calcolare i seguenti limiti*

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x \cos x}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}.$$

■ *Soluzione di (1).* Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Soluzione di (2). Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

■

Esercizio 3.17. *Calcolare i limiti*

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x - 1}{x}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)^2}{\cos x}.$$

■ *Soluzione di (1).* Poiché la funzione $f(x) = 1 - \cos x$ è un infinitesimo del II ordine per $x \rightarrow 0$, è

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 1.$$

Soluzione di (2). Posto $y = x - \frac{\pi}{2}$ è $y \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, inoltre $\sin x = \cos y$, $\cos x = -\sin y$. Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{\sin y}$$

dove le funzioni $f(y) = 1 - \cos y$ e $f(y) = \sin y$ sono infinitesime per $y \rightarrow 0$ rispettivamente del II e del I ordine. Quindi

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = 0.$$

■

Esercizio 3.18. *Calcolare*

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x - \log \sin x).$$

■ *Soluzione di (1).* Usando le formule di prostaferesi³ e ponendo $y = x - a$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = -2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{y}{2}}{y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \sin \frac{y + 2a}{2} = -\sin a.$$

Soluzione di (2). Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x - \log \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log \frac{x}{\sin x}$$

e posto $y = \frac{x}{\sin x}$ è $y \rightarrow 1^+$ per $x \rightarrow 0^+$, dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log \frac{x}{\sin x} = \lim_{y \rightarrow 1^+} \log y = 0.$$

■

Esercizio 3.19. *Calcolare*

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)(1 - \sin x).$$

³ $\cos x - \cos a = -2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}.$

■ *Soluzione di (1)*. Posto $y = x - \frac{\pi}{2}$, il limite proposto è ricondotto al calcolo di

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

Soluzione di (2). Il limite si presenta nella forma indeterminata “ $\infty \cdot 0$ ”. Posto $y = x - \frac{\pi}{2}$ è $\sin x = \cos y$, $\cos x = -\sin y$ quindi

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)(1 - \sin x) = -\lim_{y \rightarrow 0} (\cot y)(1 - \cos y) = -\lim_{y \rightarrow 0} \cos y \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{\sin y}$$

dove le funzioni $f(y) = 1 - \cos y$ e $g(y) = \sin y$ sono infinitesime per $y \rightarrow 0$ rispettivamente del II e del I ordine. Di conseguenza

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{\sin y} = 0$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)(1 - \sin x) = 0.$$

■

Esercizio 3.20. *Calcolare*

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{2x - \sin x}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{x} + 2x}{\sqrt{x} - 1}.$$

■ *Soluzione di (1)*. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{2x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{2 - \frac{\sin x}{x}}$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Infatti pur non esistendo il $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$, è $|\sin x| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque per ogni $\varepsilon > 0$ si ha ($x > 0$)

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} < \varepsilon$$

per $x > \frac{1}{\varepsilon}$; questo prova che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Ne segue, dunque, che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{2x - \sin x} = \frac{1}{2}.$$

Soluzione di (2). Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{x} + 2x}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + 2 \right)}{\sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} + 2}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} = +\infty.$$

■

Esercizio 3.21. Calcolare, usando i teoremi di de l'Hôpital, i seguenti limiti:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} + x^2}{\tan x}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

■ *Soluzione di (1).* Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applicando il teorema di de l'Hôpital si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} + x^2}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2} \cos \sqrt{x} + 2x}{1 + \tan^2 x}$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-1/2} \cos \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \tan x) = 1$$

ed allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} + x^2}{\tan x} = +\infty.$$

Soluzione di (2). Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Posto $y = x + 1$ per $x \rightarrow -1^-$ è $y \rightarrow 0^-$, inoltre $\sin \pi x = \sin \pi(y - 1) = \sin(\pi y - \pi) = -\sin \pi y$, $x^2 - 1 = (y - 1)^2 - 1 = y(y - 2)$, dunque siamo ricondotti al calcolo di

$$-\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin \pi y}{[y(y - 2)]^{1/3}}$$

che, applicando il teorema di de l'Hôpital, dà

$$-\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\pi \cos \pi y}{\frac{1}{3}[y(y - 2)]^{-2/3}(2y - 2)} = -\frac{3}{2} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{(\cos \pi y)[y(y - 2)]^{2/3}}{y - 2} = 0.$$

■

Esercizio 3.22. Calcolare, usando i teoremi di de l'Hôpital, i seguenti limiti:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos 2x}{1 + \sin^2 2x + \cos 2x}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin \sqrt{x - 1}}{\cos \frac{\pi}{2} x}.$$

■ *Soluzione di (1).* Posto $y = x - \frac{\pi}{2}$ è $\sin x = \cos y$, $\cos 2x = -\cos 2y$, $\sin 2x = -\sin 2y$, quindi siamo ricondotti a calcolare⁴

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y - \cos 2y}{1 + \sin^2 2y - \cos 2y} &\stackrel{H}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y + 2 \sin 2y}{4 \sin 2y \cos 2y + 2 \sin 2y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y + 2 \sin 2y}{2 \sin 4y + 2 \sin 2y} \stackrel{H}{=} \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\cos y + 4 \cos 2y}{4 \cos 4y + 2 \cos 2y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Soluzione di (2). Posto $y = x - 1$ siamo ricondotti al calcolo di

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{y}}{\cos \left(\frac{\pi}{2}(y+1) \right)} &= - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{y}}{\sin \frac{\pi}{2} y} \stackrel{H}{=} - \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(\cos \sqrt{y}) y^{-1/2}}{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} y} = \\ &= - \frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{y}}{\sqrt{y} \cos \left(\frac{\pi}{2} y \right)} = -\infty. \end{aligned}$$

Esercizio 3.23. Calcolare, usando i teoremi di de l'Hôpital, i limiti

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x - \log \sin 2x) \quad , \quad (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)(1 - \sin x).$$

■ *Soluzione di (1).* Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x - \log \sin 2x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log \frac{x}{\sin 2x}$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin 2x}$$

si presenta nella forma indeterminata " $\frac{0}{0}$ ". Usando il teorema di de l'Hôpital si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin 2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2}.$$

Quindi posto $y = \frac{x}{\sin 2x}$ abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log \frac{x}{\sin 2x} = \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}^+} \log y = \log \frac{1}{2} = -\log 2.$$

Soluzione di (2). Posto $x - \frac{\pi}{2} = y$ si ha $\sin x = \cos y$, $\cos x = -\sin y$, quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)(1 - \sin x) &= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y(1 - \cos y)}{\sin y} \stackrel{H}{=} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y(1 + \sin y)}{\cos y} = 0. \end{aligned}$$

⁴“ $\frac{0}{0}$ ” è l'uguaglianza che si ottiene usando il teorema di de l'Hôpital.

Esercizio 3.24. Calcolare, usando i teoremi di de l'Hôpital, i limiti

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x \tan \frac{\pi}{x}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan^2(x-1)}{(1-x)^2}.$$

■ *Soluzione di (1).* Posto $y = \frac{\pi}{x}$, il limite è ricondotto a

$$5\pi \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\tan y}{y} \stackrel{H}{=} 5\pi \lim_{y \rightarrow 0^+} (1 + \tan^2 y) = 5\pi.$$

Soluzione di (2). Posto $y = x - 1$, siamo ricondotti a

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan^2 y}{y^2}$$

che si presenta nella forma indeterminata “ $\frac{0}{0}$ ”. Allora usando il teorema di de l'Hôpital si ha

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan^2 y}{y^2} \stackrel{H}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan y}{y(1+y^2)} \stackrel{H}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{(1+y^2)(1+3y^2)} = 1.$$

■

Esercizio 3.25. Calcolare, usando i teoremi di de l'Hôpital, i limiti

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{x^2 \arctan x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right).$$

■ *Soluzione di (1).* Il limite si presenta nella forma indeterminata “ $\frac{0}{0}$ ”. Applicando il teorema di de l'Hôpital si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{x^2 \arctan x} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin^2 2x \cos 2x}{2x \arctan x + \frac{x^2}{1+x^2}} = \\ &= 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2) \sin^2 2x \cos 2x}{2x(1+x^2) \arctan x + x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{(1+x^2) \sin 4x}{2(1+x^2) \arctan x + x} = \\ &= 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2) \sin 4x}{2(1+x^2) \arctan x + x} \stackrel{H}{=} 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin 4x + 4(1+x^2) \cos 4x}{4x \arctan x + 2 + 1} = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8. \end{aligned}$$

Soluzione di (2). Il limite si presenta nella forma indeterminata “ $\infty \cdot 0$ ”, ma posto $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{y^2}}{y} \stackrel{H}{=} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{1 + \frac{1}{y^2}} \right) \left(\frac{-2}{y^3} \right) = 2 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^2}{y^2 + 1} \cdot \frac{1}{y^3} = \end{aligned}$$

$$= 2 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y(y^2 + 1)} = +\infty .$$

■

Esercizio 3.26. Usando i teoremi di de l'Hôpital, determinare i limiti

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \arctan x^2}{(1 - \cos x)^3} , \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} .$$

■ *Soluzione di (1).* Il limite si presenta nella forma indeterminata “ $\frac{0}{0}$ ”. Applicando il teorema di de l'Hôpital, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \arctan x^2}{(1 - \cos x)^3} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{2x}{1+x^4}}{3(1 - \cos x)^3 \sin x} = \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{\sin x (1 - \cos x)^2 (1 + x^4)} = \\ &= \frac{2}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(1 - \cos x)^2} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + x^4} \right) = \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{1 - \cos x} \right)^2 = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3} . \end{aligned}$$

Soluzione di (2). Dovendo usare i teoremi di de l'Hôpital per questa forma indeterminata “ $\frac{0}{0}$ ” (che tuttavia potrebbe essere facilmente risolta con banali passaggi algebrici e tenendo conto del limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$), si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x}{2 \cos 2x} = \frac{3}{2} .$$

■

Esercizio 3.27. Usando i teoremi di de l'Hôpital, risolvere le forme indeterminate dei seguenti limiti

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x - 1}{x} , \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) .$$

■ *Soluzione di (1).* Dovendo usare i teoremi di de l'Hôpital per questa forma indeterminata “ $\frac{0}{0}$ ” (che tuttavia potrebbe essere facilmente risolta considerandone l'ordine degli infinitesimi), si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x - 1}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - \sin x) = 1 .$$

Soluzione di (2). Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \stackrel{H}{=}$$

$$= \lim_{H \ x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0 .$$

■

Esercizio 3.28. Risolvere le forme indeterminate dei seguenti limiti usando i teoremi di de l'Hôpital:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x - \sin x} \quad , \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{\arcsin x - x} .$$

■ *Soluzione di (1).* Questa forma indeterminata “ $\frac{0}{0}$ ” risolta con il teorema di de l'Hôpital dà

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x - \sin x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} = \infty .$$

Soluzione di (2). Usando il teorema di de l'Hôpital per questa forma indeterminata “ $\frac{0}{0}$ ” si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{\arcsin x - x} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)(1-\sqrt{1-x^2})} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}} \stackrel{H}{=} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2} = 2 . \end{aligned}$$

■

Esercizio 3.29. Risolvere le forme indeterminate dei limiti seguenti usando i teoremi di de l'Hôpital:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \quad , \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right) .$$

■ *Soluzione di (1).* Applicando il teorema di de l'Hôpital a questa forma indeterminata “ $\frac{0}{0}$ ” si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2 .$$

Soluzione di (2). Il limite si presenta nella forma indeterminata “ $\infty - \infty$ ”. Tuttavia

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \cos^2 x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x \cos x - \sin x)(x \cos x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos x + \sin x}{\sin x} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} \right) \left[\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos x}{\sin x} \right) + 1 \right] = \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x}
\end{aligned}$$

e quest'ultimo si presenta nella forma indeterminata " $\frac{0}{0}$ ". Usando allora il teorema di de l'Hôpital si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} &\stackrel{H}{=} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin x}{x \sin x \left(2 + \frac{x \cos x}{\sin x} \right)} = \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 + \frac{x \cos x}{\sin x}} = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{2}{3}.$$

■

Esercizio 3.30. Calcolare i seguenti limiti usando i teoremi di de l'Hôpital:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}{x^4}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left[\tan^2 x - \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^{-2} \right].$$

■ *Soluzione di (1).* Applicando il teorema di de l'Hôpital a questa forma indeterminata " $\frac{0}{0}$ " si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}{x^4} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x + \sin x}{4x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos x}{12x^2} = -\frac{1}{24}.$$

Soluzione di (2). Posto $y = x - \frac{\pi}{2}$ si ha $\sin x = \cos y$, $\cos x = -\sin y$, allora

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left[\tan^2 x - \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x \right)^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\cot^2 y - \frac{1}{y^2} \right)$$

che è lo stesso del (2) dell'Esercizio 3.29.

■

4. ESERCIZI SULLO STUDIO DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE REALE

Esercizio 4.1. Studiare il grafico delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} \quad , \quad f_2(x) = \frac{1 + x^{3/5}}{1 - x^{3/5}} .$$

■ Studio di $f_1(x)$.

(A) Dominio della funzione

Il dominio della funzione è

$$\mathcal{D}(f_1) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty) .$$

(B) Comportamento agli estremi degli intervalli che compongono il dominio

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1 . \end{aligned}$$

La retta di equazione $y = 1$ è un asintoto orizzontale per $x \rightarrow \pm\infty$, mentre le rette di equazione $x = -1$ e $x = 1$ sono asintoti verticali.

(C) Ricerca dei punti di estremo e monotonia della funzione

I punti da determinare sono da ricercare tra i punti dell'insieme

$$\{x \in \mathcal{D}(f_1) : f_1'(x) = 0\} .$$

Essendo $\mathcal{D}(f_1)$ un aperto e f_1 derivabile con

$$f_1'(x) = -2x(x^2 - 1)^{-2}$$

si ha

$$\{x \in \mathcal{D}(f_1) : f_1'(x) = 0\} = \{x \in \mathcal{D}(f_1) : 2x = 0\} = \{0\} .$$

Sia $I(0, r) \subset \mathcal{D}(f_1)$ un intorno di 0; se $x \in I(0, r)$, $x < 0$, ovvero $-r < x < 0$, allora $2x < 0$ e quindi $f_1'(x) > 0$ da cui f_1 è strettamente crescente nell'intorno sinistro di 0; se invece $x \in I(0, r)$, $x > 0$, ovvero $0 < x < r$, allora $2x > 0$ e $f_1'(x) < 0$ da cui f_1 è strettamente decrescente nell'intorno destro di 0. Il punto 0 è pertanto un punto di massimo locale per f_1 che tra l'altro risulta esserne l'unico punto di estremo locale. Dall'espressione di $f_1'(x)$ si noti che per $x \in \mathcal{D}(f_1)$, $x < 0$, è $f_1'(x) > 0$ ovvero f_1 è strettamente crescente in $(-\infty, -1) \cup (-1, 0]$, mentre, in modo analogo, f_1 è strettamente decrescente in $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

(D) Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità della funzione

I punti di flesso della funzione sono da ricercare tra i punti dell'insieme

$$\{x \in \mathcal{D}(f_1) : f_1''(x) = 0\} .$$

Poiché⁵

$$f_1''(x) = 2(x^2 - 1)^{-3}(3x^2 + 1) ,$$

⁵ f_1 è derivabile due volte.

non ci sono punti di flesso ed essendo $3x^2 + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che $f_1'' < 0$ per $(x^2 - 1)^3 < 0$ ovvero per $x^2 - 1 < 0$, i.e. per $x \in (-1, 1)$; mentre è $f_1'' > 0$ per $(x^2 - 1)^3 > 0$ ovvero per $x^2 - 1 > 0$, i.e. per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Quindi f_1 è concava in $(-1, 1)$ ed è convessa in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Studio di $f_2(x)$.

(A) *Dominio della funzione*

$$\mathcal{D}(f_2) = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^{3/5} \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^{3/5} \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$$

dunque

$$\mathcal{D}(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

che è un insieme aperto.

(B) *Comportamento agli estremi degli intervalli che compongono il dominio*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^{3/5}}{1 - x^{3/5}} &= -1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 + x^{3/5}}{1 - x^{3/5}} = +\infty \quad , \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + x^{3/5}}{1 - x^{3/5}} &= -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^{3/5}}{1 - x^{3/5}} = -1 \quad . \end{aligned}$$

La retta $y = -1$ è un asintoto orizzontale per $x \rightarrow \pm\infty$ mentre la retta $x = 1$ è un asintoto verticale.

(C) *Ricerca dei punti di estremo e monotonia della funzione*

I punti di estremo locale sono da ricercare in

$$\{x \in \mathcal{D}(f_2) : f_2'(x) = 0\} \quad .$$

Poiché

$$f_2'(x) = \frac{6}{5}x^{-2/5}(1 - x^{3/5})^{-2} \quad \text{per } x \neq 0$$

la funzione è priva di estremi locali in $\mathcal{D}(f_2) \setminus \{0\}$. Inoltre in tale insieme $f_2'(x) > 0$ per cui la funzione in $\mathcal{D}(f_2) \setminus \{0\}$ è strettamente crescente. In 0 si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \left[\frac{1 + x^{3/5}}{1 - x^{3/5}} - 1 \right] = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^{3/5}}{x(1 - x^{3/5})} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2/5}(1 - x^{3/5})} = +\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x} \end{aligned}$$

che prova che 0 è un punto di cuspidè. Siccome $f_2(0) = 1$, se x appartiene ad un intorno sinistro di 0 allora $x^{3/5} < 0$, quindi $1 + x^{3/5} < 1 - x^{3/5}$ con $1 - x^{3/5} > 0$, dunque in un intorno sinistro di 0 si ha

$$f_2(x) = \frac{1 + x^{3/5}}{1 - x^{3/5}} < 1 = f_2(0) \quad .$$

In un intorno destro di 0 si ha $x^{3/5} > 0$, quindi $1 + x^{3/5} > 1 - x^{3/5}$; possiamo supporre che sia $0 < x < 1$ cosicché in un intorno di 0 abbastanza piccolo sia $1 - x^{3/5} > 0$. Allora in un intorno destro di 0 è

$$f_2(x) = \frac{1 + x^{3/5}}{1 - x^{3/5}} > 1 = f_2(0) \quad .$$

Le due disuguaglianze provano che 0 non è un punto di estremo locale.

(D) Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità della funzione

I punti di flesso sono da cercare tra i punti dell'insieme

$$\{x \in \mathcal{D}(f_2) : f_2''(x) = 0\} .$$

Poiché

$$f_2''(x) = \frac{12}{25} x^{-7/5} (1 - x^{3/5})^{-3} (4x^{3/5} - 1)$$

i punti di flesso sono tra i punti di $\mathcal{D}(f_2)$ per cui

$$4x^{3/5} - 1 = 0 .$$

Si ha che $x = 4^{-5/3} \in \mathcal{D}(f_2)$ è l'unico punto di flesso.

Infatti se $0 < x \leq 4^{-5/3}$ allora $x^{-7/5} > 0$, $x^{3/5} \leq \frac{1}{4} < 1$ che dà $1 - x^{3/5} > 0$, $4x^{3/5} - 1 \leq 0$, di conseguenza $f_2''(x) \leq 0$ che implica $f_2(x)$ concava in $(0, 4^{-5/3}]$.

Se $4^{-5/3} \leq x < 1$ allora $x^{-7/5} > 0$, $\frac{1}{4} \leq x^{3/5} < 1$ che dà $1 - x^{3/5} > 0$, $4x^{3/5} - 1 \geq 0$, di conseguenza $f_2''(x) \geq 0$ che implica $f_2(x)$ convessa in $[4^{-5/3}, 1)$.

Inoltre per $x < 0$ si ha $x^{-7/5} < 0$, $1 - x^{3/5} > 0$, $4x^{3/5} - 1 < 0$, di conseguenza $f_2''(x) > 0$ che implica $f_2(x)$ convessa in $(-\infty, 0)$.

Infine per $x > 1$ è $x^{-7/5} > 0$, $1 - x^{3/5} < 0$, $4x^{3/5} - 1 > 0$, di conseguenza $f_2''(x) < 0$ che implica $f_2(x)$ concava in $(1, +\infty)$. ■

Esercizio 4.2. Studiare il grafico delle funzioni

$$f_3(x) = e^{1/x} x^{1/3} \quad , \quad f_4(x) = 6x \log x - (3x - 2)[\log(3x - 2) + 1] - 4 \log 2 .$$

Esercizio 4.3. Studiare il grafico di

$$f_5(x) = 1 - x + (x^{2/3} - 1)\sqrt{x^{2/3} + 1} \quad , \quad f_6(x) = 1 - e^{\frac{1+\sin x}{-1+\sin x}} .$$

■ Studio di $f_5(x)$.

(A) Dominio della funzione

$$\mathcal{D}(f_5) = \mathbb{R}$$

(B) Comportamento della funzione agli estremi del dominio

Si considerino le funzioni

$$f(x) = x^{1/3} \quad , \quad g(y) = 1 - y^3 + (y^2 - 1)\sqrt{y^2 + 1}$$

cosicché

$$f_5(x) = (g \circ f)(x) .$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_5(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_5(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x)$$

dove

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{1/3} = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/3} = +\infty$$

per cui

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_5(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} g(y) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_5(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) .$$

Si ha dunque:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_5(x) &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 - y^3 + (y^2 - 1)\sqrt{y^2 + 1} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 - y^3 + (y^2 - 1)|y|\sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 - y^3 - y(y^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \left\{ 1 - y^3 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} \right) + y\sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} \right\} = +\infty \end{aligned}$$

di ordine 3 rispetto a $y = x^{1/3}$ ovvero di ordine 1 rispetto a x : vi potrebbe quindi essere un asintototo obliquo per $x \rightarrow -\infty$. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_5(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(g \circ f)(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{g(y)}{y^3} = \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1 - y^3 + (y^2 - 1)\sqrt{y^2 + 1}}{y^3} = \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1 - y^3 + |y|(y^2 - 1)\sqrt{1 + 1/y^2}}{y^3} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1 - y^3 - y(y^2 - 1)\sqrt{1 + 1/y^2}}{y^3} = \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y^3 \left[\frac{1}{y^3} - 1 - \left(1 - \frac{1}{y^2} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} \right]}{y^3} = -2, \end{aligned}$$

e questo è il coefficiente angolare m dell'asintoto obliquo se esiste finito il

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f_5(x) - mx).$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f_5(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f_5(x) + 2x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - x + (x^{2/3} - 1)\sqrt{x^{2/3} + 1} + 2x \right) = \\ &= \lim_{y=x^{1/3}} \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + y^3 + (y^2 - 1)\sqrt{y^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

che si presenta nella forma indeterminata " $\infty - \infty$ ". Tale forma indeterminata è data da

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(y^3 + (y^2 - 1)\sqrt{y^2 + 1} \right).$$

Razionalizzando si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y^6 - (y^2 - 1)^2(y^2 + 1)}{y^3 - (y^2 - 1)\sqrt{y^2 + 1}} &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y^6 - (y^4 - 2y^2 + 1)(y^2 + 1)}{y^3 - |y|(y^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{(y^4 + y^2 - 1)}{y^3 \left[1 + \left(1 - \frac{1}{y^2} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} \right]} = -\infty. \end{aligned}$$

Dunque non vi è l'asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$.

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_5(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - y^3 + (y^2 - 1)\sqrt{y^2 + 1} \right)$$

che si presenta nella forma indeterminata " $\infty - \infty$ ". Tale forma proviene dal

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left((y^2 - 1)\sqrt{y^2 + 1} - y^3 \right).$$

Razionalizzando si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(y^2 - 1)^2(y^2 + 1) - y^6}{(y^2 - 1)\sqrt{y^2 + 1} + y^3} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(y^4 - 2y^2 + 1)(y^2 + 1) - y^6}{|y|(y^2 - 1)\sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} + y^3} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y^4 - y^2 + 1}{y^3 \left[\left(1 - \frac{1}{y^2} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} + 1 \right]} = -\infty \end{aligned}$$

di ordine 1 rispetto a y ovvero di ordine $\frac{1}{3}$ rispetto a x : non vi è quindi asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$.

(C) Ricerca dei punti di estremo e monotonia della funzione

Si osservi che nel punto $x_0 = 0$ la funzione potrebbe non essere derivabile. Infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_5(x) - f_5(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x + (x^{2/3} - 1)\sqrt{x^{2/3} + 1}}{x} = \\ &= \lim_{y=x^{1/3}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - y^3 + (y^2 - 1)\sqrt{y^2 + 1}}{y^3} = \\ &= \lim_{H} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - 3y^2 + 2y(y^2 + 1)^{1/2} + y(y^2 - 1)(y^2 + 1)^{-1/2}}{3y^2} = +\infty. \end{aligned}$$

Perciò l'origine è un punto di cuspid.

I punti di estremo locale sono quindi da ricercare tra i punti di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per cui $f'_5(x) = 0$.

Poiché $f_5 = g \circ f$ allora

$$f'_5(x) = g'(f(x))f'(x)$$

e siccome $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} > 0$, posto $y = f(x)$, deve essere $g'(y) = 0$. Si ha

$$g'(y) = y(y^2 + 1)^{-1/2} [3y^2 + 1 - 3y(y^2 + 1)^{1/2}]$$

da cui $g'(y) = 0$ se e solo se (per $y = 0$ sarebbe $x = 0$) $3y^2 + 1 - 3y(y^2 + 1)^{1/2} = 0$ ovvero

$$3y^2 + 1 = 3y(y^2 + 1)^{1/2}.$$

Questa equazione non è mai soddisfatta per $y < 0$, mentre per $y > 0$ si ha la soluzione

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ovvero il punto } x_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Sia $I(x_1, r)$ un intorno di x_1 : senza perdere di generalità, si può supporre $x > 0$ per ogni $x \in I(x_1, r)$ da cui segue $y > 0$; allora $y(y^2 + 1)^{-1/2} > 0$.

Se $x \in I(x_1, r)$, $x < x_1$, allora $y < \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{1/3}$ da cui $y^2 < \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{2/3} = \left(\frac{1}{27}\right)^{1/3} = \frac{1}{3}$,

quindi $3y^2 < 1$. Ne segue che

$$(3y^2 + 1)^2 = 9y^4 + 6y^2 + 1 > 9y^4 + 6y^2 + 3y^2 = 9y^4 + 9y^2 = 9y^2(y^2 + 1)$$

perciò

$$3y^2 + 1 > 3y\sqrt{y^2 + 1}.$$

Dunque per $x \in I(x_1, r)$, $x < x_1$, è $g'(y) > 0$ da cui $f'_5(x) > 0$ e f_5 risulta essere strettamente crescente in $(x_1 - r, x_1)$.

Se invece $x \in I(x_1, r)$, $x > x_1$, allora $y > \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{1/3}$ da cui $y^2 > \frac{1}{3}$, quindi $3y^2 > 1$.

Procedendo come prima si avrà

$$3y^2 + 1 < 3y\sqrt{y^2 + 1}$$

ottendo così $g'(y) < 0$ per $x \in I(x_1, r)$, $x > x_1$ da cui $f'_5(x) < 0$ e f_5 strettamente decrescente in $(x_1, x_1 + r)$.

Pertanto $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}$ è un punto di massimo locale per la funzione f_5 .

(D) Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità della funzione

Da $f'_5(x) = g'(f(x))f'(x)$ si ha

$$f''_5(x) = g''(f(x))f'(x)^2 + g'(f(x))f''(x)$$

dove $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3}f(x)^{-2}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9}f(x)^{-5}$ per cui

$$f''_5(x) = \frac{1}{9}g''(f(x))f(x)^{-4} - \frac{2}{9}g'(f(x))f(x)^{-5}$$

ovvero

$$f''_5(x) = \frac{1}{9}f(x)^{-5} [f(x)g''(f(x)) - 2g'(f(x))] .$$

Allora

$$f''_5(x) = (h \circ f)(x) \quad \text{per} \quad h(y) = \frac{1}{9}y^{-5} [yg''(y) - 2g'(y)] .$$

I punti di flesso sono da cercare fra i punti per cui $f''_5(x) = 0$ e quindi, posto come prima $y = f(x)$, sono da cercare fra i punti per cui $h(y) = 0$, cioè tra i punti per cui

$$yg''(y) - 2g'(y) = 0 .$$

Si ha:

$$\begin{aligned} g''(y) &= \frac{d}{dx} \{ \{y(y^2 + 1)^{-1/2} [3y^2 + 1 - 3y(y^2 + 1)^{1/2}] \} = \\ &= \left[\frac{d}{dx} (y(y^2 + 1)^{-1/2}) \right] [3y^2 + 1 - 3y(y^2 + 1)^{1/2}] + \\ &\quad + y(y^2 + 1)^{-1/2} [6y - 3(y^2 + 1)^{1/2} - 3y^2(y^2 + 1)^{-1/2}] = \\ &= [(y^2 + 1)^{-1/2} - y^2(y^2 + 1)^{-3/2}] [3y^2 + 1 - 3y(y^2 + 1)^{1/2}] + \\ &\quad + y(y^2 + 1)^{-1/2} [6y - 3(y^2 + 1)^{1/2} - 3y^2(y^2 + 1)^{-1/2}] = \\ &= (y^2 + 1)^{-3/2} (y^2 + 1 - y^2) [3y^2 + 1 - 3y(y^2 + 1)^{1/2}] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +y(y^2+1)^{-1/2} [6y - 3(y^2+1)^{1/2} - 3y^2(y^2+1)^{-1/2}] = \\
& = (y^2+1)^{-3/2} \{3y^2+1 - 3y(y^2+1)^{1/2} + \\
& + y(y^2+1) [6y - 3(y^2+1)^{1/2} - 3y^2(y^2+1)^{-1/2}]\} = \\
& = (y^2+1)^{-3/2} \{3y^2+1 - 3y(y^2+1)^{1/2} + 6y^2(y^2+1) - \\
& - 3y(y^2+1)^{3/2} - 3y^3(y^2+1)^{1/2}\} = \\
& = (y^2+1)^{-3/2} \{3y^2+1 - 3y(y^2+1)^{1/2}(1+y^2+1) + \\
& + 6y^2(y^2+1) - 3y^3(y^2+1)^{1/2}\} = \\
& = (y^2+1)^{-3/2} \{3y^2+1 - 6y(y^2+1)^{1/2} - 3y^3(y^2+1)^{1/2} + \\
& + 6y^2(y^2+1) - 3y^3(y^2+1)^{1/2}\} = \\
& = (y^2+1)^{-3/2} \{3y^2+1 - 6y(y^2+1)^{1/2} - 6y^3(y^2+1)^{1/2} + 6y^2(y^2+1)\} = \\
& = (y^2+1)^{-3/2} \{3y^2+1 - 6y(y^2+1)^{1/2}(1+y^2) + 6y^2(y^2+1)\}
\end{aligned}$$

quindi

$$g''(y) = (y^2+1)^{-3/2} [3y^2+1 - 6y(y^2+1)^{3/2} + 6y^2(y^2+1)] .$$

Allora

$$\begin{aligned}
yg''(y) - 2g'(y) & = y(y^2+1)^{-3/2} [3y^2+1 - 6y(y^2+1)^{3/2} + 6y^2(y^2+1)] - \\
& - 2y(y^2+1)^{-1/2} [3y^2+1 - 3y(y^2+1)^{1/2}] = \\
& = y(y^2+1)^{-3/2} \{3y^2+1 - 6y(y^2+1)^{3/2} + 6y^2(y^2+1) - \\
& - 2(y^2+1) [3y^2+1 - 3y(y^2+1)^{1/2}]\} = \\
& = y(y^2+1)^{-3/2} \{3y^2+1 - 6y(y^2+1)^{3/2} + 6y^2(y^2+1) - \\
& - 2(y^2+1)(3y^2+1) + 6y(y^2+1)^{3/2}\} = \\
& = y(y^2+1)^{-3/2} [(3y^2+1)(1-2y^2-2) + 6y^2(y^2+1)] = \\
& = y(y^2+1)^{-3/2} (-6y^4 - 3y^2 - 2y^2 - 1 + 6y^4 + 6y^2)
\end{aligned}$$

cioè

$$yg''(y) - 2g'(y) = y(y^2+1)^{-3/2}(y^2-1) .$$

Pertanto $f_5''(x) = 0$ se e solo se $y^2 - 1 = 0$ i.e. per $x^{2/3} = 1$, quindi si hanno i due punti $x_2 = -1$ e $x_3 = 1$. f_5 è convessa se $y^{-5} [yg''(y) - 2g'(y)] > 0$ ed è concava se $y^{-5} [yg''(y) - 2g'(y)] < 0$. Allora f_5 è convessa per $y^{-4}(y^2+1)^{-3/2}(y^2-1) > 0$ ed è concava per $y^{-4}(y^2+1)^{-3/2}(y^2-1) < 0$, quindi è convessa per $y^2 - 1 > 0$ (cioè per $y = x^{1/3} < -1$ e per $y = x^{1/3} > 1$) e concava per $y^2 - 1 < 0$ (cioè per $-1 < y = x^{1/3} < 1$). In definitiva f_5 è convessa per negli intervalli $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ e concava nell'intervallo $(-1, 1)$. I punti x_2 e x_3 sono allora punti di flesso.

Esercizio 4.4. Studiare il grafico di

$$f_7(x) = \frac{2^{x+1} + 1}{2^x - 1} \quad , \quad f_8(x) = x^{1/(4 \log^2 x)} .$$

Esercizio 4.5. Studiare il grafico di

$$f_9(x) = \arctan x - \frac{1}{2}x \quad , \quad f_{10}(x) = \arctan \left(\frac{4x-1}{4x} - \frac{1}{4|x|} \right) .$$

Esercizio 4.6. *Studiare il grafico di*

$$f_{11}(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} - x) - 2 \arctan \frac{1}{x},$$

$$f_{12}(x) = \arctan \frac{\log x - 1}{\log x + 1} + \log(\log^2 x + 1).$$

■ *Studio di $f_{11}(x)$.*

(A) *Dominio della funzione*

$$\mathcal{D}(f_{11}) = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 1} - x > 0, x \neq 0\}$$

Si osservi che la disequazione $\sqrt{x^2 + 1} > x$ è sempre soddisfatta per $x < 0$, mentre, per $x > 0$, elevando al quadrato si ottiene $x^2 + 1 > x^2$ che ancora risulta essere sempre soddisfatta. In conclusione,

$$\mathcal{D}(f_{11}) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

(B) *Comportamento agli estremi degli intervalli che compongono il dominio*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\log(\sqrt{x^2 + 1} - x) - 2 \arctan \frac{1}{x} \right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\log(\sqrt{x^2 + 1} - x) - 2 \arctan \frac{1}{x} \right) = -2 \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\log(\sqrt{x^2 + 1} - x) - 2 \arctan \frac{1}{x} \right) = -2 \left(\frac{\pi}{2} \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log(\sqrt{x^2 + 1} - x) - 2 \arctan \frac{1}{x} \right) = -2 \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -\pi.$$

Non vi sono né asintoti verticali né asintoti obliqui per $x \rightarrow \pm\infty$ (la funzione in tali casi è un infinito logartimico).

(C) *Ricerca dei punti di estremo e monotonia della funzione*

$$f'_{11}(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^{1/2} - x} \left(\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2}(2x) - 1 \right) - 2 \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{(x^2 + 1)^{1/2} - x} [x(x^2 + 1)^{-1/2} - 1] + \frac{2}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{(x^2 + 1)^{1/2} - x} \cdot \frac{x - (x^2 + 1)^{1/2}}{(x^2 + 1)^{1/2}} + \frac{2}{x^2 + 1} = -\frac{1}{(x^2 + 1)^{1/2}} + \frac{2}{x^2 + 1}$$

dunque

$$f'_{11}(x) = \frac{2 - (x^2 + 1)^{1/2}}{x^2 + 1}.$$

Ne segue che $f'_{11}(x) = 0$ se e solo se $2 - (x^2 + 1)^{1/2} = 0$ i.e. per $x^2 + 1 = 4$. I punti estremali sono allora i punti $x_1 = -\sqrt{3}$ e $x_2 = \sqrt{3}$. Il denominatore di f'_{11} è positivo per cui il segno di f'_{11} è determinato dal segno del suo numeratore.

Sia $I(x_1, r)$ un intorno di x_1 : se $x \in I(x_1, r)$ con $x < x_1$, allora $x^2 > 3$ e di conseguenza $x^2 + 1 > 4$ da cui $(x^2 + 1)^{1/2} > 2$, risultando così f'_{11} negativa nella parte sinistra di

$I(x_1, r)$ e quindi f_{11} strettamente decrescente in $(x_1 - r, x_1)$. Se invece $x \in I(x_1, r)$, con $x > x_1$, allora, poiché $x_1 + r < 0$, è $3 > x^2$ e di conseguenza $x^2 + 1 < 4$ da cui $(x^2 + 1)^{1/2} < 2$, risultando così f'_{11} positiva nella parte destra di $I(x_1, r)$ e quindi f_{11} strettamente crescente in $(x_1, x_1 + r)$. Il punto $x_1 = -\sqrt{3}$ è quindi un punto di minimo locale con ordinata $f_{11}(-\sqrt{3}) = \log(2 + \sqrt{3}) + 2 \arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Sia ora $I(x_2, r)$ un intorno di x_2 : se $x \in I(x_2, r)$ con $x < x_2$, allora $x^2 < 3$ e di conseguenza $x^2 + 1 < 4$ da cui $(x^2 + 1)^{1/2} < 2$, risultando così f'_{11} positiva nella parte sinistra di $I(x_2, r)$ e quindi f_{11} strettamente crescente in $(x_2 - r, x_2)$. In modo analogo, se $x \in I(x_2, r)$, con $x > x_2$, allora $x^2 > 3$ e di conseguenza $x^2 + 1 > 4$ da cui $(x^2 + 1)^{1/2} > 2$, risultando f'_{11} negativa nella parte destra di $I(x_2, r)$ e perciò f_{11} strettamente decrescente in $(x_2, x_2 + r)$. Quindi il punto $x_2 = \sqrt{3}$ è un punto di massimo locale con ordinata $f_{11}(\sqrt{3}) = \log(2 - \sqrt{3}) - 2 \arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Infine la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, -\sqrt{3})$ e in $(\sqrt{3}, \infty)$ e strettamente crescente in $(-\sqrt{3}, 0)$ e in $(0, \sqrt{3})$.

(D) Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità della funzione

I punti di flesso sono da cercare fra i punti del dominio di f_{11} per cui $f''_{11} = 0$.

$$\begin{aligned} f''_{11}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2 - (x^2 + 1)^{1/2}}{x^2 + 1} \right) = \frac{d}{dx} \left(2 - (x^2 + 1)^{1/2} \right) (x^2 + 1)^{-1} = \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-1/2} (2x) (x^2 + 1)^{-1} - [2 - (x^2 + 1)^{1/2}] (x^2 + 1)^{-2} (2x) = \\ &= -x(x^2 + 1)^{-3/2} - 2x(x^2 + 1)^{-2} [2 - (x^2 + 1)^{1/2}] = \\ &= -x(x^2 + 1)^{-2} \{ (x^2 + 1)^{1/2} + 2[2 - (x^2 + 1)^{1/2}] \} = \\ &= -x(x^2 + 1)^{-2} [(x^2 + 1)^{1/2} + 4 - 2(x^2 + 1)^{1/2}] \end{aligned}$$

dunque

$$f''_{11}(x) = -x(x^2 + 1)^{-2} [4 - (x^2 + 1)^{1/2}].$$

In $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $f''_{11}(x) = 0$ se e solo se $4 - (x^2 + 1)^{1/2} = 0$ ovvero per $(x^2 + 1)^{1/2} = 4 \iff x^2 + 1 = 16$. I punti $x_3 = -\sqrt{15}$, $x_4 = \sqrt{15}$ sono i probabili punti di flesso. Poiché $(x^2 + 1)^{-2} > 0$, il segno di f''_{11} è determinato dal suo numeratore. Se $x \leq -\sqrt{15}$ allora $x^2 \geq 15$ e di conseguenza $x^2 + 1 \geq 16$ da cui $(x^2 + 1)^{1/2} \geq 4$ risultando $f''_{11}(x) \leq 0$. Dunque f_{11} è concava in $(-\infty, -\sqrt{15}]$. Se invece $-\sqrt{15} \leq x < 0$ allora $x^2 \leq 15$, di conseguenza $x^2 + 1 \leq 16$ da cui $(x^2 + 1)^{1/2} \leq 4$ risultando $f''_{11}(x) \geq 0$. Dunque f_{11} è convessa in $[-\sqrt{15}, 0)$. Il punto $x_3 = -\sqrt{15}$ è allora un punto di flesso con ordinata

$$f_{11}(-\sqrt{15}) = \log(4 + \sqrt{15}) + 2 \arctan \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

Analogamente, se $0 < x \leq \sqrt{15}$ allora $x^2 \leq 15$, di conseguenza $x^2 + 1 \leq 16$ da cui $(x^2 + 1)^{1/2} \leq 4$ risultando $f''_{11}(x) \leq 0$. Dunque f_{11} è concava in $(0, \sqrt{15}]$; se invece $x \geq \sqrt{15}$ allora $x^2 \geq 15$, di conseguenza $x^2 + 1 \geq 16$ da cui $(x^2 + 1)^{1/2} \geq 4$ risultando $f''_{11}(x) \geq 0$. Dunque f_{11} è convessa in $[\sqrt{15}, +\infty)$. Il punto $x_4 = \sqrt{15}$ è allora un punto di flesso con ordinata $f_{11}(\sqrt{15}) = \log(4 - \sqrt{15}) - 2 \arctan \frac{\sqrt{15}}{15}$.

Esercizio 4.7. *Studiare il grafico delle funzioni*

$$f_{13}(x) = x + \log \cosh x - \tanh x \quad , \quad f_{14}(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} .$$

Esercizio 4.8. *Studiare il grafico di*

$$f_{15}(x) = \sqrt{1+x^2} + \arcsin(1+x^{-2})^{-1/2} \quad , \quad f_{16}(x) = \frac{2 - \log^{-1} x}{\sqrt{|\log x|}} .$$

Esercizio 4.9. *Studiare il comportamento del grafico delle funzioni*

$$f_{17}(x) = |x^2 - 2x| e^x \quad , \quad f_{18}(x) = x^2 e^{\frac{|x|-1}{|x|}} .$$

Esercizio 4.10. *Studiare il grafico di*

$$f_{19}(x) = \frac{1 + |\log x|}{1 - |\log x|} \quad , \quad f_{20}(x) = |\sin x| e^{\sin x} .$$

Esercizio 4.11. *Studiare il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{g(x)}$, dove $g(x)$ è una funzione assegnata.*

■ *Soluzione.*

(A) *Dominio della funzione*

Il dominio della funzione $f(x)$ è:

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0\} .$$

La funzione $f(x)$ non è derivabile nei punti dove $g(x) = 0$; questi sono punti di cuspidi per la funzione $f(x)$.

(B) *Comportamento agli estremi degli intervalli che compongono il dominio*

Nel caso in cui si debbano determinare i limiti $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ si noti che questi hanno senso se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) \geq 0$. In tal caso, se essi sono finiti, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)} ,$$

invece se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty$, allora

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty .$$

In quest'ultimo caso vanno poi ricercati gli eventuali asintoti obliqui col metodo noto.

Se $g(x)$ ha un asintoto verticale in $x = a$ (i.e. $\lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x) = \infty$) e a è un punto di accumulazione di $\mathcal{D}(f)$, allora anche $f(x)$ ha un asintoto verticale in $x = a$; inoltre questo può accadere solo nel caso $\lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x) = +\infty$ per cui si ha che $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = +\infty$.

(C) *Ricerca dei punti di estremo e monotonia della funzione*

Poiché $f(x) = g(x)^{1/2}$ allora

$$f'(x) = \frac{1}{2} g(x)^{-1/2} g'(x) .$$

Ne segue che i punti estremali della funzione $g(x)$ ($g'(x) = 0$) appartenenti a $\mathcal{D}(f)$ sono anche punti estremali della funzione $f(x)$ e inoltre il segno della derivata $f'(x)$ è il segno della derivata $g'(x)$. Quest'ultimo fatto implica che se $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ è un punto di minimo (risp. te massimo) locale della funzione $g(x)$ allora x_0 è anche un punto di minimo (risp. te massimo) locale della funzione $f(x)$, e viceversa.

(D) Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità della funzione

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{4} g(x)^{-3/2} g'(x)^2 + \frac{1}{2} g(x)^{-1/2} g''(x) = \\ &= \frac{1}{4} g(x)^{-3/2} [2g(x)g''(x) - g'(x)^2] . \end{aligned}$$

I punti di flesso della funzione $f(x)$ sono tra i punti di $\mathcal{D}(f)$ per cui

$$2g(x)g''(x) - g'(x)^2 = 0 .$$

Inoltre, poiché lo studio è condotto per $g(x) \geq 0$, la funzione $f(x)$ è convessa dove $2g(x)g''(x) - g'(x)^2 > 0$ ed è concava dove $2g(x)g''(x) - g'(x)^2 < 0$. ■

Esercizio 4.12. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{g(x)}$, dove $g(x)$ è una funzione assegnata.

■ **Soluzione.**

(A) Dominio della funzione

Il dominio della funzione $f(x)$ è:

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) .$$

La funzione $f(x)$ non è derivabile nei punti interni del dominio $\mathcal{D}(g)$ dove $g(x) = 0$: tali punti sono punti di cuspidi per $f(x)$.

(B) Comportamento agli estremi degli intervalli che compongono il dominio

Nel caso in cui occorra calcolare $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ si noti che se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$ è finito allora

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)} ,$$

se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$ allora

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty ;$$

in quest'ultimo caso si cercheranno gli eventuali asintoti obliqui con il metodo noto.

Se $g(x)$ ha un asintoto verticale in $x = a$ (i.e. $\lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x) = \infty$) allora anche $f(x)$ ha un asintoto verticale in $x = a$ e

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = -\infty \quad \text{se} \quad \lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x) = -\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = +\infty \quad \text{se} \quad \lim_{x \rightarrow a^\pm} g(x) = +\infty .$$

(C) Ricerca dei punti di estremo e monotonia della funzione

Poiché $f(x) = g(x)^{1/3}$ allora

$$f'(x) = \frac{1}{3} g(x)^{-2/3} g'(x) .$$

Dunque i punti estremali di $g(x)$ appartenenti a $\mathcal{D}(f)$ sono anche punti estremali di $f(x)$, inoltre il segno della derivata $f'(x)$ è lo stesso della derivata $g'(x)$. Quindi i punti di minimo locale di $g(x)$ appartenenti a $\mathcal{D}(f)$ sono tutti e soli i punti di minimo locale di $f(x)$, i punti di massimo locale di $g(x)$ appartenenti a $\mathcal{D}(f)$ sono tutti e soli i punti di massimo locale di $f(x)$.

(D) Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità della funzione

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{2}{9} g(x)^{-5/3} g'(x)^2 + \frac{1}{3} g(x)^{-2/3} g''(x) = \\ &= \frac{1}{9} g(x)^{-5/3} [3g(x)g''(x) - 2g'(x)^2] . \end{aligned}$$

I punti di flesso della funzione $f(x)$ sono tra i punti di $\mathcal{D}(f)$ per cui

$$3g(x)g''(x) - 2g'(x)^2 = 0 .$$

Inoltre nell'insieme $\{x \in \mathcal{D}(f): g(x) \geq 0\}$ la funzione $f(x)$ è convessa (risp.te concava) dove $3g(x)g''(x) - 2g'(x)^2 > 0$ (risp.te $3g(x)g''(x) - 2g'(x)^2 < 0$), invece nell'insieme $\{x \in \mathcal{D}(f): g(x) \leq 0\}$ la funzione $f(x)$ è convessa (risp.te concava) dove $3g(x)g''(x) - 2g'(x)^2 < 0$ (risp.te $3g(x)g''(x) - 2g'(x)^2 > 0$). ■

Esercizio 4.13. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x}} .$$

Esercizio 4.14. Per $a > 0$ e $b > 1/2$, studiare la funzione

$$f(x) = |-ax + b| + \frac{1}{|ax + b|} .$$

■ *Soluzione.*

(A) Dominio della funzione

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\} .$$

I caso.

$$\begin{cases} -ax + b \geq 0 \\ ax + b > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -ax \geq b \\ ax > -b \end{cases} \implies x \in (-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}] .$$

In tal caso $|-ax + b| = -ax + b$ e $|ax + b| = ax + b$; la funzione da studiare è allora

$$f_1(x) = -ax + b + \frac{1}{ax + b} , \quad x \in (-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}] .$$

(Si noti che, essendo $a, b > 0$, è $-\frac{b}{a} < 0 < \frac{b}{a}$).

(I_B) *Comportamento di f_1 agli estremi di $(-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}]$*

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}^+} \left(-ax + b + \frac{1}{ax + b} \right) = +\infty,$$

$$f_1\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2b}.$$

Siccome $b > \frac{1}{2}$, allora $\frac{1}{b} < 2 \implies 0 < \frac{1}{2b} < 1$.

(I_C) *Ricerca dei punti di estremo e monotonia di f_1*

$$f_1(x) = -ax + b + (ax + b)^{-1} \implies f_1'(x) = -a - a(ax + b)^{-2}$$

cioè

$$f_1'(x) = -a \left[1 + \frac{1}{(ax + b)^2} \right].$$

Poiché $(ax + b)^2 > 0$ si ha che $1 + \frac{1}{(ax + b)^2} > 1 > 0$ ed essendo $a > 0$ ne segue che $f_1'(x) < 0$, per ogni $x \in (-\frac{b}{a}, \frac{b}{a})$, dunque f_1 è decrescente in $(-\frac{b}{a}, \frac{b}{a})$ e non ha punti estremali, quindi tantomeno, ha punti di estremo.

(I_D) *Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità di f_1*

$$f_1''(x) = 2a^2(ax + b)^{-3}$$

e poiché siamo nel caso $ax + b > 0$, ne segue che $(ax + b)^{-3} > 0$, dunque $f_1''(x) > 0$, i.e. f_1 è convessa in $(-\frac{b}{a}, \frac{b}{a})$.

II caso.

$$\begin{cases} -ax + b \geq 0 \\ ax + b < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq \frac{b}{a} \\ x < -\frac{b}{a} \end{cases} \implies x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right).$$

In tal caso $|ax + b| = -ax - b$ e si ha da studiare la funzione

$$f_2(x) = -ax + b - \frac{1}{ax + b}, \quad x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right).$$

(II_B) *Comportamento di f_2 agli estremi di $(-\infty, -\frac{b}{a})$*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-ax + b - \frac{1}{ax + b} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}^-} \left(-ax + b - \frac{1}{ax + b} \right) = +\infty.$$

Ricerca dell'eventuale asintoto per $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \left(-ax + b - \frac{1}{ax + b} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-a + \frac{1}{x} \left(b - \frac{1}{ax+b} \right) \right] = -a \\
\lim_{x \rightarrow -\infty} [f_2(x) - (-ax)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(-ax + b - \frac{1}{ax+b} \right) + ax \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(b - \frac{1}{ax+b} \right) = b
\end{aligned}$$

Si ha dunque l'asintoto $y = -ax + b$.

(II_C) Ricerca dei punti di estremo e monotonia di f_2

$$f_2(x) = -ax + b - (ax+b)^{-1} \implies f_2'(x) = -a + a(ax+b)^{-2}$$

ovvero

$$f_2'(x) = a \left[\frac{1}{(ax+b)^2} - 1 \right] = a \left(\frac{1}{ax+b} - 1 \right) \left(\frac{1}{ax+b} + 1 \right).$$

Allora $f_2'(x) = 0$ se e solo se $\frac{1}{ax+b} - 1 = 0$ o $\frac{1}{ax+b} + 1 = 0$ da cui $ax+b-1=0$

o $ax+b+1=0$, cioè $f_2'(x) = 0$ per $x_1 = \frac{1-b}{a}$ e $x_2 = -\frac{1+b}{a}$. Si noti che x_1 è da scartare

perché $\frac{1-b}{a} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a} > -\frac{b}{a}$ (essendo $\frac{1}{a} > 0$) e l'intervallo studiato è

$(-\infty, -\frac{b}{a})$. Invece $x_2 \in (-\infty, -\frac{b}{a})$ perché $-\frac{1+b}{a} < -\frac{b}{a}$.

Si noti che $\frac{1}{ax+b} - 1 < 0$ per ogni $x \in (-\infty, -\frac{b}{a})$ perchè nel caso in questione

$ax+b < 0$. Se $x < x_2$ allora $ax+b < -1$ da cui $\frac{1}{ax+b} > -1$, i.e. $1 + \frac{1}{ax+b} > 0$.

Pertanto se $x < x_2$ allora $f_2'(x) < 0$ e questo implica che $f_2(x)$ è decrescente.

Se invece $x > x_2$ allora $x > -\frac{1+b}{a} \implies ax+b > -1$ ovvero $\frac{1}{ax+b} < -1 \implies$

$1 + \frac{1}{ax+b} < 0$. In tal caso allora $f_2'(x) > 0$ e questo implica che $f_2(x)$ è crescente.

Dalla discussione fatta ne segue che il punto $x_2 = -\frac{1+b}{a}$ è un *punto di minimo locale*,

inoltre $f_2(x_2) = f_2(-\frac{1+b}{a}) = 2b+2$.

(II_D) Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità di f_2

$$f_2''(x) = -2a^2(ax+b)^{-3}.$$

Siccome nel caso studiato $ax+b < 0$, allora $(ax+b)^3 < 0$, di conseguenza $f_2''(x) > 0$ e $f_2(x)$ è convessa.

III caso.

$$\begin{cases} -ax + b \leq 0 \\ ax + b > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{b}{a} \\ x > -\frac{b}{a} \end{cases} \implies x \in [\frac{b}{a}, +\infty).$$

In tal caso $|-ax + b| = ax - b$, $|ax + b| = ax + b$ e dobbiamo studiare la funzione

$$f_3(x) = ax - b + \frac{1}{ax + b}, \quad x \in \left[\frac{b}{a}, +\infty\right).$$

(III_B) Comportamento di f_3 agli estremi di $\left[\frac{b}{a}, +\infty\right)$

$$f_3\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2b},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(ax - b + \frac{1}{ax + b}\right) = +\infty$$

Ricerca dell'eventuale asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(ax - b + \frac{1}{ax + b}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[a + \frac{1}{x} \left(-b + \frac{1}{ax + b}\right)\right] = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_3(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(ax - b + \frac{1}{ax + b}\right) - ax\right] =$$

$$= \frac{1}{ax + b} \left(-b + \frac{1}{ax + b}\right) = -b.$$

Si ha dunque l'asintoto $y = ax - b$.

(III_C) Ricerca dei punti di estremo e monotonia di f_3

$$f_3(x) = ax - b + (ax + b)^{-1} \implies f_3'(x) = a - a(ax + b)^{-2} = a \left[1 - \frac{1}{(ax + b)^2}\right].$$

Ragionando come nel II caso si trova facilmente che $f_3'(x) = 0$ per $x_3 = \frac{1-b}{a}$ e $x_4 = -\frac{1+b}{a}$ ed entrambe sono da scartare perché minori di $\frac{b}{a}$.

Pertanto f_3 non ha punti estremali né tantomeno punti di estremo. Notare che in questo caso $1 + \frac{1}{ax + b} > 0$ e poiché $x \geq \frac{b}{a}$, $ax + b \geq 2b > 1$ quindi $1 - \frac{1}{ax + b} > 0$. Dunque f_3 è strettamente crescente in $(2, +\infty)$.

(III_D) Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità di f_3

$$f_3''(x) = 2a^2(ax + b)^{-3} > 0$$

perché siamo nel caso $ax + b > 0$, quindi f_3 è convessa.

IV caso.

$$\begin{cases} -ax + b \leq 0 \\ ax + b < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \frac{b}{a} \\ x < -\frac{b}{a} \end{cases}.$$

Questo caso non si verifica mai.

Si noti che il punto $x_0 = \frac{b}{a}$ è un *punto angoloso* per la funzione $f(x)$ in quanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow \frac{b}{a}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{b}{a}\right)}{x - \frac{b}{a}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{b}{a}} \frac{a}{ax - b} \left[f_1(x) - f_1\left(\frac{b}{a}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{b}{a}} \frac{a}{ax - b} \left(-ax + b + \frac{1}{ax + b} - \frac{1}{2b} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{b}{a}} \left[-a + \frac{a}{ax - b} \left(\frac{1}{ax + b} - \frac{1}{2b} \right) \right] = -a + \lim_{x \rightarrow \frac{b}{a}} \frac{a}{ax - b} \frac{2b - ax - b}{2b(ax + b)} = \\ &= -a + \frac{a}{2b} \lim_{x \rightarrow \frac{b}{a}} \frac{b - ax}{(ax - b)(ax + b)} = -a - \frac{a}{4b^2}, \end{aligned}$$

mentre in modo analogo si calcola che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow \frac{b}{a}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{b}{a}\right)}{x - \frac{b}{a}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{b}{a}} \frac{f_3(x) - f_3\left(\frac{b}{a}\right)}{x - \frac{b}{a}} = a - \frac{a}{4b^2}. \end{aligned}$$

■

Esercizio 4.15. Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il grafico della funzione

$$f_a(x) = a \sin x + \log \left(\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - \sin x \right).$$

■ *Soluzione.*

(A) *Dominio della funzione*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f_a) &= \{x \in \mathbb{R} : \sin^2 x - \frac{1}{4} \geq 0, \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - \sin x > 0\} = \\ &= \left(\{x \in \mathbb{R} : \sin x \leq -\frac{1}{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \sin x \geq \frac{1}{2}\} \right) \cap \\ &\quad \cap \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} > \sin x\} = \\ &= \left(\{x \in \mathbb{R} : \sin x \leq -\frac{1}{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \sin x \geq \frac{1}{2}\} \right) \cap \\ &\quad \cap \left(\{x \in \mathbb{R} : \sin x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \sin x > 0, \sin^2 - \frac{1}{4} > \sin^2 x\} \right) = \\ &= \left(\{x \in \mathbb{R} : \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \right. \end{aligned}$$

$$\cup \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cap \\ \cap \left(\left\{ x \in \mathbb{R} : (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \emptyset \right).$$

Limitiamoci a studiare la funzione nell'intervallo $[0, 2\pi]$ perché la funzione è periodica di periodo 2π : infatti

$$f_a(x + 2k\pi) = a \sin(x + 2k\pi) + \log \left(\sqrt{\sin^2(x + 2k\pi) - \frac{1}{4}} - \sin(x + 2k\pi) \right) = \\ = a \sin x + \log \left(\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - \sin x \right) = f_a(x).$$

Dunque prenderemo

$$\left(\left\{ x \in [0, 2\pi] : \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi \right\} \cup \left\{ x \in [0, 2\pi] : \frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi \right\} \right) \cap \\ \cap \{ x \in [0, 2\pi] : \pi < x < 2\pi \}$$

per cui

$$\mathcal{D}(f_a) = \left[\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \right].$$

(B) *Comportamento della funzione agli estremi del dominio*

Si ha

$$f_a\left(\frac{7}{6}\pi\right) = f_a\left(\frac{11}{6}\pi\right) = -\frac{a}{2} - \log 2.$$

(C) *Ricerca dei punti di estremo e monotonia della funzione*

Siano $\varphi(x) = \sin x$ e $g_a(t) = at + \log \left(\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} - t \right)$ per $x \in \left[\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \right]$ e $t \in \left[-\frac{1}{2}, -1 \right]$ cosicché $f_a(x) = (g_a \circ \varphi)(x)$. Allora $f'_a(x) = g'_a(\varphi(x))\varphi'(x) = g'_a(t) \cos x$, dove si è posto $t = \varphi(x)$. Quindi $f'_a(x) = 0$ se $\cos x = 0$ oppure $g'_a(t) = 0$. Nell'intervallo $\left[\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \right]$ la prima è soddisfatta per $x_0 = \frac{3}{2}\pi$. Si ha

$$g'_a(t) = a + \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} - t} \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}} - 1 \right) = \\ = a + \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} - t} \frac{t - \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}} = a - \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}}.$$

Dunque $g'_a(t) = 0$ se $\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{a}$ la quale è possibile solo se $a > 0$; inoltre $g'_a(t) = 0$ per $t = -\frac{\sqrt{a^2 + 4}}{2a} \in (-1, -\frac{1}{2})$. Affinché questa possa essere soddisfatta deve essere ($a > 0$)

$$-1 < -\frac{\sqrt{a^2 + 4}}{2a} < -\frac{1}{2} \implies a^2 > \frac{4}{3} \iff a \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right).$$

Se $a \in (-\infty, 2\frac{\sqrt{3}}{3}]$ allora f_a ha il solo punto estremo $x_0 = \frac{3}{2}\pi$ a cui corrisponde $t_0 = \sin \frac{3}{2}\pi = -1$. In tal caso $g'_a(t_0) \leq 0$.

Se $a \in (-\infty, 2\frac{\sqrt{3}}{3})$ allora $g'_a(t_0) < 0$ dunque esiste un intorno $I(x_0, r)$ tale che per ogni $x \in I(x_0, r)$, $g'_a(t) < 0$. Se $x \in I(x_0, r)$ e $x \leq x_0$ allora $\cos x \leq 0$, se invece $x \geq x_0$ allora $\cos x \geq 0$. Dunque per $x \leq x_0$ è $f'_a(x) \geq 0$ e f_a è crescente, mentre se $x \geq x_0$ è $f'_a(x) \leq 0$ e f_a è decrescente. Pertanto $x_0 = \frac{3}{2}\pi$ è un punto di massimo locale e $f_a(\frac{3}{2}\pi) = -a - \log\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ è il corrispondente valore di massimo locale.

Se $a = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$ allora $g'_a(t_0) = 0$; sia $I(x_0, r)$ un intorno di x_0 di raggio abbastanza piccolo in modo che per $x \in I(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ sia $-1 < t < -\frac{1}{2}$ cosicché $\frac{1}{4} < t^2 < 1$ da cui $0 < t^2 - \frac{1}{4} < \frac{3}{4}$ che dà $g'_a(t) < 0$. Ne segue che, per $x \in I(x_0, r)$, $x \leq x_0$, è $f'_a(x) \geq 0$, dunque f_a è crescente, mentre per $x \geq x_0$, è $f'_a(x) \leq 0$, dunque f_a è decrescente. Pertanto $x_0 = \frac{3}{2}\pi$ è un punto di massimo locale.

Infine se $a \in (2\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, oltre al punto $x_0 = \frac{3}{2}\pi$, si avranno due valori $x_1, x_2 \in [\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi]$ per cui $\sin x_1 = \sin x_2 = -\frac{\sqrt{a^2 + 4}}{2a}$, con $x_1 < \frac{3}{2}\pi < x_2$. Si noti che la funzione $\sin x$ a sinistra di $\frac{3}{2}\pi$ è strettamente decrescente mentre a destra di $\frac{3}{2}\pi$ è strettamente crescente.

Stabiliamo ora se i tre punti estremali x_0, x_1 e x_2 sono punti di estremo locale. Poiché $g'_a(t_0) = a - 2\frac{\sqrt{3}}{3} > 0$ esiste un intorno $I(x_0, r)$ tale che per ogni $x \in I(x_0, r)$, $g'_a(t) > 0$. Se $x \in I(x_0, r)$ e $x \leq x_0$ allora $\cos x \leq 0$, se invece $x \geq x_0$ allora $\cos x \geq 0$.

Ne segue che, per $x \in I(x_0, r)$, se $x \leq x_0$ allora $f'_a(x) \leq 0$, dunque f_a è decrescente in $(x_0 - r, x_0)$, mentre se $x \geq x_0$ allora $f'_a(x) \geq 0$, dunque f_a è crescente in $(x_0, x_0 + r)$.

Pertanto $x_0 = \frac{3}{2}\pi$ è un punto di minimo locale e $f_a(\frac{3}{2}\pi) = -a - \log\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ è il corrispondente valore di minimo locale.

Poiché $\cos x_1 < 0$ allora esiste un intorno $I(x_1, r)$ tale che per ogni $x \in I(x_1, r)$,

$\cos x < 0$. Se $x \in I(x_1, r)$ e $x \leq x_1$ allora $-\frac{1}{2} > \sin x \geq \sin x_1$ ovvero $-\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}a \leq t < -\frac{1}{2}$ da cui $\frac{1}{4} < t^2 \leq \frac{a^2+4}{4a^2} \implies 0 < t^2 - \frac{1}{4} \leq \frac{a^2+4}{4a^2} - \frac{1}{4}$ i.e. $0 < t^2 - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{a^2}$ e

di conseguenza $\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} \leq \frac{1}{a}$, pertanto $a - \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-1/2} \leq 0$ i.e. $g'_a(t) \leq 0$.

Ne segue che per $x \in I(x_1, r)$ con $x \leq x_1$ è $f'_a(x) \geq 0$, dunque f_a è crescente in $(x_1 - r, x_1)$.

Se $x \in I(x_1, r)$ e $x \geq x_1$ allora $\sin x \leq \sin x_1 < -\frac{1}{2}$ ovvero $t \leq -\frac{\sqrt{a^2+4}}{2a} < -\frac{1}{2}$ da cui

$t^2 \geq \frac{a^2+4}{4a^2} > \frac{1}{4} \implies t^2 - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{a^2}$ e di conseguenza $\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} \geq \frac{1}{a}$, pertanto

$a - \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-1/2} \geq 0$ i.e. $g'(t) \geq 0$. Ne segue che per $x \in I(x_1, r)$ con $x \geq x_1$ è $f'_a(x) \leq 0$, dunque f_a è decrescente in $(x_1, x_1 + r)$.

Allora x_1 è un punto di massimo locale e $f_a(x_1) = -\frac{\sqrt{a^2+4}}{2} + \log\left(2 + \frac{\sqrt{a^2+4}}{2a}\right)$ è il corrispondente valore di massimo locale.

Poiché $\cos x_2 > 0$ allora esiste un intorno $I(x_2, r)$ tale che per ogni $x \in I(x_2, r)$, $\cos x > 0$.

Se $x \in I(x_2, r)$ e $x \leq x_2$ allora $\sin x \leq \sin x_2 < -\frac{1}{2}$ ovvero $t \leq -\frac{\sqrt{a^2+4}}{2a} < -\frac{1}{2}$ da cui

$t^2 \geq \frac{a^2+4}{4a^2} \implies t^2 - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{a^2}$, di conseguenza $\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} \geq \frac{1}{a}$ e pertanto $a - \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{-1/2} \geq 0$

i.e. $g'_a(t) \geq 0$. Ne segue che per $x \in I(x_2, r)$ con $x \leq x_2$ è $f'_a(x) \geq 0$, dunque f_a è crescente in $(x_2 - r, x_2)$.

Se $x \in I(x_2, r)$ e $x \geq x_2$ allora $-\frac{1}{2} \geq \sin x > \sin x_2$ ovvero $-\frac{\sqrt{a^2+4}}{2a} \leq t < -\frac{1}{2}$ da

cui $\frac{1}{4} < t^2 \leq \frac{a^2+4}{4a^2} \implies 0 < t^2 - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{a^2}$, di conseguenza $\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} \leq \frac{1}{a}$, pertanto

$a - \left(\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}\right)^{-1/2} \leq 0$ i.e. $g'_a(t) \leq 0$. Ne segue che per $x \in I(x_2, r)$ con $x \geq x_2$ è $f'_a(x) \leq 0$, dunque f_a è decrescente in $(x_2, x_2 + r)$.

Allora x_2 è un punto di massimo locale e $f_a(x_2) = -\frac{\sqrt{a^2+4}}{2} + \log\frac{2 + \sqrt{a^2+4}}{2a}$ è il corrispondente valore di massimo locale.

Infine la funzione è strettamente crescente in $[\frac{7}{6}\pi, x_1] \cup [\frac{3}{2}\pi, x_2]$ e strettamente decrescente in $[x_1, \frac{3}{2}\pi] \cup [x_2, \frac{11}{6}\pi]$.

(D) Ricerca dei punti di flesso e concavità e/o convessità della funzione

Si noti che $f''_a(x) = g''_a(\varphi(x))\varphi'(x)^2 + g'_a(\varphi(x))\varphi''(x) = g''_a(t)\cos^2 x - g'_a(t)\sin x$ cioè

$$f''_a(x) = (1 - t^2)g''_a(t) - tg'_a(t).$$

Siccome

$$g_a''(t) = -\frac{d}{dt} \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{-1/2} = t \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{-3/2}$$

si ha

$$\begin{aligned} f_a''(x) &= (1-t^2)g_a''(t) - tg_a'(t) = t(1-t^2) \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{-3/2} - t \left[a - \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{-1/2} \right] = \\ &= t(1-t^2) \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{-3/2} - t \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{-1/2} \left[a \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{1/2} - 1 \right] = \\ &= t \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{-3/2} \left\{ 1-t^2 - \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) \left[a \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\} = \\ &= t \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{-3/2} \left[1-t^2 - a \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{3/2} + t^2 - \frac{1}{4} \right] = \\ &= t \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{-3/2} \left[\frac{3}{4} - a \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{3/2} \right] \end{aligned}$$

Perciò

$$f_a''(x) = 0 \iff t \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{-3/2} \left[\frac{3}{4} - a \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{3/2} \right] = 0.$$

Poiché per $x \in [\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi]$, $t = \sin x < 0$, resta

$$\frac{3}{4} - a \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{3/2} = 0.$$

Se $a = 0$ allora $f_0''(x) < 0$, dunque f_0 è concava.

Se $a \neq 0$ allora si ha la soluzione

$$t_1 = -\sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt[3]{\frac{9}{16a^2}}},$$

essendo, nel caso in questione, $-1 \leq t \leq -\frac{1}{2}$.

I punti $x_3, x_4 \in [\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi]$ tali che $\sin x_3 = \sin x_4 = t_1$, che hanno per immagine

$$f_a(x_3) = f_a(x_4) = -a\sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt[3]{\frac{9}{16a^2}}} + \log \left[\left(\frac{9}{16a^2} \right)^{1/6} + \sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt[3]{\frac{9}{16a^2}}} \right],$$

sono punti di flesso.

Infatti nel dominio di f_a è $t \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{-3/2} < 0$; inoltre per $x \in [\frac{7}{6}\pi, x_3] \cup [x_4, \frac{11}{6}\pi]$ è

$t_1 \leq t \leq -\frac{1}{2}$ da cui $\frac{1}{4} \leq t^2 \leq t_1^2$ quindi $0 \leq t^2 - \frac{1}{4} \leq \left(\frac{3}{4a} \right)^{2/3}$ e perciò $a \left(t^2 - \frac{1}{4} \right)^{3/2} \leq \frac{3}{4}$.

Di conseguenza, per $a > 0$, $f_a''(x) \leq 0$, mentre per $a < 0$, $f_a''(x) \geq 0$. Pertanto se $a > 0$,

f_a è concava in $[\frac{7}{6}\pi, x_3] \cup [x_4, \frac{11}{6}\pi]$, se $a < 0$, f_a è convessa in $[\frac{7}{6}\pi, x_3] \cup [x_4, \frac{11}{6}\pi]$.

Invece per $x \in [x_3, x_4]$ è $-1 \leq t \leq t_1$ da cui $t_1^2 \leq t^2 \leq 1$, quindi $\left(\frac{3}{4a}\right)^{2/3} \leq t^2 - \frac{1}{4}$ che dà

$a \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^{3/2} \geq \frac{3}{4}$. Di conseguenza, per $a > 0$, $f_a''(x) \geq 0$, mentre per $a < 0$,

$f_a''(x) \leq 0$. Pertanto se $a > 0$, f_a è convessa in $[x_3, x_4]$, se $a < 0$, f_a è concava in $[x_3, x_4]$. ■

5. ESERCIZI SULLE FORMULE DI TAYLOR E DI MAC LAURIN

• Sia f derivabile n volte in un punto $x_0 \in \mathcal{D}(f)$, $n \in \mathbb{N}$. La *formula* o lo *sviluppo di Taylor di ordine n* di f in x_0 è l'espressione

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x; x_0)$$

ovvero

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x; x_0).$$

Il polinomio di grado n

$$P_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

è detto il *polinomio di Taylor* di grado n di f in x_0 e la funzione $R_n(x; x_0)$ è detta il *resto di Taylor* di ordine n di f in x_0 ; esso ha la proprietà

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = 0 \iff R_n(x; x_0) = o((x - x_0)^n).$$

Si hanno le seguenti rappresentazioni del resto:

- se f è derivabile $n + 1$ volte in x_0 allora

$$R_n(x; x_0) = \left[\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \varepsilon(x) \right] (x - x_0)^{n+1}$$

dove $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- se $f : \mathcal{D}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile n volte in un intorno $I(x_0, r)$ e per $0 < \delta < r$ esiste $f^{(n+1)}$ in $(x_0, x_0 + \delta)$, allora per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ e per ogni funzione ψ continua in $[x_0, x]$, derivabile in (x_0, x) con $\psi' \neq 0$ esiste $\xi \in (x_0, x)$ tale che

$$R_n(x; x_0) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n.$$

In particolare per $\psi(y) = x - y$ si ha il resto nella *forma di Cauchy*

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n (x - x_0)$$

mentre per $\psi(y) = (x - y)^{n+1}$ si ha il resto nella *forma di Lagrange*

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

- se $f : \mathcal{D}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^{n+1} in un intorno di x_0 allora esiste un intorno $I(x_0, \varepsilon)$ nel quale si abbia la *rappresentazione integrale*

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

- Siano $f, g \in C^m(I(x_0, r))$ per $I(x_0, r) \subset \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ intorno del punto $x_0 \in \mathring{\mathcal{D}}(f) \cap \mathring{\mathcal{D}}(g)$. Poiché

$$(f + g)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) + g^{(k)}(x_0)$$

per $0 \leq k \leq n$, la formula di Taylor di $f + g$ in x_0 è dato da

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) + g^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x; x_0) = \\ &= P_{n,f}(x; x_0) + P_{n,g}(x; x_0) + R_n(x; x_0) \end{aligned}$$

dove $P_{n,f}(x; x_0)$ e $P_{n,g}(x; x_0)$ sono il polinomio di Taylor di ordine n rispettivamente di f e g in x_0 . Se f e g sono derivabili $n + 1$ -volte in un intorno destro di x_0 , la rappresentazione del resto nella forma di Lagrange è

$$\begin{aligned} R_n(x; x_0) &= \frac{(f + g)^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi) + g^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad , \quad x_0 < \xi < x . \end{aligned}$$

- Sotto le stesse condizioni del caso precedente, poiché

$$(fg)^{(k)}(x_0) = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} f^{(m)}(x_0) g^{(k-m)}(x_0)$$

per $0 \leq k \leq n$, la formula di Taylor di ordine n di fg in x_0 è data da

$$(fg)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} f^{(m)}(x_0) g^{(k-m)}(x_0) \right) (x - x_0)^k + R_n(x; x_0) .$$

La rappresentazione del resto nella forma di Lagrange è

$$\begin{aligned} R_n(x; x_0) &= \frac{(fg)^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} = \\ &= \frac{1}{(n + 1)!} \left(\sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} f^{(m)}(\xi) g^{(n-m+1)}(\xi) \right) (x - x_0)^{n+1} \quad , \quad x_0 < \xi < x . \end{aligned}$$

- Ad esempio se $f(x) = (x - x_0)g(x) \in C^n(I(x_0, r))$, essendo

$$f^{(k)}(x) = (x - x_0)g^{(k)}(x) + kg^{(k-1)}(x)$$

la formula di Taylor in x_0 è

$$\begin{aligned} (x - x_0)g(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{kg^{(k-1)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x; x_0) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k-1)}(x_0)}{(k - 1)!} (x - x_0)^k + R_n(x; x_0) \end{aligned}$$

dove, se g è derivabile $n + 1$ volte in un intorno destro di x_0 , rappresentando il resto nella forma di Lagrange, è

$$R_n(x; x_0) = \frac{g^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^{n+1} + \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (\xi - x_0)(x - x_0)^{n+1} \quad , \quad x_0 < \xi < x .$$

• La *formula* o lo *sviluppo di Mac Laurin* di ordine n di una funzione è la formula di Taylor di ordine n della funzione in $x_0 = 0$. Riportiamo qui di seguito le formule di Mac Laurin delle funzioni elementari e di alcune funzioni più comuni:

$$\bullet e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x, 0) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x, 0)$$

il cui resto nella forma di Lagrange è

$$R_n(x; 0) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \quad , \quad 0 < \xi < x ;$$

$$\bullet \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + R_{2n+2}(x; 0) = \\ = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+2}(x; 0) ,$$

il cui resto nella forma di Lagrange è

$$R_{2n+2}(x; 0) = (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+3)!} x^{2n+3} \quad , \quad 0 < \xi < x ;$$

$$\bullet \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + R_{2n+1}(x; 0) = \\ = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + R_{2n+1}(x; 0) ,$$

il cui resto nella forma di Lagrange è

$$R_{2n+1}(x; 0) = (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+2)!} x^{2n+2} \quad , \quad 0 < \xi < x ;$$

$$\bullet (1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_n(x; 0) = \\ = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x; 0) ,$$

il cui resto nella forma di Lagrange è

$$R_n(x; 0) = \binom{\alpha}{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \quad , \quad x_0 < \xi < x ;$$

$$\bullet \frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + R_n(x; 0) = \sum_{k=0}^n x^k + R_n(x; 0)$$

dove, poiché

$$1 - x^{n+1} = (1-x) \sum_{k=0}^n x^k \quad \xrightarrow{(x \neq 1)} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

da cui

$$R_n(x; 0) = \frac{x^{n+1}}{1-x} ;$$

$$\bullet \quad \log \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} + R_{n+1}(x; 0)$$

con il resto dato da

$$R_{n+1}(x; 0) = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt ;$$

$$\bullet \quad \log(1+x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + R_{n+1}(x; 0)$$

con il resto dato da

$$R_{n+1}(x; 0) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t} dt ;$$

queste ultime due formule danno la formula

$$\bullet \quad \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t^2} dt ;$$

$$\bullet \quad \arctan x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + R_{2n+1}(x; 0)$$

dove

$$R_{2n+1}(x; 0) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt ;$$

$$\bullet \quad \arcsin x = \sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + R_{2n+1}(x; 0)$$

dove⁶

$$R_{2n+1}(x; 0) = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} (1+\xi)^{-n-3/2} \int_0^x t^{2n+2} dt .$$

• Sia $f(x)$ una funzione derivabile n volte in un punto $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ e si supponga che per $t = x - x_0$ sia nota la formula di Mac Laurin di ordine n della funzione⁷ $g(t) = f(t + x_0)$,

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2} t^2 + \frac{g'''(0)}{3!} t^3 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n + R_n(t; 0) .$$

Poiché $x = \varphi(t)$, per $\varphi(t) = t + x_0$, con $\varphi(0) = x_0$, $\varphi'(t) = 1$, si ha

$$\begin{aligned} g(t) &= f(\varphi(t)) = f(x) && \implies g(0) = f(x_0) \\ g'(t) &= f'(\varphi(t))\varphi'(t) = f'(\varphi(t)) && \implies g'(0) = f'(x_0) \\ g''(t) &= f''(\varphi(t))\varphi'(t) = f''(\varphi(t)) && \implies g''(0) = f''(x_0) \\ g'''(t) &= f'''(\varphi(t))\varphi'(t) = f'''(\varphi(t)) && \implies g'''(0) = f'''(x_0) \\ &\vdots && \vdots \quad \vdots \\ g^{(n)}(t) &= f^{(n)}(\varphi(t))\varphi'(t) = f^{(n)}(\varphi(t)) && \implies g^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_0) . \end{aligned}$$

⁶ $(2k)!! := 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-2)(2k)$ e $(2k+1)!! := 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)(2k+1)$.

⁷È ovvio che $g(t)$ è derivabile fino all'ordine n in 0.

Quindi la formula di Mac Laurin di $g(t)$ diventa

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x; x_0)$$

che è la formula di Taylor di ordine n di f in x_0 perché

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R_n(t; 0)}{t^n} = 0.$$

Esercizio 5.1. *Determinare la formula di Taylor delle seguenti funzioni nei punti indicati a fianco di ciascuna di esse:*

$$(1) f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x_0 \neq 1, \quad (2) f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}, \quad x_0 = 0.$$

■ *Soluzione di (1).* Il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ che è aperto e per ogni $x \neq 1$ si ha

$$f^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-k-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

allora la formula richiesta è

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{(1-x_0)^{k+1}} + R_n(x; x_0)$$

dove, rappresentando il resto nella forma di Lagrange, è

$$R_n(x; x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(1-\xi)^{n+2}}, \quad x_0 < \xi < x.$$

Si osservi che

$$(x-x_0)^{n+1} - (1-x_0)^{n+1} = (x-1) \sum_{k=0}^n (x-x_0)^k (1-x_0)^{n-k}$$

da cui si ricava per $x \neq 1$

$$\frac{(x-x_0)^{n+1}}{x-1} - \frac{(1-x_0)^{n+1}}{x-1} = \sum_{k=0}^n (x-x_0)^k (1-x_0)^{n-k}$$

di conseguenza, con passaggi elementari, si ottiene

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{(1-x_0)^{k+1}} + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(1-x_0)^{n+1}(1-x)}$$

che per paragone con la formula di Taylor scritta sopra dà

$$R_n(x; x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(1-x_0)^{n+1}(1-x)}.$$

Soluzione di (2). Il dominio della funzione è $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ sul quale f è C^∞ . Poiché $x^2 + x + 1 = x(x+1) + 1$ si ha

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1}$$

quindi per la formula richiesta basta scrivere la formula di Mac Laurin della funzione $\frac{1}{x+1}$. Questa si ottiene dalla formula di Mac Laurin della funzione $g(x) = \frac{1}{1-x}$ sostituendo $-x$ al posto di x , cioè

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-x)^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$$

Siccome

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{1+x} &= x + \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} = \\ &= x + 1 - x + \sum_{k=2}^n (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \end{aligned}$$

la formula richiesto è

$$\frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = 1 + \sum_{k=2}^n (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$$

■

Esercizio 5.2. Determinare le formule di Taylor delle seguenti funzioni nei punti a fianco indicati.

$$(1) f(x) = \frac{x+1}{(2+x)^{1/2}}, \quad x_0 = \frac{1}{\pi}, \quad (2) f(x) = 2 \cos^2 x - \cosh x, \quad x_0 = \frac{1}{2}.$$

■ *Soluzione di (1).* Il dominio della funzione è $(-2, +\infty)$ nel quale la funzione $f(x)$ è C^∞ . Poiché $\frac{1}{\pi} \in (-2, +\infty)$, ha senso scrivere la formula di Taylor di $f(x)$ in questo punto. Posto $t = x - \frac{1}{\pi}$ è $x = \varphi(t)$ per $\varphi(t) = t + \frac{1}{\pi}$, di conseguenza la funzione $g(t) = (f \circ \varphi)(t)$ è tale che $g(\varphi^{-1}(x)) = (f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x)) = f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = f(x)$. Basta allora determinare la formula di Taylor di g nel punto $\varphi^{-1}(\frac{1}{\pi}) = 0$ essendo $\varphi^{-1}(x) = x - \frac{1}{\pi}$, ovvero basta determinare la formula di Mac Laurin della funzione $g(t)$. Si noti che $g(t) = (t+a)h(t)$ per

$$a = 1 + \frac{1}{\pi}, \quad h(t) = \frac{1}{(t+a+1)^{1/2}}.$$

Poiché

$$g^{(k)}(t) = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (t+a)^{(m)} h^{(k-m)}(t)$$

con $(t+a)^{(m)} = 0$ per $m \geq 2$ e $(t+a)' = 1$, allora $g^{(k)}(t) = (t+a)h^{(k)}(t) + kh^{(k-1)}(t)$ da cui $g^{(k)}(0) = ah^{(k)}(0) + kh^{(k-1)}(0)$. Pertanto la formula di Mac Laurin di $g(t)$ di ordine n è

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{ah^{(k)}(0) + kh^{(k-1)}(0)}{k!} t^k + R_{n,g}(t; 0) = \\ &= a \sum_{k=0}^n \frac{h^{(k)}(0)}{k!} t^k + \sum_{k=1}^n \frac{h^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} t^k + R_{n,g}(t; 0) = \end{aligned}$$

$$= aP_{n,h}(t;0) + tP_{n-1,h}(t;0) + R_{n,g}(t;0)$$

dove $P_{n,h}(t;0)$ indica il polinomio di Taylor di grado n di h nel punto $t = 0$. Ora

$$h(t) = (t + a + 1)^{-1/2} = (a + 1)^{-1/2} \left(1 + \frac{t}{a + 1}\right)^{-1/2} = (a + 1)^{-1/2}(1 + s)^{-1/2}$$

per $s = \frac{t}{a + 1}$. Dalla formula di Mac Laurin della funzione $(1 + s)^{-1/2}$ si ha

$$h(t) = (a + 1)^{-1/2} \left[\sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} s^k + R_n(s;0) \right]$$

quindi il polinomio di Taylor di grado n di $h(t)$ in $t = 0$ è

$$P_{n,h}(t;0) = (a + 1)^{-1/2} \sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} \frac{t^k}{(a + 1)^k} = \sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} \frac{t^k}{(a + 1)^{k+1/2}}.$$

Allora

$$\begin{aligned} g(t) &= a \sum_{h=0}^n \binom{-1/2}{k} \frac{t^k}{(a + 1)^{k+1/2}} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{-1/2}{k} \frac{t^{k+1}}{(a + 1)^{k+1/2}} + R_{n,g}(t,0) = \\ &= a \sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} \frac{t^k}{(a + 1)^{k+1/2}} + \sum_{\ell=1}^n \binom{-1/2}{\ell-1} \frac{t^\ell}{(a + 1)^{\ell-1+1/2}} + R_{n,g}(t;0) = \\ &= \frac{a}{(a + 1)^{1/2}} + \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{(a + 1)^{k+1/2}} \left[\binom{-1/2}{k} a + \binom{-1/2}{k-1} (a + 1) \right] + R_{n,g}(t;0) \end{aligned}$$

dove⁸

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{k} a + \binom{-1/2}{k-1} (a + 1) &= \binom{-1/2}{k-1} \left(\frac{a}{2k} - a \right) + \binom{-1/2}{k-1} (a + 1) = \\ &= \binom{-1/2}{k-1} \left(\frac{a}{2k} + 1 \right) = \binom{-1/2}{k-1} \frac{a + 2k}{2k}. \end{aligned}$$

Dunque la formula di Mac Laurin di g è

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{a + 1}} \left(a + \sum_{k=1}^n \binom{-1/2}{k-1} \frac{a + 2k}{k(a + 1)^k} t^k \right) + R_{n,g}(t;0).$$

Se rappresentiamo il resto di g nella forma di Lagrange si ha

$$R_{n,g}(t;0) = \frac{g^{(n+1)}(\eta)}{(n + 1)!} t^{n+1}, \quad 0 < \eta < t$$

dove, tenuto conto che

$$h^{(k)}(t) = \binom{-1/2}{k} k! (t + a + 1)^{-1/2-k},$$

⁸Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ è

$$\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha}{k-1} \frac{\alpha - k + 1}{k}.$$

è

$$\begin{aligned}
 R_{n,g}(t;0) &= \frac{(\eta+a)h^{(n+1)}(\eta) + (n+1)h^{(n)}(\eta)}{(n+1)!} t^{n+1} = \\
 &= \left[\binom{-1/2}{n+1} (\eta+a)(\eta+a+1)^{-3/2-n} + \binom{-1/2}{n} (\eta+a+1)^{-1/2-n} \right] t^{n+1} = \\
 &= \binom{-1/2}{n} \left(-\frac{2n+1}{2(n+1)} (\eta+a) + \eta+a+1 \right) (\eta+a+1)^{-3/2-n} t^{n+1} = \\
 &= \binom{-1/2}{n} \left(\frac{\eta+a}{2n+2} + 1 \right) (\eta+a+1)^{-3/2-n} t^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
 g(\varphi^{-1}(x)) &= \frac{1}{\sqrt{a+1}} \left[a + \sum_{k=1}^n \binom{-1/2}{k-1} \frac{a+2k}{k(a+1)^k} \left(x - \frac{1}{\pi} \right)^k \right] + \\
 &+ \binom{-1/2}{n} \left(\frac{\eta+a}{2n+2} + 1 \right) (\eta+a+1)^{-3/2-n} \left(x - \frac{1}{\pi} \right)^{n+1}
 \end{aligned}$$

e posto $\xi = \eta + \frac{1}{\pi}$ si ottiene la formula richiesta

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\pi+1}} \left[1 + \frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^n \binom{-1/2}{k-1} \frac{1 + \frac{1}{\pi} + 2k}{k \left(2 + \frac{1}{\pi} \right)^k} \left(x - \frac{1}{\pi} \right)^k \right] + \\
 &+ \binom{-1/2}{n} \left(\frac{\xi+1}{2n+2} + 1 \right) (\xi+2)^{-3/2-n} \left(x - \frac{1}{\pi} \right)^{n+1}, \quad \frac{1}{\pi} < \xi < x.
 \end{aligned}$$

■

Esercizio 5.3. Determinare le formule di Mac Laurin delle seguenti funzioni:

$$(1) f(x) = \frac{x+3}{x^2-3x+2}, \quad (2) f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sin x.$$

Esercizio 5.4. Scrivere la formula di Mac Laurin con il resto nella forma di Lagrange per le seguenti funzioni:

$$(1) f(x) = \sqrt[4]{x+2} + \sqrt[3]{x-3}, \quad (2) f(x) = |x| \sin x.$$

■ **Soluzione di (2).** La funzione $f(x) = |x| \sin x$ è sicuramente continua in \mathbb{R} e $C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$; verifichiamo se è anche derivabile in tutto \mathbb{R} : l'eventuale non derivabilità può essere solo in 0. Quindi

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \sin x}{x} = 0, \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin x}{x} = 0
 \end{aligned}$$

che prova invece la derivabilità di f in 0. Si osservi che

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}(-x \sin x) & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ \frac{d}{dx}(x \sin x) & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

cioè

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x - x \cos x & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ \sin x + x \cos x & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= -\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + x \cos x) = 0 = f'(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + x \cos x) = 0 = f'(0). \end{aligned}$$

Quindi f' è continua in 0 e di conseguenza f è di classe $C^1(\mathbb{R})$. Verifichiamo ora la derivabilità in 0 di f' :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \cos x = -2, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \cos x = 2. \end{aligned}$$

Dunque f' non è derivabile in 0 e $f \notin C^2(\mathbb{R})$; possiamo scrivere solo la formula di Mac Laurin del I ordine

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + R_1(x; 0) \iff |x| \sin x = R_1(x; 0)$$

dove, essendo tuttavia $f \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, possiamo rappresentare R_1 nella forma di Lagrange e precisamente, se $x < 0$ allora per qualche $\xi \in (x, 0)$ è

$$R_1(x; 0) = \frac{f''(\xi)}{2} x^2 \iff R_1(x; 0) = \frac{-2 \cos \xi + \xi \sin \xi}{2} x^2,$$

in modo analogo, se $x > 0$ allora per qualche $\xi \in (0, x)$ è

$$R_1(x; 0) = \frac{2 \cos \xi - \xi \sin \xi}{2} x^2.$$

■

Esercizio 5.5. Scrivere la formula di Mac Laurin del IV ordine con il resto nella forma di Lagrange per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - (x^2 + 1)^{1/2}, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Suggerimento. Usare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5.6. Scrivere la formula di Taylor del II ordine nei punti $x_0 = -1$ e $x_0 = 1$ per le funzioni

$$(1) f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}, \quad (2) f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

■ *Soluzione di (2).* Il dominio di $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ è $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ e intanto non è possibile scrivere la formula di Taylor di f in 1. Rimane da scrivere la formula in -1 il quale è possibile perché $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{1\})$. Si ha $f(-1) = -\frac{3}{2}$ e

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 1)(x - 1)^{-1} - (x^2 - x + 1)(x - 1)^{-2} = \\ &= (x - 1)^{-2} [(2x - 1)(x - 1) - x^2 + x - 1] \end{aligned}$$

da cui

$$f'(x) = (x - 1)^{-2}(x^2 - 2x) \implies f'(-1) = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2(x - 1)^{-3}(x^2 - 2x) + (x - 1)^{-2}(2x - 2) = \\ &= (x - 1)^{-3} [-2(x^2 - 2x) + (x - 1)(2x - 2)] \end{aligned}$$

da cui

$$f''(x) = 2(x - 1)^{-3} \implies f''(-1) = -\frac{1}{4}.$$

Allora si ha la formula di Taylor del secondo ordine in -1

$$\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{4}(x + 1) - \frac{1}{8}(x + 1)^2 + R_2(x; -1).$$

Se ad esempio rappresentiamo l'errore nella forma di Lagrange si ha, per qualche $\xi \in (-1, x)$ (o $\xi \in (x, -1)$),

$$R_2(x; -1) = \frac{f'''(\xi)}{3!} (x + 1)^3 \iff R_2(x; -1) = -\frac{(x + 1)^3}{(\xi - 1)^4}$$

(perché $f'''(x) = -6(x - 1)^{-4}$).

■

Esercizio 5.7. Determinare la formula di Taylor del II ordine con il resto nella forma di Lagrange per le seguenti funzioni nei punti a fianco indicati:

$$(1) g(x) = \begin{cases} (x^2 - 4)^2 \log |x - 2| & , \quad x \neq 2 \\ 0 & , \quad x = 2 \end{cases}, \quad \text{in } x = 2,$$

$$(2) h(x) = \begin{cases} (x^2 - 9) \log |x - 3| & , \quad x \neq 3 \\ 0 & , \quad x = 3 \end{cases}, \quad \text{in } x = 3.$$

■ *Soluzione di (1)*. Il dominio di g è \mathbb{R} ed è di classe $C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{2\})$. Verifichiamo dapprima la continuità di g in 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)^2 \log |x - 2| = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)^2 (x - 2)^2 \log |x - 2| = 0 = g(2),$$

dunque g è continua. Verifichiamo ora la derivabilità di g in 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)^2 \log |x - 2|}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)^2 (x - 2)^2 \log |x - 2|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)^2 (x - 2) \log |x - 2| = 0. \end{aligned}$$

Di conseguenza g è derivabile in \mathbb{R} e

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx} (x^2 - 4)^2 \log(2 - x) & , \quad x < 2 \\ 0 & , \quad x = 2 \\ \frac{d}{dx} (x^2 - 4)^2 \log(x - 2) & , \quad x > 2 \end{cases}$$

cioè

$$g'(x) = \begin{cases} 4x(x^2 - 4) \log(2 - x) - (x^2 - 4)^2 (2 - x)^{-1} & , \quad x < 2 \\ 0 & , \quad x = 2 \\ 4x(x^2 - 4) \log(x - 2) + (x^2 - 4)^2 (x - 2)^{-1} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

che possiamo scrivere come

$$g'(x) = \begin{cases} (x^2 - 4)[4x \log(2 - x) + x + 2] & , \quad x < 2 \\ 0 & , \quad x = 2 \\ (x^2 - 4)[4x \log(x - 2) + x + 2] & , \quad x > 2. \end{cases}$$

È ovvio che $g' \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{2\})$, quindi verifichiamo soltanto la continuità di g' in 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 4)[4x \log(2 - x) + x + 2] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 4x(x^2 - 4) \log(2 - x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 4)(x + 2) = 0 = g'(2), \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4)[4x \log(x - 2) + x + 2] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 4x(x^2 - 4) \log(x - 2) + \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4)(x + 2) = 0 = g'(2). \end{aligned}$$

Perciò $g' \in C^0(\mathbb{R})$; vediamo se g' è derivabile in 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g'(x) - g'(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2 - 4)[4x \log(2 - x) + x + 2]}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2)[4x \log(2 - x) + x + 2] = -\infty. \end{aligned}$$

Ne segue che g' non è derivabile in 2 e quindi g non è derivabile due volte in 2: non è allora possibile scrivere la formula richiesta. ■

Esercizio 5.8. Scrivere la formula di Mac Laurin delle seguenti funzioni in modo che il loro valore nei punti indicati sia determinato a meno di un errore di 10^{-3} :

$$(1) f(x) = \cos^2 x - \arctan x \quad \text{in } x = \frac{1}{4},$$

$$(2) g(x) = \frac{x+1}{(x+2)^{1/2}} \quad \text{in } x = \frac{1}{\pi}.$$

■ *Soluzione di (2).* Per la $g(x) = (x+1)(2+x)^{-1/2}$ si ha:

$$\begin{aligned} (x+1)(2+x)^{-1/2} &= 2^{-1/2}(x+1) \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{2^{1/2}} \left[x \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-1/2} \right]. \end{aligned}$$

Posto $t = \frac{x}{2}$ è

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-1/2} &= (1+t)^{-1/2} = \sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} t^k + R_n(y, 0) = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} \frac{x^k}{2^k} + R_n\left(\frac{x}{2}; 0\right) \end{aligned}$$

dove

$$R_n\left(\frac{x}{2}; 0\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \binom{-1/2}{n+1} (1+\xi)^{-n-3/2} x^{n+1}, \quad 0 < \xi < \frac{x}{2}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} (x+1)(2+x)^{-1/2} &= \frac{1}{2^{1/2}} \left[\sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} \frac{x^{k+1}}{2^k} + x R_n\left(\frac{x}{2}; 0\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} \frac{x^k}{2^k} + R_n\left(\frac{x}{2}; 0\right) \right] \end{aligned}$$

dove

$$\sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} \frac{x^{k+1}}{2^k} = \sum_{k=1}^n \binom{-1/2}{k-1} \frac{x^k}{2^{k-1}} + \binom{-1/2}{n+1} \frac{x^{n+1}}{2^n},$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} \frac{x^k}{2^k} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{-1/2}{k} \frac{x^k}{2^k}$$

e poiché $R_n(\frac{x}{2}; 0) = O(x^{n+1})$, $xR_n(\frac{x}{2}; 0) = O(x^{n+2})$ si ha⁹

$$\begin{aligned} (x+1)(2+x)^{-1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^n \left[2 \binom{-1/2}{k-1} + \binom{-1/2}{k} \right] \frac{x^k}{2^k} + \right. \\ &\quad \left. + \binom{-1/2}{n+1} \frac{x^{n+1}}{2^n} + \binom{-1/2}{n+1} (1+\xi)^{-3/2-n} \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k \sqrt{2}} \left[2 \binom{-1/2}{k-1} + \binom{-1/2}{k} \right] x^k + \\ &\quad + \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{2}} \binom{-1/2}{n+1} [2 + (1+\xi)^{-3/2-n}] x^{n+1}. \end{aligned}$$

Risulta allora che il resto n -simo della formula di Mac Laurin di $g(x)$ è

$$R_n(x; 0) = \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{2}} \binom{-1/2}{n+1} [2 + (1+\xi)^{-n-3/2}] x^{n+1} \quad , \quad 0 < \xi < \frac{x}{2} ;$$

si vuole che

$$\left| R_n \left(\frac{1}{\pi}; 0 \right) \right| \leq 10^{-3}$$

cioè

$$\frac{1}{2^{n+1} \sqrt{2}} [2 + (1+\xi)^{-n-3/2}] \left| \binom{-1/2}{n+1} \right| \frac{1}{\pi^{n+1}} \leq \frac{1}{10^3} .$$

per $0 < \xi < \frac{1}{2\pi}$. Poiché $(1+\xi)^{-n-3/2} < 1$ allora $2 + (1+\xi)^{-n-3/2} < 3$, inoltre $\frac{1}{\pi^{n+1}} < \frac{1}{3^{n+1}}$.

Perciò basterà scegliere n in modo che sia

$$\frac{1}{2^{n+1} \sqrt{2} 3^n} \left| \binom{-1/2}{n+1} \right| < \frac{1}{10^3} .$$

Siccome

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{n+1} &= \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n \right)}{(n+1)!} = (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2^{n+1} (n+1)!} = \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1} (n+1)!} \end{aligned}$$

allora basta scegliere $n \in \mathbb{N}$ in modo che sia

$$\frac{(2n+1)!!}{\sqrt{2} 2^{2n+2} 3^n (n+1)!} \leq \frac{1}{10^3} . \quad \blacksquare$$

⁹Infatti per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{k-1} + \binom{\alpha}{k} &= \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots [\alpha - (k-2)]}{(k-1)!} + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots [\alpha - (k-1)]}{k!} = \\ &= \alpha(\alpha-1) \cdots [\alpha - (k-2)] \left[\frac{1}{(k-1)!} + \frac{\alpha - (k-1)}{k!} \right] = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha - k + 2) \left(\frac{k + \alpha - k + 1}{k!} \right) = \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha - k + 2)}{k!} = \binom{\alpha+1}{k} . \end{aligned}$$

Esercizio 5.9. Determinare la formula di Mac Laurin delle seguenti funzioni in modo che il loro valore nei punti indicati sia dato a meno di un errore non superiore a 10^{-4} :

$$(1) f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \arctan x \quad \text{in } x = \frac{2}{3},$$

$$(2) g(x) = 2 \sin^2 x - \sinh x \quad \text{in } x = \frac{1}{2},$$

$$(3) h(x) = \cos^2 x + 2 \cosh x \quad \text{in } x = \frac{1}{6}.$$

■ *Soluzione di (2).* La funzione $\varphi(x) = \sin^2 x$ è C^∞ su \mathbb{R} e

$$\varphi'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \implies \varphi'(0) = 0$$

$$\varphi''(x) = 2 \cos 2x \implies \varphi''(0) = 2$$

$$\varphi^{(3)}(x) = -2^2 \sin 2x \implies \varphi^{(3)}(0) = 0$$

$$\varphi^{(4)}(x) = -2^3 \cos 2x \implies \varphi^{(4)}(0) = -2^3$$

$$\varphi^{(5)}(x) = 2^4 \sin 2x \implies \varphi^{(5)}(0) = 0$$

$$\varphi^{(6)}(x) = 2^5 \cos 2x \implies \varphi^{(6)}(0) = 2^5$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \quad \vdots$$

da cui facilmente si ricava

$$\varphi^{(2k)}(x) = (-1)^{k+1} 2^{2k-1} \cos 2x \implies \varphi^{(2k)}(0) = (-1)^{k+1} 2^{2k-1}$$

$$\varphi^{(2k+1)}(x) = (-1)^k 2^{2k} \sin 2x \implies \varphi^{(2k+1)}(0) = 0.$$

Si ha allora la formula di Mac Laurin

$$\sin^2 x = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k} + R_{2n+1, \varphi}(x; 0).$$

Per la funzione $\psi(x) = \sinh x$ si ha

$$\psi^{(2k)}(x) = \sinh x \implies \psi^{(2k)}(0) = 0$$

$$\psi^{(2k+1)}(x) = \cosh x \implies \psi^{(2k+1)}(0) = 1$$

quindi

$$\sinh x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+2, \psi}(x; 0).$$

Pertanto per $g(x)$ si ha

$$2 \sin^2 x - \sinh x = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \frac{2^{2k} x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + 2R_{2n+1, \varphi}(x; 0)$$

dove

$$\begin{aligned} |2R_{2n+1, \varphi}(x; 0)| &= \left| 2 \frac{\varphi^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| = \left| 2 \frac{2^{2(n+1)-1} \cos 2\xi}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| = \\ &= \left| \frac{2^{2n+2} \cos 2\xi}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \leq \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} |x|^{2n+2}. \end{aligned}$$

Siccome in $x = \frac{1}{2}$ deve essere $\left| 2R_{2n+1,\varphi}\left(\frac{1}{2}; 0\right) \right| \leq 10^{-4}$, si ha

$$\left| 2R_{2n+1,\varphi}\left(\frac{1}{2}; 0\right) \right| \leq \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{1}{2^{2n+2}} = \frac{1}{(2n+2)!},$$

basta scegliere $n \in \mathbb{N}$ in modo che sia $(2n+2)! \geq 10^4$, e.g. $n = 6$. ■

Esercizio 5.10. *Determinare la formula di Mac Laurin del III ordine con la rappresentazione dell'errore nella forma di Cauchy per le seguenti funzioni:*

$$(1) f(x) = (2 + 2x)^{-1/3} \quad , \quad (2) g(x) = \frac{x^2 - 3x}{2x + x^2}.$$

Esercizio 5.11. *Determinare la formula di Mac Laurin del III ordine con la rappresentazione dell'errore nella forma di Lagrange per le seguenti funzioni:*

$$(1) h(x) = \tan^2 x - 3x^2 \quad , \quad (2) k(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - x}.$$

Esercizio 5.12. *Scrivere la formula di Mac Laurin e di Taylor in $x = 3$ del IV ordine con il resto in forma integrale della funzione*

$$\ell(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x - 3}.$$

6. ESERCIZI SUI NUMERI COMPLESSI

Esercizio 6.1. Verificare che per ogni $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il numero complesso

$$(a + bi)e^{\alpha - \beta i} + (a - bi)e^{\alpha + \beta i}$$

è reale.

Esercizio 6.2. Provare che se $z, w \in \mathbb{C}$ sono tali che $|z + w| = |z - w|$ allora $\arg z = \frac{\pi}{2} + \arg w$.

Esercizio 6.3. Che relazione intercorre tra z e $w \in \mathbb{C}$ affinché sia

$$\operatorname{Arg} \frac{z + w}{z - w} = \frac{\pi}{2}?$$

Esercizio 6.4. Determinare la forma algebrica e polare dei seguenti numeri complessi

$$(1) (2 - 2i)^4 \quad , \quad (2) \left(\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \right)^3 .$$

Esercizio 6.5. Determinare la forma polare e algebrica dei numeri complessi

$$(1) (32i)^{1/5} \quad , \quad (2) 1^{1/6} .$$

Esercizio 6.6. Determinare la forma polare di

$$(1) \sqrt[4]{-4 - 4\sqrt{3}i} \quad , \quad (2) \sqrt[3]{\frac{(1 - i)^5}{1 + i}} .$$

Esercizio 6.7. Determinare la forma algebrica dei numeri complessi

$$(1) \left(\frac{(i - 1)^4}{i} \right)^{1/3} \quad , \quad (2) \left[(\sqrt{3} + 7i)(\sqrt{3} + i) \right]^{1/4} .$$

Esercizio 6.8. Sia $t = \sqrt{3} + 7i$, $w = \sqrt{3} + i$ e $z = -2i$. Determinare la forma algebrica e polare di

$$t + \frac{zw}{z + w} .$$

Esercizio 6.9. Determinare la forma algebrica e polare dei seguenti numeri complessi

$$(1) \frac{i - \sqrt{3}}{(1 - i)^7} \quad , \quad (2) \frac{1 + \sqrt{3}i}{(-\sqrt{3} - i)^{10}} .$$

Esercizio 6.10. In \mathbb{C} risolvere le seguenti equazioni

$$(1) (1 + i)^3 z^4 = 1 \quad , \quad (2) z^3 + 64 = 0 .$$

Esercizio 6.11. In \mathbb{C} risolvere le seguenti equazioni

$$(1) |z|^2 + \sqrt{3}(\operatorname{Im} z)i = 4 - 3i \quad , \quad (2) |z - \sqrt{2}| = \begin{cases} |z - \sqrt{6}| \\ |z + \sqrt{6}| \end{cases} .$$

Esercizio 6.12. In \mathbb{R}^2 determinare i seguenti insiemi:

$$(1); \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 4\} \quad , \quad (2) \{z \in \mathbb{C} : \text{Arg } z = \frac{3}{4}\pi\} ,$$

$$(3) \{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 4\} \quad , \quad (4) \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = \frac{1}{2}|(2\Im z + 1)i|\} .$$

Esercizio 6.13. Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui

- (1) l'equazione $\lambda z^2 - 2z + 1 = 0$ ha radici complesse coniugate di modulo 1
 (2) l'equazione $\lambda z^2 - 2z + 1 = 0$ ha radici complesse coniugate di modulo $\frac{1}{2}$
 (3) l'equazione $z^4 - 2\lambda z^2 + 4 = 0$ non ha radici reali.

Esercizio 6.14. Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{C}$ affinché siano risolvibili i seguenti sistemi lineari

$$(1) \begin{cases} \lambda^2 x - y = 0 \\ |\lambda|x + y - 1 - \lambda^2 = 0 \end{cases} \quad , \quad (2) \begin{cases} \lambda^2 x + y = 1 + \lambda^2 \\ x + \lambda^2 y = \lambda(1 + \lambda^2) \end{cases} .$$

Esercizio 6.15. Risolvere in \mathbb{C} le seguenti equazioni

$$(1) z^4 - 2iz^2 - 1 - (1+i)^2 = 0 \quad , \quad (2) z^6 + z^3 + 1 = 0 ,$$

$$(3) 2z^6 + 2z^3 + 1 = 0 .$$

Esercizio 6.16. Determinare la forma algebrica dei numeri complessi

$$\frac{5-i}{2-i} \quad , \quad \frac{4-2i}{3-4i} \quad , \quad \overline{2+3i + (2+3i)(1-3i)} .$$

Esercizio 6.17. Trovare $z \in \mathbb{C}$ tale che sommato al doppio del suo coniugato dia $5 - 3i$.

Esercizio 6.18. Rappresentare in forma polare i numeri complessi 3 , $\sqrt{2}$, $4 + 4i$, $\sqrt[6]{-1}$, $1^{1/6}$, $(-1)^{1/3}$, $\sqrt[3]{-i}$, $i^{-1/3}$.

Esercizio 6.19. In \mathbb{C} risolvere le equazioni

$$z^2 + 2z + i = 0 \quad , \quad z|z| - 2z - 1 = 0 \quad , \quad z^2 + z\bar{z} = 1 + 2i \quad , \quad z^3 - 6z + 4 = 0 .$$

Esercizio 6.20. Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui tutte le soluzioni dell'equazione $z^4 - 2z^2 + \lambda = 0$ non siano reali.

■ **Soluzione.** Poniamo $w = z^2 \in \mathbb{C}$, quindi l'equazione diventa $w^2 - 2w + \lambda = 0$. Poiché¹⁰

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{4 - 4\lambda}{4} = 1 - \lambda \in \mathbb{R}$$

¹⁰Se $az^2 + bz + c = 0$, per $a, b, c \in \mathbb{C}$, allora le sue soluzioni sono

$$z = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{per } r = \left| \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right| , \quad \theta = \text{Arg} \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) .$$

le soluzioni dell'equazione sono

$$w = 1 \pm \sqrt{|1-\lambda|} \left(\cos \frac{\text{Arg}(1-\lambda)}{2} + i \sin \frac{\text{Arg}(1-\lambda)}{2} \right)$$

dove in tal caso $|1-\lambda|$ è il valore assoluto del numero reale $1-\lambda$ e $\text{Arg}(1-\lambda) = 0$ se $1-\lambda \geq 0$ e $\text{Arg}(1-\lambda) = \pi$ se $1-\lambda < 0$. Per $\lambda = 1$ è $w = 1$ e pertanto l'equazione $z^4 - 2z^2 + \lambda = 0$ ha le due soluzioni reali (ciascuna di molteplicità due) $z = \pm 1$. Se $1-\lambda > 0$ (i.e. $\lambda < 1$) allora $w = 1 \pm \sqrt{1-\lambda} \in \mathbb{R}$, di conseguenza l'equazione $z^4 - 2z^2 + \lambda = 0$ ha tutte radici non reali se $1 \pm \sqrt{1-\lambda} < 0$ ovvero se in contemporanea è $\sqrt{1-\lambda} < -1$ e $\sqrt{1-\lambda} > 1$. Poiché la prima è falsa, nel caso $\lambda < 1$ l'equazione $z^4 - 2z^2 + \lambda = 0$ ha almeno una soluzione reale. Infine se $1-\lambda < 0$ (i.e. $\lambda > 1$) allora $w = 1 \pm \sqrt{\lambda-1} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 1 \pm i\sqrt{\lambda-1}$ e le soluzioni dell'equazione dell'esercizio sono tutte complesse, date da $z_0, \bar{z}_0, -z_0, -\bar{z}_0$ per $z_0 = \sqrt{\lambda}(\cos \theta + i \sin \theta)$ con $\theta = \frac{\arctan \sqrt{\lambda-1}}{2}$.

In conclusione l'equazione $z^4 - 2z^2 + \lambda = 0$, per $\lambda \in \mathbb{R}$, ha tutte soluzioni non reali per $\lambda > 1$. ■

Osservazione 6.1. È noto che per $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad , \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

da cui si ricava

$$(6.1) \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} .$$

I secondi membri della (6.1) hanno senso anche per $z \in \mathbb{C}$, quindi definiamo il *coseno* e il *seno* di un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ come

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} .$$

Esercizio 6.21. Verificare che per $z \in \mathbb{C}$

- (1) $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$, $\sin(z + 2k\pi) = \sin z$, $\forall k \in \mathbb{Z}$;
- (2) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$;
- (3) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$, $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$;
- (4) $\cos \frac{z}{2} = \left(\frac{1 + \cos z}{2} \right)^{1/2}$, $\sin \frac{z}{2} = \left(\frac{1 - \cos z}{2} \right)^{1/2}$.

■ *Soluzione di (1).* Si ha

$$\begin{aligned} \cos(z + 2k\pi) &= \frac{e^{i(z+2k\pi)} + e^{-i(z+2k\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} e^{i2k\pi} + e^{-iz} e^{-i2k\pi}}{2} = \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z , \\ \sin(z + 2k\pi) &= \frac{e^{i(z+2k\pi)} - e^{-i(z+2k\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz} e^{i2k\pi} - e^{-iz} e^{-i2k\pi}}{2i} = \\ &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z . \end{aligned}$$

Soluzione di (2). Si ha

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \sin^2 z &= \frac{1}{4} \left[(e^{iz} + e^{-iz})^2 - (e^{iz} - e^{-iz})^2 \right] = \\ &= \frac{1}{4} [e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - (e^{2iz} - 2 + e^{-2iz})] = \\ &= \frac{1}{4} (e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}) = 1.\end{aligned}$$

Soluzione di (3). Si ha

$$\begin{aligned}\cos^2 z - \sin^2 z &= \frac{(e^{iz} + e^{-iz})^2}{4} - \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^2}{4} = \\ &= \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - (e^{2iz} - 2 + e^{-2iz})}{4} = \\ &= \frac{2e^{2iz} + 2e^{-2iz}}{4} = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2} = \cos 2z, \\ 2 \sin z \cos z &= 2 \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} = \sin 2z.\end{aligned}$$

Soluzione di (4). Si ha

$$\begin{aligned}\frac{1 + \cos z}{2} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) = \frac{2 + e^{iz} + e^{-iz}}{4} = \\ &= \frac{2 + e^{2iz/2} + e^{-2iz/2}}{4} = \frac{(e^{iz/2} + e^{-iz/2})^2}{4} = \cos^2 \frac{z}{2}, \\ \frac{1 - \cos z}{2} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) = \frac{2 - e^{iz} - e^{-iz}}{4} = \frac{2 - e^{2iz/2} - e^{-2iz/2}}{4} = \\ &= -\frac{(e^{iz/2} - e^{-iz/2})^2}{4} = \sin^2 \frac{z}{2}\end{aligned}$$

di conseguenza

$$\cos \frac{z}{2} = \left(\frac{1 + \cos z}{2} \right)^{1/2}, \quad \sin \frac{z}{2} = \left(\frac{1 - \cos z}{2} \right)^{1/2}.$$

■

7. ESERCIZI SUGLI INTEGRALI INDEFINITI

Premettiamo una breve ricapitolazione delle sostituzioni da fare in alcuni tipi di integrali classici.

Integrazione di funzioni razionali fratte

- Si consideri l'integrale

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

dove $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. La sostituzione

$$t = \frac{2ax + b}{2Aa}$$

permette di scrivere

$$I = \int \frac{A dt}{aA^2(t^2 + 1)} = \frac{1}{aA} \arctan t + C$$

ovvero

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} \right) + C .$$

- Si consideri l'integrale

$$I = \int \frac{p(x)}{q(x)} dx \quad , \quad p(x), q(x) \text{ polinomi in } x .$$

(i) $\text{gr}(p(x)) < \text{gr}(q(x))$,

$$q(x) = a(x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_h)^{m_h} (a_1x^2 + b_1x + c_1)^{n_1} \cdots (a_kx^2 + b_kx + c_k)^{n_k} ,$$

con $\Delta_j = b_j^2 - 4a_jc_j < 0$, $1 \leq j \leq k$, si decompone

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \sum_{i=1}^h \frac{A_i}{x - x_i} + \sum_{j=1}^k \left[\frac{B_j}{a_jx^2 + b_jx + c_j} + \frac{C_j(2a_jx + b_j)}{a_jx^2 + b_jx + c_j} \right] + \\ &+ \frac{d}{dx} \left(\frac{s(x)}{\prod_{i=1}^h (x - x_i)^{m_i-1} \prod_{j=1}^k (a_jx^2 + b_jx + c_j)^{n_j-1}} \right) . \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^h A_i \log |x - x_i| + \sum_{j=1}^k \frac{2B_j}{\sqrt{-\Delta_j}} \arctan \left(\frac{2a_jx + b_j}{\sqrt{-\Delta_j}} \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^k C_j \log(a_jx^2 + b_jx + c_j) + \\ &+ \frac{s(x)}{\prod_{i=1}^h (x - x_i)^{m_i-1} \prod_{j=1}^k (a_jx^2 + b_jx + c_j)^{n_j-1}} + C . \end{aligned}$$

(ii) $\text{gr}(p(x)) \geq \text{gr}(q(x))$: si esegue la divisione tra $p(x)$ e $q(x)$ ottenendo

$$p(x) = m(x)q(x) + r(x) \quad , \quad \text{gr}(r(x)) < \text{gr}(q(x))$$

quindi

$$I = \int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int m(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx$$

e l'integrale $\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$ si risolve come in (i).

Integrali trigonometrici

- Si consideri l'integrale

$$I = \int R(\cos x, \sin x) dx ;$$

la sostituzione

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

dà

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2} .$$

Queste riconducono l'integrale dato all'integrale di una funzione razionale fratta.

Integrali abeliani

- Si consideri l'integrale

$$I = \int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx$$

con la sostituzione

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

ci si riconduce ad un integrale di una funzione razionale fratta.

- Si consideri l'integrale

$$I = \int R(x, \sqrt{x^2+a}) dx$$

con la sostituzione

$$(t+x)^2 = x^2 + a \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

ci si riconduce all'integrale di una funzione razionale fratta

- Si consideri l'integrale

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx .$$

Se $a > 0$ si considera la sostituzione

$$t = \frac{2ax + b}{2\sqrt{a}} .$$

Se $a < 0$ si considera la sostituzione

$$t = \frac{-2ax - b}{\sqrt{\Delta}} .$$

In ogni caso si è ricondotti all'integrale di una funzione razionale fratta.

Integrale differenziale binomio

- Si consideri l'integrale

$$(7.1) \quad I_{m,n,p} = \int x^m (a + bx^n)^p dx$$

con $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Questo è risolubile se almeno uno tra p , $\frac{m+1}{n}$, $p + \frac{m+1}{n}$ è intero. Le sostituzioni da fare sono:

- Se $p \in \mathbb{Z}$ si considera la sostituzione

$$t = x^{1/s_1 s_2} \quad \text{per } m = \frac{r_1}{s_1}, \quad n = \frac{r_2}{s_2}.$$

- Se $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, scritto $p = \frac{r}{s}$, si considerano due casi:

- (i) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$: si prende

$$t = (a + bx^n)^{1/s},$$

- (ii) $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$: si prende

$$t = x^n, \quad u = \left(\frac{a + bt}{t} \right)^{1/s}.$$

In ogni caso si è ricondotti all'integrale di una funzione razionale fratta.

Esercizi

Esercizio 7.1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$(1) \int \sinh x dx, \quad (2) \int \cosh x dx.$$

- *Soluzione di (1).* L'integrale è immediato e

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C.$$

Soluzione di (2). Come per (1),

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C.$$

■

Esercizio 7.2. Calcolare i seguenti integrali:

$$(1) \int x^{4/5} dx, \quad (2) \int x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx.$$

Esercizio 7.3. *Calcolare i seguenti integrali*

$$(1) \int x\sqrt{6+x^2} dx \quad , \quad (2) \int (x+1)(x^2+2x-5)^{6/7} dx .$$

Esercizio 7.4. *Calcolare*

$$(1) \int \sin^3 x \cos^4 x dx \quad , \quad (2) \int x^4 \log x dx .$$

Esercizio 7.5. *Calcolare*

$$(1) \int \sin \log x dx \quad , \quad (2) \int \arcsin x dx .$$

Esercizio 7.6. *Calcolare i seguenti integrali*

$$(1) \int \arccos x dx \quad , \quad (2) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx .$$

Esercizio 7.7. *Calcolare i seguenti integrali*

$$(1) \int \frac{6}{x^{-4/5}} dx \quad , \quad (2) \int 4 \sinh x dx .$$

Esercizio 7.8. *Calcolare*

$$(1) \int \frac{3x}{x^2-3x+2} dx \quad , \quad (2) \int \frac{2x+1}{x^2-3x+3} dx .$$

Esercizio 7.9. *Calcolare*

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad , \quad (2) \int \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} dx .$$

Esercizio 7.10. *Calcolare*

$$(1) \int \frac{1}{e^{-x/3}} dx \quad , \quad (2) \int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx .$$

Esercizio 7.11. *Calcolare gli integrali*

$$(1) \int (3x+1)^{2/3} dx \quad , \quad (2) \int (4x-9)^5 dx .$$

Esercizio 7.12. *Calcolare gli integrali*

$$(1) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \quad , \quad (2) \int \frac{5}{\cos^2 x} dx .$$

Esercizio 7.13. *Calcolare gli integrali*

$$(1) \int \frac{3}{\sin x} dx \quad , \quad (2) \int \frac{3}{\cos x} dx .$$

Esercizio 7.14. *Calcolare i seguenti integrali*

$$(1) \int \frac{\sqrt{\pi}}{1 + \tan^2 x} dx \quad , \quad (2) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} dx .$$

Esercizio 7.15. *Calcolare*

$$(1) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad , \quad (2) \int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}} dx .$$

Esercizio 7.16. *Risolvere i seguenti integrali:*

$$(1) \int \frac{\arcsin^{-4/7} x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad , \quad (2) \int \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx .$$

Esercizio 7.17. *Risolvere gli integrali:*

$$(1) \int \frac{2 + \sin x}{(\sin x - \cos x)^3} dx \quad , \quad (2) \int x^4 \sin x dx .$$

Esercizio 7.18. *Risolvere*

$$(1) \int e^{4x} \cos x dx \quad , \quad (2) \int \sqrt{x} \log x dx .$$

Esercizio 7.19. *Risolvere gli integrali:*

$$(1) \int \frac{x^3 + 1}{x^3 + 3x^2 - 4} dx \quad , \quad (2) \int \frac{x^3 - 1}{x^3 + 3x^2 - 4} dx .$$

Esercizio 7.20. *Risolvere gli integrali*

$$(1) \int \frac{x^2 + x + 1}{(2x + 3)^2(3x - 1)} dx \quad , \quad (2) \int \frac{4x - 3}{(2x^2 - 3x + 2)^3} dx .$$

Esercizio 7.21. *Risolvere*

$$(1) \int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{(2x^2 - 3x + 2)^2} dx \quad , \quad (2) \int \frac{\tan x}{1 - \sin x} dx .$$

Esercizio 7.22. *Calcolare gli integrali*

$$(1) \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx \quad , \quad (2) \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx .$$

Esercizio 7.23. *Calcolare gli integrali*

$$(1) \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx \quad , \quad (2) \int \sqrt{a - x^2} dx \quad , \quad a > 0 .$$

Esercizio 7.24. *Trovare le formule iterative per*

$$I_n = \int \sin^n x dx \quad , \quad J_n = \int \cos^n x dx ,$$

dove $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 7.25. *Trovare le formule iterative per*

$$I_n = \int e^x \sin^n x \, dx \quad , \quad J_n = \int e^x \cos^n x \, dx \quad ,$$

dove $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Esercizio 7.26. *Determinare, in funzione di $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la soluzione dell'integrale*

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx \quad .$$

Esercizio 7.27. *Calcolare i seguenti integrali:*

$$(1) \int \frac{x^3}{(x^4 + 1)^2} \, dx \quad , \quad (2) \int \frac{x^3 - 1}{(x^4 + 1)^2} \, dx \quad .$$

Esercizio 7.28. *Calcolare:*

$$(1) \int \frac{x^2 + x - 1}{(2x + 1)^2(x^2 + 2x + 2)} \, dx \quad , \quad (2) \int \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}} \quad .$$

Esercizio 7.29. *Calcolare*

$$(1) \int \sqrt{x^2 + 5} \, dx \quad , \quad (2) \int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 2}} \, dx \quad .$$

Esercizio 7.30. *Calcolare*

$$(1) \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 11}} \, dx \quad , \quad (2) \int \frac{x - 1}{1 - \sqrt{x^2 - 3x + 2}} \, dx \quad .$$

Esercizio 7.31. *Risolvere gli integrali*

$$(1) \int \sqrt{-x^2 + x - 1} \, dx \quad , \quad (2) \int \sqrt{-x^2 + x + 1} \, dx \quad ,$$

$$(3) \int (x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 3} \, dx \quad .$$

Esercizio 7.32. *Trovare la formula iterativa per*

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^n} \quad ,$$

per $n \in \mathbb{N}$.

■ *Soluzione.* Si ha

$$\text{per } n = 0 \quad , \quad I_0 = \int dx = x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{per } n = 1 \quad , \quad I_1 = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \log \sqrt{\left| \frac{x - 1}{x + 1} \right|} + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

perché

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1} \quad \implies \quad A_1 = -A_2 = \frac{1}{2} \quad .$$

Sia $n \geq 2$ e decomponiamo

$$(7.2) \quad \frac{1}{(x^2 - 1)^n} = \frac{1 - x^2 + x^2}{(x^2 - 1)^n} = \frac{x^2}{(x^2 - 1)^n} - \frac{1}{(x^2 - 1)^{n-1}}$$

dove

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2 - 1)^n} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2 - 1)^n} x dx = \\ &\stackrel{\text{per parti}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{(x^2 - 1)^{-n+1}}{1 - n} x - \frac{1}{1 - n} \int (x^2 - 1)^{-n+1} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2 - 2n} \frac{x}{(x^2 - 1)^{n-1}} - \frac{1}{2 - 2n} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Allora integrando la (7.2) si ottiene

$$I_n = \frac{1}{2 - 2n} \frac{x}{(x^2 - 1)^{n-1}} - \frac{1}{2 - 2n} I_{n-1} - I_{n-1}$$

ovvero la formula iterativa

$$(7.3) \quad I_n = \frac{1}{2 - 2n} \frac{x}{(x^2 - 1)^{n-1}} - \frac{3 - 2n}{2 - 2n} I_{n-1}.$$

■

Esercizio 7.33. *Trovare la formula iterativa per*

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n},$$

per $n \in \mathbb{N}$.

■ *Soluzione.* Si ha

$$\begin{aligned} \text{per } n = 0 &, J_0 = \int dx = x + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ \text{per } n = 1 &, J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sia $n \geq 2$ e decomponiamo

$$(7.4) \quad \frac{1}{(x^2 + 1)^n} = \frac{1 + x^2 - x^2}{(x^2 + 1)^n} = \frac{1}{(x^2 + 1)^{n-1}} - \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n}$$

dove

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^n} x dx = \\ &\stackrel{\text{per parti}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{(x^2 + 1)^{-n+1}}{1 - n} x - \frac{1}{1 - n} \int (x^2 + 1)^{-n+1} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2 - 2n} \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} - \frac{1}{2 - 2n} J_{n-1}. \end{aligned}$$

Allora integrando la (7.4) si ottiene

$$J_n = J_{n-1} - \frac{1}{2-2n} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2-2n} J_{n-1}$$

ovvero la formula iterativa

$$(7.5) \quad J_n = \frac{3-2n}{2-2n} J_{n-1} - \frac{1}{2-2n} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} .$$

■

Esercizio 7.34. Sia $a \in \mathbb{R}$. Trovare la formula iterativa per

$$I_{a,n} = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} \quad , \quad J_{a,n} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} .$$

■ *Soluzione per $I_{a,n}$.*

$$\begin{aligned} \text{per } n=0 \quad , \quad I_{a,0} &= \int dx = x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \\ \text{per } n=1 \quad , \quad I_{a,1} &= \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

Sia $n \geq 2$, posto $t = \frac{x}{a}$ si ha

$$I_{a,n} = \frac{1}{a^{2n}} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1 \right]^n} = \frac{1}{a^{2n}} \int \frac{a}{(t^2-1)^n} dt = \frac{1}{a^{2n-1}} I_n$$

Applicando allora la formula iterativa (7.3) si ottiene

$$I_{a,n} = \frac{1}{a^{2n-1}} \left(\frac{1}{2-2n} \frac{t}{(t^2-1)^{n-1}} - \frac{3-2n}{2-2n} I_{n-1} \right)$$

ovvero, essendo $I_{a,n-1} = \frac{1}{a^{2n-3}} I_{n-1}$, a conti fatti, si ha la formula iterativa

$$(7.6) \quad I_{a,n} = \frac{1}{(2-2n)a^2} \left[\frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} - (3-2n)I_{a,n-1} \right] .$$

Soluzione per $J_{a,n}$.

$$\begin{aligned} \text{per } n=0 \quad , \quad J_{a,0} &= \int dx = x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \\ \text{per } n=1 \quad , \quad J_{a,1} &= \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

Sia $n \geq 2$, posto $t = \frac{x}{a}$ si ha

$$J_{a,n} = \frac{1}{a^{2n}} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right]^n} = \frac{1}{a^{2n}} \int \frac{a}{(t^2+1)^n} dt = \frac{1}{a^{2n-1}} J_n$$

Applicando allora la formula iterativa (7.5) si ottiene

$$J_{a,n} = \frac{1}{a^{2n-1}} \left(\frac{3-2n}{2-2n} J_{n-1} - \frac{1}{2-2n} \frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} \right)$$

ovvero, essendo $J_{a,n-1} = \frac{1}{a^{2n-3}} J_{n-1}$, a conti fatti, si ha la formula iterativa

$$(7.7) \quad J_{a,n} = \frac{1}{(2-2n)a^2} \left[(3-2n)J_{a,n-1} - \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} \right].$$

■

Esercizio 7.35. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Trovare la formula iterativa per

$$K_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

■ *Soluzione.* Sia $t = 2ax + b$, allora

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = \\ &= \frac{1}{4a} [(2ax + b)^2 - \Delta] = \frac{1}{2^2 a} (t^2 - \Delta). \end{aligned}$$

Pertanto integrando per sostituzione si ha:

$$K_n = 2^{2n-1} a^{n-1} \int \frac{dt}{(t^2 - \Delta)^n}.$$

Se $\Delta > 0$, posto $\Delta = A^2$ si ottiene

$$K_n = 2^{2n-1} a^{n-1} I_{A,n} \quad \Longrightarrow \quad I_{A,n} = \frac{1}{2^{2n-1} a^{n-1}} K_n$$

che dalla (7.6) dà

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{2^{2n-1} a^{n-1}}{(2-2n)A^2} \left[\frac{t}{(t^2 - A^2)^{n-1}} - (3-2n)I_{A,n-1} \right] = \\ &= \frac{2^{2n-1} a^{n-1}}{(2-2n)\Delta} \left[\frac{2ax + b}{[(2ax + b)^2 - \Delta]^{n-1}} - \frac{3-2n}{2^{2n-3} a^{n-2}} K_{n-1} \right] \end{aligned}$$

ovvero, essendo $(2ax + b)^2 - \Delta = 4a(ax^2 + bx + c)$, si ha la formula iterativa

$$(7.8) \quad K_n = \frac{1}{(1-n)\Delta} \left[\frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} - 2a(3-2n) K_{n-1} \right].$$

Se invece $\Delta < 0$, posto $\Delta = -A^2$ si ottiene

$$K_n = 2^{2n-1} a^{n-1} J_{A,n} \quad \Longrightarrow \quad J_{A,n} = \frac{1}{2^{2n-1} a^{n-1}} K_n$$

che dalla (7.7) dà

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{2^{2n-1} a^{n-1}}{(2-2n)A^2} \left[(3-2n)J_{A,n-1} - \frac{t}{(t^2 + A^2)^{n-1}} \right] = \\ &= -\frac{2^{2n-1} a^{n-1}}{(2-2n)\Delta} \left[\frac{3-2n}{2^{2n-3} a^{n-2}} K_{n-1} - \frac{2ax + b}{[(2ax + b)^2 - \Delta]^{n-1}} \right] \end{aligned}$$

ovvero (essendo sempre $(2ax + b)^2 - \Delta = 4a(ax^2 + bx + c)$), si ha la formula iterativa

$$(7.9) \quad K_n = \frac{1}{(1-n)\Delta} \left[\frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} - 2a(3-2n) K_{n-1} \right].$$

Si osservi che la (7.8) e la (7.9) sono la stessa formula. ■

Esercizio 7.36. *Calcolare i seguenti integrali*

$$(1) \int \frac{x^2}{(x^2 - 3)^3} dx \quad , \quad (2) \int \frac{x + 1}{(x^2 + 2)^4} dx .$$

Esercizio 7.37. *Calcolare*

$$(1) \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} \quad , \quad (2) \int \frac{x^2}{(x^2 - 3)^{3/2}} dx .$$

Esercizio 7.38. *Calcolare*

$$(1) \int x^2(x^2 - 3)^{3/2} dx \quad , \quad (2) \int \frac{x^5}{\sqrt{x^3 + 6}} dx .$$

Esercizio 7.39. *Calcolare i seguenti integrali:*

$$(1) \int \frac{x^7}{(3 + 2x)^{1/2}} dx \quad , \quad (2) \int \frac{x^3}{(3 + 2x^5)^{3/2}} dx ,$$

$$(3) \int x^3(3x^2 + 5)^{5/2} dx .$$

8. ESERCIZI SUGLI INTEGRALI GENERALIZZATI

Esercizio 8.1. Verificare l'eventuale convergenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$(1) \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \log x} \quad , \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^3 - \log x)} dx .$$

■ *Soluzione di (1).* Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \frac{1}{x \log x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 , \end{cases}$$

quindi il criterio per la convergenza degli integrali impropri del tipo $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ è inefficace. Usando allora la definizione di questo integrale generalizzato si ha:

$$\begin{aligned} \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \log x} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_3^b \frac{dx}{x \log x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_3^b \frac{1/x}{\log x} dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \log |\log x| \Big|_3^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\log \log b - \log \log 3) = +\infty \end{aligned}$$

quindi l'integrale diverge.

Soluzione di (2). Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x(x^3 - \log x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^4 \left(1 - \frac{\log x}{x}\right)} = 0$$

per cui la funzione integranda è infinitesima per $x \rightarrow +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{x(x^3 - \log x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{x^4 \left(1 - \frac{\log x}{x}\right)} = 0$$

se $0 < \alpha < 4$: in particolare questo vale per $\alpha = 3 > 1$ e, dal criterio della convergenza per gli integrali del tipo $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, l'integrale dato converge. ■

Esercizio 8.2. Verificare la convergenza dei seguenti integrali ed eventualmente calcolarli:

$$(1) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^3} \quad , \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^4 + 1} dx .$$

Esercizio 8.3. Verificare la convergenza di

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+5}{(x^2+3)^2} dx \quad , \quad (2) \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin x}{x} dx .$$

■ *Soluzione di (2).* Poiché la funzione $\sin x$ è limitata (pur non avendo limite per $x \rightarrow -\infty$), si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha \frac{\sin x}{x} &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha \frac{\sin x}{|x|} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^{\alpha-1} \sin x = \begin{cases} \text{non esiste} & \text{se } \alpha \geq 1 \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi il criterio per la convergenza degli integrali impropri del tipo $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ è inefficace. Integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^{-1} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow -\infty} -\frac{\cos x}{x} \Big|_b^{-1} - \int_{-\infty}^{-1} \frac{\cos x}{x^2} dx = \\ &= \cos 1 + \lim_{b \rightarrow -\infty} \frac{\cos b}{b} - \int_{-\infty}^{-1} \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \int_{-\infty}^{-1} \frac{\cos x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Ora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^{\alpha-2} \cos x = 0$$

se $\alpha - 2 < 0$, i.e. per $\alpha < 2$. Scelto allora un qualsiasi valore $1 < \alpha < 2$ (ad esempio $\alpha = \frac{3}{2}$), dal criterio per la convergenza degli integrali impropri del tipo $\int_{-\infty}^a f(x) dx$, l'integrale

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

converge e quindi converge anche l'integrale improprio dato. ■

Esercizio 8.4. Verificare la convergenza di

$$(1) \int_1^{+\infty} \sqrt{x} \sin x^2 dx \quad , \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} .$$

Esercizio 8.5. Verificare la convergenza di

$$(1) \int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \log x} \quad , \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{(2\sqrt{x}+7)^{8/5}} dx .$$

■ *Soluzione di (1).* Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \frac{1}{x^2 \log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{2-\alpha} \log x} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha \leq 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2 . \end{cases}$$

Scelto ad esempio $\alpha = 2 > 1$, dal criterio per la convergenza degli integrali del tipo $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, l'integrale dato converge.

Esercizio 8.6. Verificare la convergenza degli integrali impropri:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2\sqrt{x}+7)^{8/5}} \quad , \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2\sqrt{x}+7)^{8/3}} .$$

Esercizio 8.7. Verificare l'eventuale convergenza degli integrali impropri:

$$(1) \int_{-\infty}^1 \frac{2x-1}{(1-x^5)^4+3} dx \quad , \quad (2) \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(1-x^5)^4+3} .$$

Esercizio 8.8. Quali dei seguenti integrali diverge?

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{x-3}{x^3-\log x} dx \quad , \quad (2) \int_{-\infty}^1 (-1+e^{x^{-1/3}}) dx .$$

■ **Soluzione di (1).** Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x^3-\log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{\log x}{x^3}\right)} = 0$$

quindi la funzione integranda è infinitesima per $x \rightarrow +\infty$ e inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \frac{(x-3)}{x^3-\log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha+1} \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{\log x}{x^3}\right)} = 1$$

se $\alpha + 1 = 3$ ovvero per $\alpha = 2 > 1$. L'integrale converge dal criterio per la convergenza degli integrali impropri del tipo $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Soluzione di (2). Scritto $x^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-1 + e^{x^{-1/3}}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1/\sqrt[3]{x}} - 1) \underset{y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^-} (e^y - 1) = 0$$

per cui la funzione integranda $-1 + e^{x^{-1/3}}$ è infinitesima per $x \rightarrow -\infty$; inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha (e^{x^{-1/3}} - 1) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha (e^{1/\sqrt[3]{x}} - 1) = \\ &= \lim_{y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{|y^3|^\alpha} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{|y|^{3\alpha}} = -1 \end{aligned}$$

se $3\alpha = 1$, ovvero la funzione integranda è infinitesima di ordine $\alpha = \frac{1}{3} < 1$ e questo non permetterebbe di concludere sul comportamento dell'integrale generalizzato dato. Tuttavia, per $x < 0$, è $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} < 0$, perciò $e^{1/\sqrt[3]{x}} < 1$. Dunque la funzione integranda è una funzione infinitesima per $x \rightarrow -\infty$ di ordine < 1 di segno costante (negativo) e pertanto l'integrale diverge. ■

Esercizio 8.9. Calcolare i seguenti integrali impropri

$$(1) \int_5^{+\infty} \frac{dx}{x \log^n x} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad , \quad (2) \int_{-\infty}^0 \frac{3x+1}{x^3+4} dx .$$

Esercizio 8.10. *Calcolare i seguenti integrali*

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}, \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + 3} dx,$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

■ *Soluzione di (2).* L'integrale è generalizzato sia perché l'intervallo di integrazione è superiormente illimitato sia perché la funzione integranda è un infinito per $x \rightarrow 0^+$. Tuttavia è facile provare che la funzione integranda, per $x \rightarrow +\infty$, è infinitesima di ordine superiore ad ogni α , $1 < \alpha < 2$, mentre per $x \rightarrow 0^+$ è un infinito di ordine inferiore ad ogni α , $0 < \alpha < 1$. Quindi l'integrale converge e avremo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + 3} dx &= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\frac{x^2}{3} + 1} dx \stackrel{t=\frac{x}{\sqrt{3}}}{=} \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\log \sqrt{3} t}{t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\log \sqrt{3}}{t^2 + 1} dt + \int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2 + 1} dt \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \log \sqrt{3} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2 + 1} dt. \end{aligned}$$

Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dt}{t^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan t \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}.$$

Per calcolare il secondo integrale poniamo dapprima $s = \arctan t$ da cui $t = \tan s$ e quindi $dt = (1 + \tan^2 s) ds$. Allora

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2 + 1} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \tan s}{\tan^2 s + 1} (1 + \tan^2 s) ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan s ds = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin s ds - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos s ds. \end{aligned}$$

Ora, posto $u = \frac{\pi}{2} - s$, si ha $ds = -du$ e $\cos s = \cos(\frac{\pi}{2} - u) = \sin u$, da cui

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos s ds = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \log \sin u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin u du.$$

Sostituendo si ottiene:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2 + 1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin s ds - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin s ds = 0.$$

In conclusione

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + 3} dx = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi \log \sqrt{3}.$$

Esercizio 8.11. Verificare l'eventuale convergenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx \quad , \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 dx .$$

■ *Soluzione di (1).* Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_{-\infty}^0 \sin x^2 dx + \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = 2 \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$$

perché in ogni caso $x^2 \in [0, +\infty)$. Ora

$$\int \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

avendo considerato la sostituzione $x^2 = t$, quindi

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \right) .$$

Siccome

$$\left| \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$

l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

converge. Si ha poi

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos t}{t^{1/2}} \Big|_1^b - \frac{1}{2} \int_1^b \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos b}{b^{1/2}} + \cos 1 - \frac{1}{2} \int_1^b \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt \right) \end{aligned}$$

dove

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\cos b}{b^{1/2}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt .$$

Poiché

$$\left| \frac{\cos t}{t^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{t^{3/2}}$$

con $\frac{1}{t^{3/2}}$ integrabile in senso generalizzato in $[1, +\infty)$, si ottiene che l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt$$

converge. Pertanto, poiché

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = -\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\cos b}{b^{1/2}} + \cos 1 - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt = \cos 1 - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt ,$$

l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ converge. In conclusione l'integrale (1) converge.

Soluzione di (2). Si risolve come (1) appena svolto.



Esercizio 8.12. Sia $a > 0$. Determinare per quali valori di $u, v > 0$ convergono gli integrali generalizzati

$$(1) \int_a^{+\infty} x^u \sin x^v dx \quad , \quad (2) \int_a^{+\infty} x^u \cos x^v dx .$$

■ *Soluzione di (1).* La funzione integranda $f(x) = x^u \sin x^v$ non ha singolarità in $[a, +\infty)$ per $a > 0$. Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} x^u \sin x^v dx &= -\frac{1}{v} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[(x^{u-v+1} \cos x^v) \Big|_a^b + \frac{u-v+1}{v} \int_a^b \frac{\cos x^v}{x^{v-u}} dx \right] = \\ &= -\frac{1}{v} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(b^{u-v+1} \cos b^v - a^{u-v+1} \cos a^v + \frac{u-v+1}{v} \int_a^b \frac{\cos x^v}{x^{v-u}} dx \right) \end{aligned}$$

dove

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{u-v+1} \cos b^v \begin{cases} \text{non esiste} & \text{se } u-v+1 \geq 0 \\ = 0 & \text{se } u-v+1 < 0 \end{cases}$$

Resta perciò soltanto il caso $u-v+1 < 0$ i.e. $v-u > 1$. Inoltre

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{\cos x^v}{x^{v-u}} dx = \int_a^{+\infty} \frac{\cos x^v}{x^{v-u}} dx$$

dove

$$\left| \frac{\cos x^v}{x^{v-u}} \right| \leq \frac{1}{|x|^{v-u}} \quad , \quad v-u > 1 .$$

Quindi l'integrale generalizzato

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x^v}{x^{v-u}} dx$$

converge. Ne segue che, per $u-v+1 < 0$,

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} x^u \sin x^v dx &= -\frac{1}{v} \lim_{b \rightarrow +\infty} b^{u-v+1} \cos b^v + \frac{a^{u-v+1}}{v} \cos a^v - \frac{u-v+1}{v^2} \int_a^{+\infty} \frac{\cos x^v}{x^{v-u}} dx = \\ &= \frac{a^{u-v+1}}{v} \cos a^v - \frac{u-v+1}{v^2} \int_a^{+\infty} \frac{\cos x^v}{x^{v-u}} dx \end{aligned}$$

per cui in conclusione se $u, v > 0$ allora l'integrale generalizzato (1) converge per $v-u > 1$.

Soluzione di (2). Si procede esattamente come per la soluzione di (1) appena svolta.



Esercizio 8.13. Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8.14. Sia $a > 0$. Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_a^{+\infty} x^m \sin^n x \, dx$$

al variare di $m, n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 8.15. Calcolare i seguenti integrali:

$$(1) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \quad , \quad (2) \int_{-3}^3 \log(9-x^2) \, dx .$$

Soluzione di (2). La funzione integranda è definita per $x \in (-3, 3)$, inoltre per tali valori di x è $3-x > 0$, $3+x > 0$, e quindi $\log(9-x^2) = \log(3-x) + \log(3+x)$. Dunque

$$\begin{aligned} \int \log(9-x^2) \, dx &= \int \log(3-x) \, dx + \int \log(3+x) \, dx = \\ &= (3-x)[1 - \log(3-x)] + (3+x)[\log(3+x) - 1] + C \end{aligned}$$

perché

$$\int \log(3-x) \, dx \stackrel{t=3-x}{=} - \int \log t \, dt = t - t \log t + C = (3-x)[1 - \log(3-x)] + C ,$$

$$\int \log(3+x) \, dx \stackrel{t=x+3}{=} \int \log t \, dt = t \log t - t + C = (3+x)[\log(3+x) - 1] + C .$$

Allora, poiché $\lim_{x \rightarrow 3^-} \log(9-x^2) = -\infty = \lim_{x \rightarrow -3^+} \log(9-x^2)$ si ha

$$\int_{-3}^3 \log(9-x^2) \, dx = \int_{-3}^0 \log(9-x^2) \, dx + \int_0^3 \log(9-x^2) \, dx$$

dove

$$\begin{aligned} \int_{-3}^0 \log(9-x^2) \, dx &= \lim_{a \rightarrow -3^+} \int_a^0 \log(9-x^2) \, dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow -3^+} \{3(1 - \log 3) + 3(\log 3 - 1) - (3-a)[1 - \log(3-a)] - \\ &\quad - (3+a)[\log(3+a) - 1]\} = \\ &= - \lim_{a \rightarrow -3^+} \{(3-a)[1 - \log(3-a)] + (3+a)[\log(3+a) - 1]\} = \\ &= 6(\log 6 - 1) - \lim_{a \rightarrow -3^+} (3+a)[\log(3+a) - 1] = 6(\log 6 - 1) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 \log(9-x^2) \, dx &= \lim_{a \rightarrow 3^-} \int_0^a \log(9-x^2) \, dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow 3^-} \{(3-a)[1 - \log(3-a)] + (3+a)[\log(3+a) - 1] - \\ &\quad - 3(1 - \log 3) - 3(\log 3 - 1)\} = \\ &= \lim_{a \rightarrow 3^-} (3-a)[1 - \log(3-a)] + 6(\log 6 - 1) = 6(\log 6 - 1) . \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_{-3}^3 \log(9-x^2) \, dx = 12(\log 6 - 1) .$$

■

Esercizio 8.16. *Calcolare gli integrali*

$$(1) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} \quad , \quad (2) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \log x} .$$

Esercizio 8.17. *Calcolare gli integrali*

$$(1) \int_0^1 \frac{1 + \cos x}{(1 - x^3)^{4/3}} dx \quad , \quad (2) \int_0^1 \frac{2 - 2 \cos x - \sqrt{x}}{x} dx .$$

Esercizio 8.18. *Calcolare*

$$(1) \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \quad , \quad (2) \int_0^2 \frac{\log(2-x)}{(2-x)^3} dx .$$

Esercizio 8.19. *Divergono i seguenti integrali?*

$$(1) \int_0^2 \frac{dx}{x^3 \sin x} \quad , \quad (2) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \log^n x} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} .$$

Esercizio 8.20. *Quali dei seguenti integrali converge?*

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \quad , \quad (2) \int_0^4 \frac{x+1}{x^{1/2}} dx .$$

Esercizio 8.21. *Verificare l'eventuale convergenza di*

$$(1) \int_0^\pi \frac{dx}{1 - \cos^2 x} \quad , \quad (2) \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{dx}{1 + 2 \cos x} .$$

Esercizio 8.22. *Verificare la convergenza di*

$$(1) \int_{-3}^1 \frac{x+2}{(x^2 - 2x + 1)(x+3)^{2/3}} dx \quad , \quad (2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} .$$

Esercizio 8.23. *Sia $\alpha > 0$. Studiare la convergenza dell'integrale*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx .$$

La funzione $\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$, sopra definita si chiama *integrale di Eulero di seconda specie* (o funzione *Gamma di Eulero* o anche *Gamma euleriana*).

Esercizio 8.24. *Dimostrare che*

- (i) $\Gamma(1) = 1$,
- (ii) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$, e di conseguenza
- (iii) $\Gamma(n + 1) = n!$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Esercizio 8.25. *Calcolare i seguenti integrali*

$$(1) \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx \quad , \quad (2) \int_0^{+\infty} x^{5/2} e^{-x} dx .$$

Esercizio 8.26. *Calcolare i seguenti integrali*

$$(1) \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x+1)\log(x+1)} \quad , \quad (2) \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{dx}{(x-2)\log^3(x-2)} \quad ,$$

$$(3) \int_2^3 \frac{2x+1}{x^3-3x^2+4} dx \quad , \quad (4) \int_0^1 \frac{x+1}{(x+2)\sqrt{x-1}} dx \quad ,$$

$$(5) \int_1^2 \frac{2x^2-x-1}{x^2+x-2} dx \quad , \quad (6) \int_{-\sqrt{2}}^0 \frac{x+1}{(x^2-2)^2} dx \quad ,$$

$$(7) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^3} \quad , \quad (8) \int_{-\infty}^0 \frac{1-x^2}{x^3-5x^2+3x+9} dx \quad ,$$

$$(9) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1-\sin x}{x-\pi} dx \quad , \quad (10) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1-\cos x} dx \quad ,$$

$$(11) \int_{-3}^1 \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x+3} dx \quad , \quad (12) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx \quad .$$

9. ESERCIZI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL I ORDINE

Premettiamo una breve ricapitolazione per la risoluzione di alcuni tipi di equazioni differenziali del I ordine.

• **Equazione differenziale ordinaria:**

$$y'(x) = f(x) .$$

La soluzione è¹¹

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt .$$

• **Equazione differenziale ordinaria a variabili separabili (o separate):**

$$y'(x) = a(x)b(y(x)) .$$

Se l'equazione numerica $b(y) = 0$ ha una soluzione y_0 ,

$$y(x) = y_0$$

è soluzione dell'equazione differenziale.

Se $b(y)$ non è identicamente nulla e se esiste una primitiva B della funzione $\frac{1}{b(y)}$ allora la relazione

$$B(y(x)) - B(y(x_0)) = \int_{x_0}^x a(t) dt$$

permette di trovare la soluzione $y(x)$.

• **Equazione differenziale lineare omogenea del I ordine:**

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0 .$$

La soluzione è

$$y(x) = y(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} .$$

• **Equazione differenziale lineare affine del I ordine:**

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) .$$

La soluzione è¹²

$$y(x) = y(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} + \int_{x_0}^x b(t) e^{\int_x^t a(s) ds} dt .$$

• **Equazione differenziale di Bernoulli:**

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^n(x) .$$

La soluzione è

$$y(x) = \left[y^{1-n}(x_0) e^{(n-1) \int_{x_0}^x a(s) ds} + (1-n) \int_{x_0}^x b(t) e^{(1-n) \int_x^t a(s) ds} dt \right]^{1/(1-n)} .$$

• **Equazione differenziale di Riccati:**

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^2(x) + c(x) .$$

¹¹ovvero $y(x) = \int f(x) dx$.

¹²ovvero $y(x) = e^{-A(x)} \int b(x) e^{A(x)} dx$ per $A(x)$ primitiva di $a(x)$.

Determinata una soluzione particolare $y_0(x)$ si pone $z(x) = y(x) - y_0(x)$ e sostituendo nell'equazione differenziale $y(x) = z(x) + y_0(x)$ si ottiene l'equazione differenziale di Bernoulli con $n = 2$

$$z'(x) + (a(x) - 2b(x)y_0(x))z(x) = b(x)z^2(x)$$

la quale risolta, permette di determinare $y(x) = z(x) + y_0(x)$.

• **Equazione differenziale di Clairaut:**

$$y(x) = xy'(x) + f(y'(x)) .$$

Per derivazione si ottiene

$$y''(x) (x + f'(y'(x))) = 0 .$$

Una soluzione è $y(x) = ax + b$. Per $t = y'$ si ha la soluzione in forma parametrica

$$\begin{cases} x = -f'(t) \\ y = -tf'(t) + f(t) . \end{cases}$$

• **Equazione differenziale di D'Alembert-Lagrange:**

$$y(x) = xf(y'(x)) + g(y'(x)) .$$

Si pone $t = y'$ e derivando rispetto a x si ottiene

$$t' = \frac{t - f(t)}{xf'(t) + g'(t)} .$$

Poiché $t' = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'(t)}$ si ricava l'equazione differenziale affine del primo ordine (nella variabile t)

$$x'(t) + \frac{f'(t)}{f(t) - t} x(t) = \frac{g'(t)}{t - f(t)}$$

che permetterà di determinare x in funzione del parametro t e dunque, tenuto conto dell'equazione differenziale iniziale, si ha la soluzione parametrica

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = x(t)f(t) + g(t) . \end{cases}$$

• **Equazione differenziale di Manfredi:**

$$y'(x) = \varphi(x, y(x))$$

dove $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di due variabili reali, continua e omogenea di grado 0.

Ponendo $t = \frac{y}{x}$ e differenziando rispetto a x si ottiene $y' = t + xt'$ da cui $xt' = f(t) - t$

che dà l'equazione differenziale a variabili separabili

$$t'(x) = \frac{f(t(x)) - t(x)}{x}$$

la cui soluzione $t(x)$ permette di ricavare $y(x) = xt(x)$.

• **Equazioni differenziali del tipo $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$**

Caso (1). $\det \begin{bmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix} \neq 0$

si prende

$$\begin{cases} X = ax + by(x) + c \\ Y = a_1x + b_1y(x) + c_1 \end{cases}$$

e si avrà

$$\begin{cases} x = AX + BY(X) + C \\ y = A_1X + B_1Y(X) + C_1 . \end{cases}$$

Allora

$$\begin{cases} \frac{dx}{dX} = A + BY'(X) \\ \frac{dy}{dX} = A_1 + B_1Y'(X) \end{cases}$$

per $Y'(X) = \frac{dY}{dX}$. L'equazione differenziale data diventa

$$\frac{A_1 + B_1Y'(X)}{A + BY'(X)} = f\left(\frac{X}{Y(X)}\right)$$

che generalmente si risolve ponendo $T = \frac{Y}{X}$.

Caso (2). $\det \begin{bmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix} = 0$

si pone

$$t(x) = ax + by(x)$$

ottenendo l'equazione differenziale

$$\frac{t'(x) - a}{b} = f\left(\frac{t(x) + c}{\lambda t(x) + c_1}\right) .$$

ESERCIZI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL I ORDINE

Esercizio 9.1. *Risolvere le equazioni differenziali ordinarie*

$$(1) \quad y' = 3x^2 - 5x + 10 \quad , \quad (2) \quad y' = \tan x + x .$$

Esercizio 9.2. *Risolvere le equazioni differenziali a variabili separabili*

$$(1) \quad y' = 4y^2 - y + 7 \quad , \quad (2) \quad y' = \sqrt{2}y^2 + 2y + \sqrt{2} .$$

Esercizio 9.3. *Risolvere le equazioni differenziali a variabili separabili*

$$(1) \quad y' = (3y - 2)x^4 \quad , \quad (2) \quad (x^3 + 1)y' = (x - 1)(y^2 + y + 1) .$$

Esercizio 9.4. *Risolvere le equazioni differenziali a variabili separabili*

$$\begin{aligned} (1) \quad & (2x^2 - x + 1)y' = (x^2 + 2x - 1)(y^3 - 1) , \\ (2) \quad & (x^2 + 2x - 1)y' = (2x^2 - x + 1)(y^3 + 1) . \end{aligned}$$

Esercizio 9.5. Risolvere le equazioni differenziali

$$(1) \ y' + \frac{1}{x^2} y = 0 \quad , \quad (2) \ y' = \sin x \cos y \ ,$$

$$(3) \ y' = \frac{\log x}{y} \quad , \quad (4) \ y' + 2xy = 0 \quad , \quad (5) \ y' = x^2 y^3 \ .$$

Esercizio 9.6. Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari affini:

$$(1) \ y' - \frac{1}{1-x} y - x = 0 \quad , \quad (2) \ y' - y \tan x = \sin x \cos^2 x \ .$$

Esercizio 9.7. Risolvere le equazioni differenziali lineari affini:

$$(1) \ y' + 2xy = x^3 \quad , \quad (1) \ y' + (x^2 + x)y = (x^2 + x)(x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1) \ .$$

Esercizio 9.8. Risolvere le seguenti equazioni differenziali

$$(1) \ y' + \frac{6x}{3x^2 - 1} y = \frac{1}{-1 + 3x^2} \quad , \quad (2) \ y' - y \sin x = \sin x \ .$$

Esercizio 9.9. Risolvere le seguenti equazioni differenziali del I ordine:

$$(1) \ yy' + 2x^5 = 0 \quad , \quad (2) \ y^2 y' + x^3 = 0 \ .$$

Esercizio 9.10. Risolvere le equazioni differenziali del I ordine:

$$(1) \ xy' = -y + \frac{x^2 e^x}{4y^3} \quad , \quad (2) \ xy' = y + \frac{x^3 e^x}{4y^2} \ .$$

Esercizio 9.11. Risolvere le equazioni differenziali del I ordine

$$(1) \ y' = \frac{-x + y - 1}{x + y - 1} \quad , \quad (2) \ y' = \left(\frac{x - y + 1}{2x - 2y + 1} \right)^2 \ .$$

■ Soluzione di (1). Posto

$$\begin{cases} X = -x + y + 1 \\ Y = x + y - 1 \end{cases}$$

il determinante del sistema è

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y \\ y = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y + 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{dx}{dX} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}Y' \\ \frac{dy}{dX} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}Y' \end{cases}$$

dove $Y' = \frac{dY}{dX}$. Poiché

$$y' = \frac{\frac{dy}{dX}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{Y' + 1}{Y' - 1},$$

l'equazione differenziale (1) diventa

$$\frac{Y' + 1}{Y' - 1} = \frac{X}{Y} \iff Y' = \frac{X + Y}{X - Y}.$$

Posto $T = \frac{Y}{X}$ si ricava $Y' = XT' + T$ da cui

$$XT' = -T + \frac{1 + T}{1 - T} \iff T' = \frac{1}{X} \frac{T^2 + 1}{1 - T}.$$

Posto $A(X) = \frac{1}{X}$ e $B(T) = \frac{T^2 + 1}{1 - T}$ si ha l'equazione differenziale a variabili separabili $T' = A(X)B(T)$ ovvero

$$\frac{T'(X)}{B(T(X))} = A(X) \quad \text{da cui} \quad \int_{X_0}^X \frac{T'(S)}{B(T(S))} dS = \int_{X_0}^X A(S) dS$$

per $X_0 = -x_0 + y(x_0) + 1$. Poiché $dT = T'(S) dS$ si ha

$$\int_{T(X_0)}^{T(X)} \frac{dT}{B(T)} = \int_{X_0}^X A(S) dS$$

dove

$$\begin{aligned} \int_{T(X_0)}^{T(X)} \frac{dT}{B(T)} &= \int_{T(X_0)}^{T(X)} \frac{1 - T}{1 + T^2} dT = \int_{T(X_0)}^{T(X)} \frac{dT}{1 + T^2} - \int_{T(X_0)}^{T(X)} \frac{T}{1 + T^2} dT = \\ &= \arctan T(X) - \frac{1}{2} \log(1 + T(X)^2) - \left[\arctan T(X_0) - \frac{1}{2} \log(1 + T(X_0)^2) \right], \\ \int_{X_0}^X A(S) dS &= \int_{X_0}^X \frac{1}{S} dS = \log |X| - \log |X_0|. \end{aligned}$$

Pertanto se $C'_0 = \arctan T(X_0) - \frac{1}{2} \log(1 + T(X_0)^2) - \log |X_0|$ allora si ha

$$\arctan T(X) - \frac{1}{2} \log(1 + T(X)^2) = \log |X| + C'_0$$

da cui

$$\begin{aligned} \arctan \frac{Y}{X} - \frac{1}{2} \log \frac{X^2 + Y^2}{X^2} &= \log |X| + C_0 \iff \\ \iff \arctan \frac{Y}{X} - \log \sqrt{X^2 + Y^2} + \log |X| &= \log |X| + C_0 \end{aligned}$$

con costante $C_0 = \arctan \frac{Y(X_0)}{X_0} - \log \sqrt{X_0^2 + Y(X_0)^2}$. La soluzione dell'equazione differenziale è allora espressa in forma implicita da

$$\arctan \frac{x + y - 1}{-x + y + 1} - \log \sqrt{2x^2 + 2y^2 - 4x + 2} + C = 0$$

per $C \in \mathbb{R}$ costante dipendente dalle condizioni iniziali $x_0, y(x_0)$.

Esercizio 9.12. *Risolvere le seguenti equazioni differenziali del I ordine:*

$$(1) \quad y' = \frac{3x + 2y - 1}{-x + 2y - 3} \quad , \quad (2) \quad y' = \frac{x - y + 3}{2x - 2y + 1} .$$

Esercizio 9.13. *Risolvere le equazioni differenziali*

$$(1) \quad x^2 y' = x^3 + y \quad , \quad (2) \quad x^2 y' = x^2 - xy + y^2 .$$

Esercizio 9.14. *Risolvere*

$$(1) \quad y' + xy = x^2 y^3 \quad , \quad (2) \quad xy' = (y - x)^3 + y .$$

Esercizio 9.15. *Risolvere le seguenti equazioni differenziali*

$$(1) \quad y' + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x^3} \quad , \quad (2) \quad y' + \frac{x}{x+1} y = x^2 - 1 ,$$
$$(3) \quad y' + \frac{4x}{x^2+1} y = 3x^2 + x + 1 \quad , \quad (4) \quad y' - \frac{1}{1-x} y = x ,$$
$$(5) \quad y' - y \tan x = \sin x \cos^2 x .$$

10. ESERCIZI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI A COEFFICIENTI COSTANTI DI
ORDINE $n \geq 2$

Premettiamo anche qui una breve ricapitolazione per la risoluzione dell'equazioni differenziali del tipo

$$(10.1) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$$

$a_j \in \mathbb{R}$, $0 \leq j \leq n-1$. Sia \mathcal{S} lo spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale (10.1) e $y_0(x)$ una soluzione particolare di (10.1); considerato il *polinomio caratteristico* di grado n

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

associato all'equazione differenziale lineare omogenea

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0,$$

se

- $p(\lambda)$ ha n radici reali e distinte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ allora

$$\mathcal{S} = \left\{ y \in C^n(A) : y = y_0 + \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j x}, c_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n \right\}.$$

- $p(\lambda)$ ha radici reali distinte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $k < n$, ma una di esse ha molteplicità, ad esempio λ_k ha molteplicità m_k ($2 \leq m_k \leq n$), allora

$$\mathcal{S} = \left\{ y \in C^n(A) : y = y_0 + \sum_{j=1}^k c_j e^{\lambda_j x} + \sum_{h=1}^{m_k-1} c_{kh} x^h e^{\lambda_k x}, \right. \\ \left. c_j, c_{kh} \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq k, 1 \leq h \leq m_k - 1 \right\}.$$

- $p(\lambda)$ ha una radice complessa semplice, ad esempio $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$, allora

$$\mathcal{S} = \left\{ y \in C^n(A) : y = y_0 + \sum_{j=1}^{n-1} c_j e^{\lambda_j x} + c_{1n} e^{\alpha_n x} \cos \beta_n x + c_{2n} e^{\alpha_n x} \sin \beta_n x, \right. \\ \left. c_j, c_{1n}, c_{2n} \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n-1 \right\}.$$

- $p(\lambda)$ ha una radice complessa con molteplicità, ad esempio $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ con molteplicità m_k allora,

$$\mathcal{S} = \left\{ y \in C^n(A) : y = y_0 + \sum_{j=1}^{k-1} c_j e^{\lambda_j x} + \right. \\ \left. + \sum_{h=0}^{m_k-1} (c_{1kh} x^h e^{\alpha_k x} \cos \beta_k x + c_{2kh} x^h e^{\alpha_k x} \sin \beta_k x), \right. \\ \left. c_j, c_{1kh}, c_{2kh} \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq k-1, 1 \leq h \leq m_k - 1 \right\}.$$

Una soluzione particolare $y_0(x)$ per l'equazione differenziale (10.1) si può determinare nei modi seguenti¹³.

(1) Il dato $b(x)$ è un polinomio di grado r

- se $a_0 \neq 0$ allora ricerchiamo

$$y_0(x) = b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} \cdots + b_1 x + b_0 ;$$

- se $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$ e $a_m \neq 0$ allora ricerchiamo

$$y_0(x) = x^m (b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} \cdots + b_1 x + b_0) .$$

(2) Il dato $b(x)$ è multiplo della funzione $f(x) = e^{kx}$, per $k \in \mathbb{R}$

- k non è radice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ allora ricerchiamo

$$y_0(x) = c e^{kx} ;$$

- k è radice di $p(\lambda)$ con molteplicità $m \geq 1$ allora ricerchiamo

$$y_0(x) = c x^m e^{kx} .$$

(3) Il dato $b(x)$ è il prodotto di un polinomio di grado r e di e^{kx}

- k non è radice del polinomio caratteristico, allora ricerchiamo

$$y_0(x) = e^{kx} (b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r) ;$$

- k è radice del polinomio caratteristico con molteplicità $m \geq 1$, allora ricerchiamo

$$y_0(x) = x^m e^{kx} (b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r) .$$

(4) Il dato $b(x)$ è una combinazione lineare delle funzioni $f(x) = \cos kx$ e $g(x) = \sin kx$, per $k \in \mathbb{R}$

- ik non è radice del polinomio caratteristico allora ricerchiamo

$$y_0(x) = \alpha \cos kx + \beta \sin kx .$$

(5) Il dato $b(x)$ non rientra nei casi precedenti

- si usa il *metodo della variazione delle costanti*. Si determinano n soluzioni linearmente indipendenti u_1, \cdots, u_n dell'equazione differenziale omogenea e scritta la sua generica soluzione $u(x) = \sum_{j=1}^n c_j u_j(x)$, per $c_j \in \mathbb{R}$, ricerchiamo

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^n c_j(x) u_j(x)$$

¹³Usando il principio di identità dei polinomi o l'indipendenza lineare delle funzioni una volta sostituito y_0 e le sue derivate in (10.1).

dove le funzioni incognite $c_j(x)$, $1 \leq j \leq n$, si determinano risolvendo il sistema di equazioni differenziali del I ordine

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_j'(x) u_j(x) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n c_j'(x) u_j^{(n-2)}(x) = 0 \\ \sum_{j=1}^n c_j'(x) u_j^{(n-1)}(x) = b(x) . \end{cases}$$

Esercizio 10.1. Risolvere le seguenti equazioni differenziali omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti

$$(1) \quad y'' + y = 0 \quad , \quad (2) \quad y'' - 2y' - 3y = 0 .$$

■ *Soluzione di (1).* Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ che ha le due radici complesse e coniugate $\lambda_1 = i$, $\bar{\lambda}_1 = -i$. Pertanto le soluzioni della 1) sono le funzioni $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ date da

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Soluzione di (2). Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$, dove $\frac{\Delta}{4} = 4$, quindi le sue radici sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. I generatori delle soluzioni dell'equazione differenziale 2) sono così le funzioni $u_1(x) = e^{-x}$, $u_2(x) = e^{3x}$, per cui tali soluzioni sono le funzioni $y \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

■

Esercizio 10.2. Risolvere le seguenti equazioni differenziali omogenee del III ordine a coefficienti costanti

$$(1) \quad y''' + 2y' + 3y = 0 \quad , \quad (2) \quad y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 .$$

■ *Soluzione di (1).* Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda + 3$. Osserviamo che $p(-1) = 0$, dunque $\lambda_1 = -1$ è una radice (reale) di $p(\lambda)$. Per determinare le altre radici operiamo la divisione tra $p(\lambda)$ e il monomio $\lambda + 1$ ottenendo così $\lambda^3 + 2\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 3)$ dove, per il trinomio di II grado, è $\Delta = -11$. Ne segue che $p(\lambda)$ ha le due radici complesse e coniugate

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{11}}{2} \quad , \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{11}}{2} .$$

I generatori delle soluzioni sono dunque

$$u_1(x) = e^{-x} \quad , \quad u_2(x) = e^{x/2} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} x \quad , \quad u_3(x) = e^{x/2} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x$$

per cui le generiche soluzioni dell'equazione differenziale 1) sono le funzioni $y \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} x + c_3 e^{x/2} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 10.3. Risolvere le seguenti equazioni differenziali omogenee del V ordine a coefficienti costanti

$$(1) \quad y^{(5)} - 5y^{(4)} - 9y' + 45y = 0 \quad , \quad (2) \quad y^{(5)} - 5y^{(4)} + 7y''' - 3y'' = 0.$$

■ *Soluzione di (1).* Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^4 - 9\lambda + 45$ che si decompone in $p(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda^4 - 9)$. Le sue radici sono $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$, $\lambda_3 = -\sqrt{3}$, $\lambda_4 = \sqrt{3}i$, $\lambda_5 = -\sqrt{3}i = \overline{\lambda_4}$, tutte semplici. Pertanto le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea proposta sono

$$y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{\sqrt{3}x} + c_3 e^{-\sqrt{3}x} + c_4 \cos \sqrt{3}x + c_5 \sin \sqrt{3}x, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq 5.$$

Soluzione di (2). Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^4 + 7\lambda^3 - 3\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3)$. Allora $\lambda_1 = 0$ è radice di molteplicità 2 e si trova anche la radice $\lambda_2 = 1$. Dividendo per $\lambda - 1$ si ricava $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$. Si determinano così altre due radici che sono $\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$ e $\lambda_4 = 2 + \sqrt{3}$. Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea (2) sono dunque

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{(2-\sqrt{3})x} + c_5 e^{(2+\sqrt{3})x}, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq 5. \quad \blacksquare$$

Esercizio 10.4. Risolvere le seguenti equazioni differenziali omogenee di ordine superiore al primo

$$(1) \quad y^{(6)} + 3y^{(4)} + 3y'' + y = 0 \quad , \quad (2) \quad y''' - 8y'' + 25y' - 26y = 0.$$

■ *Soluzione di (1).* Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^6 + 3\lambda^4 + 3\lambda^2 + 1$ ovvero $p(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^3$, quindi ha due radici complesse coniugate $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i$, ciascuna di molteplicità $m = 3$. Pertanto la generica soluzione dell'equazione differenziale (1) è

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x + c_5 x^2 \cos x + c_6 x^2 \sin x, \quad c_j \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq 6.$$

Soluzione di (2). Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 26$ e $p(2) = 0$ perciò si ha la radice reale $\lambda_1 = 2$. Per le altre radici operiamo la divisione tra $p(\lambda)$ e il monomio $\lambda - 2$ ottenendo $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 26 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 13)$, dove il trinomio di II grado ha $\frac{\Delta}{4} = -4$, per cui il polinomio caratteristico ha anche le due radici complesse e coniugate $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = -2i$. La generica soluzione dell'equazione differenziale (2) è dunque

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 10.5. Risolvere le seguenti equazioni differenziali omogenee:

$$(1) \quad y^{(4)} - 4y''' - 2y'' + 12y' + 9y = 0 \quad , \quad (2) \quad y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$$

■ *Soluzione di (1).* Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 2\lambda^2 + 12\lambda + 9$. Si osserva che $\lambda_1 = -1$ è una radice, per cui dividendo per $\lambda + 1$ si ottiene

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9)$$

dove $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9$ è ancora divisibile per $\lambda + 1$ per cui

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)^2.$$

Le radici, dunque, sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$ ciascuna con molteplicità $m = 2$. Pertanto le soluzioni dell'equazione differenziale (1) sono

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x e^{3x}, \quad c_j \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq 4.$$

Soluzione di (2). Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4$. Si osservi che

$$(\lambda - 1)^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \lambda^k (-1)^{4-k} = 1 - 4\lambda + 6\lambda^2 - 4\lambda^3 + \lambda^4$$

quindi

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda - 1)^4 + 2\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)^4 + 2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 1 = (\lambda - 1)^4 + 2(\lambda - 1)^2 + 1 = \\ &= [(\lambda - 1)^2 + 1]^2. \end{aligned}$$

Le radici di $p(\lambda)$ sono le soluzioni (ciascuna con molteplicità 2) di $(\lambda - 1)^2 + 1 = 0$ ovvero $\lambda - 1 = \pm i$ che dà $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i = \overline{\lambda_1}$. Pertanto le soluzioni dell'equazione differenziale proposta sono

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + c_3 x e^x \cos x + c_4 x e^x \sin x, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq 4. \quad \blacksquare$$

Esercizio 10.6. Risolvere le seguenti equazioni differenziali a coefficienti costanti

$$(1) \quad y^{(3)} - 3y' - 2y = e^x \cos x, \quad (2) \quad y^{(4)} - 2y^{(2)} + y = 5e^x \sin x + x^2 + 1.$$

■ *Soluzione di (1).* Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$ e $\lambda_1 = -1$ ne è una radice per cui, dividendo per $\lambda + 1$, si ottiene $p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2)$. Le radici del trinomio risultano essere -1 e $\lambda_2 = 2$. Quindi il polinomio caratteristico ha la radice doppia $\lambda_1 = -1$ e la radice (semplice) $\lambda_2 = 2$. Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata all'equazione differenziale (1) sono

$$u(x) = c_1 e^{2x} + e^{-x}(c_2 + c_3 x), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Poiché il dato è del tipo prodotto di un'esponenziale e di una combinazione lineare di $\cos x$ e $\sin x$, la soluzione particolare la ricerchiamo del tipo

$$y_0(x) = e^x(a \cos x + b \sin x), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Calcolando le derivate fino al III ordine si ottiene

$$\begin{aligned} (10.2) \quad y_0'(x) &= e^x[(a + b) \cos x + (b - a) \sin x] \\ y_0''(x) &= e^x(2b \cos x - 2a \sin x) \\ y_0'''(x) &= e^x[2(b - a) \cos x - 2(a + b) \sin x]. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale e semplificando per $e^x \neq 0$, si ha la relazione

$$-(b + 7a) \cos x + (a - 7b) \sin x = \cos x .$$

Siccome le funzioni $\cos x$ e $\sin x$ sono linearmente indipendenti, si ottiene il sistema lineare in a, b

$$\begin{cases} b + 7a = -1 \\ a - 7b = 0 \end{cases}$$

da cui $a = -\frac{7}{50}$, $b = -\frac{1}{50}$. Pertanto

$$y_0(x) = -\frac{1}{50}e^x(7 \cos x + \sin x) .$$

In conclusione le soluzioni dell'equazione differenziale **(1)** sono le funzioni $y(x) = y_0(x) + u(x)$ ovvero

$$y(x) = -\frac{1}{50}e^x(7 \cos x + \sin x) + c_1e^{2x} + e^{-x}(c_2 + c_3x) \quad , \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} .$$

Soluzione di (2). Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2$. Le radici sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ entrambe con molteplicità 2. Pertanto le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono le funzioni

$$u(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3xe^x + c_4xe^{-x} \quad , \quad c_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq 4 .$$

Osservando il dato dell'equazione differenziale, la soluzione particolare è del tipo

$$y_0(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

per y_1, y_2 rispettivamente soluzioni particolari delle equazioni differenziali

$$y^{(4)} - 2y^{(2)} + y = 5e^x \sin x \quad , \quad y^{(4)} - 2y^{(2)} + y = x^2 + 1 .$$

Perciò esse saranno del tipo

$$y_1(x) = e^x(a \cos x + b \sin x) \quad , \quad y_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 .$$

Derivando

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= e^x[(a + b) \cos x + (b - a) \sin x] & , & & y_2'(x) &= a_1 + 2a_2x \\ y_1''(x) &= e^x(2b \cos x - 2a \sin x) & , & & y_1''(x) &= 2a_2 \\ y_1'''(x) &= e^x[2(b - a) \cos x - 2(a + b) \sin x] & , & & y_1'''(x) &= y_1^{(4)}(x) = 0 \\ y_1^{(4)}(x) &= e^x(-4a \cos x - 4b \sin x) . \end{aligned}$$

Sostituendo nelle equazioni differenziali si ottengono le relazioni

$$-(3a + 4b) \cos x + (4a - 3b) \sin x = 5 \sin x \quad , \quad a_2x^2 + a_1x + a_0 - 4a_2 = x^2 + 1$$

da cui i sistemi lineari

$$\begin{cases} 3a + 4b = 0 \\ 4a - 3b = 5 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_0 - 4a_2 = 1 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $a = \frac{4}{5}$, $b = -\frac{3}{5}$, $a_0 = 5$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. La soluzione particolare risulta dunque

$$y_0(x) = \frac{1}{5}e^x(4 \cos x - 3 \sin x) + x^2 + 5 .$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione differenziale (2) sono

$$y(x) = \frac{1}{5}e^x(4 \cos x - 3 \sin x + c_1) + c_2e^{-x} + c_3xe^x + c_4xe^{-x} + x^2 + 5 \quad , \quad c_j \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq 4 .$$

■

Esercizio 10.7. *Risolvere le seguenti equazioni differenziali*

$$(1) \quad y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = e^x \cos(x+2) \quad , \quad (2) \quad 2y'' + y' - y = 2e^x .$$

■ *Soluzione di (1).* Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2$. Osserviamo che tale polinomio non può avere radici negative. Una rapida verifica prova che $\lambda_1 = 2$ è radice del polinomio. Con la divisione per $\lambda - 2$ si ottiene $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2$ così si hanno anche le radici complesse coniugate $\lambda_2 = i$ e $\bar{\lambda}_2 = -i$, con $\text{molt}(\lambda_2) = \text{molt}(\bar{\lambda}_2) = 2$. Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea sono le funzioni $u \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$u(x) = c_1e^{2x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + c_4x \cos x + c_5x \sin x ,$$

$c_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq 5$. Il dato $b(x) = e^x \cos(x+2) = e^x(\cos 2 \cos x - \sin 2 \sin x)$ è del tipo $b(x) = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ con $\alpha = \beta = 1$, $A = \cos 2$, $B = -\sin 2$. Determiniamo una soluzione particolare dello stesso tipo, cioè

$$y_0(x) = e^x(a \cos x + b \sin x)$$

Derivando si ha

$$y_0'(x) = e^x[(a+b) \cos x + (b-a) \sin x]$$

$$y_0''(x) = 2e^x(b \cos x - a \sin x)$$

$$y_0'''(x) = 2e^x[(b-a) \cos x - (a+b) \sin x]$$

$$y_0^{(4)}(x) = -4e^x(a \cos x + b \sin x)$$

$$y_0^{(5)}(x) = -4e^x[(a+b) \cos x + (b-a) \sin x] .$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene la relazione

$$-(a+7b) \cos x + (7a-b) \sin x = \cos 2 \cos x - \sin 2 \sin x$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} -a - 7b = \cos 2 \\ 7a - b = -\sin 2 \end{cases}$$

con soluzioni

$$a = -\frac{1}{50}(\cos 2 + 7 \sin 2) \quad , \quad b = \frac{1}{50}(\sin 2 - 7 \cos 2)$$

Ne segue che

$$y_0(x) = \frac{1}{50}e^x [-(\cos 2 + 7 \sin 2) \cos x + (\sin 2 - 7 \cos 2) \sin x] .$$

Infine le soluzioni dell'equazione differenziale sono le funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$

$$y(x) = \frac{1}{50}e^x [-(\cos 2 + 7 \sin 2) \cos x + (\sin 2 - 7 \cos 2) \sin x] + \\ + c_1 e^{2x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \cos x + c_5 x \sin x$$

per $c_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq 5$.

Soluzione di (2). Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = 2\lambda^2 + \lambda - 1$ le cui radici risultano essere $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Ne segue che le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono

$$u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La soluzione particolare è del tipo $y_0(x) = ce^x$ per cui $y'(x) = y''(x) = ce^x$. Sostituendo nell'equazione differenziale si determina $c = 1$. Dunque $y_0(x) = e^x$. Le soluzioni dell'equazione differenziale (2) sono

$$y(x) = e^x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

Esercizio 10.8. *Risolvere le equazioni differenziali*

$$(1) \quad 2y'' + y' - y = 2e^x \cos x, \quad (2) \quad y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}.$$

■ *Soluzione di (1).* L'equazione differenziale omogenea associata è la stessa di quella dell'equazione differenziale (2) dell'Esercizio 10.7 per cui le sue soluzioni sono

$$u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La soluzione particolare è del tipo

$$y_0(x) = e^x(a \cos x + b \sin x)$$

come quella di (1) dell'Esercizio 10.7. Pertanto, con le stesse espressioni di y'_0, y''_0 trovate in tale esercizio, sostituendo nella (1), si ottiene la relazione

$$5b \cos x - 5a \sin x = 2 \cos x$$

da cui $a = 0$, $b = \frac{2}{5}$. In definitiva le soluzioni dell'equazione differenziale (1) sono

$$y(x) = \frac{2}{5}e^x \sin x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Soluzione di (2). Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ per cui le radici (reali, semplici e distinte) sono $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, quindi le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono le funzioni

$$u(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Per determinare una soluzione particolare, il dato $b(x) = xe^{-x}$ è del tipo $b(x) = (b_0 + b_1 x)e^{\alpha x}$ con $\alpha = -1$ che è radice del polinomio caratteristico. Cercheremo allora una soluzione particolare del tipo

$$y_0(x) = x(a_1 x + a_0)e^{-x} \quad \text{ovvero} \quad y_0(x) = e^{-x}(a_1 x^2 + a_0 x).$$

Si ha

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= e^{-x}(-a_1x^2 - a_0x + 2a_1x + a_0) = \\ &= e^{-x}[-a_1x^2 + (2a_1 - a_0)x + a_0] \\ y_0''(x) &= e^{-x}(a_1x^2 - (2a_1 - a_0)x - a_0 - 2a_1x + 2a_1 - a_0) = \\ &= e^{-x}[a_1x^2 + (-4a_1 + a_0)x + 2(a_1 - a_0)] \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale, si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} 2a_1 = 1 \\ 2a_1 + a_0 = 0 \end{cases} \implies a_0 = -1, a_1 = \frac{1}{2}$$

quindi

$$y_0(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{2} x^2 - x \right).$$

Infine la generica soluzione dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{2} x^2 - x + c_1 \right) + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

Esercizio 10.9. *Risolvere le equazioni differenziali*

$$(1) \quad y'' + y' = \sin x - \cos x \quad , \quad (2) \quad y'' - y = e^x \sin x .$$

■ *Soluzione di (1).* Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)$ le cui radici (semplici) sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ per cui le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono le funzioni $u \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$u(x) = c_1 + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Il dato è del tipo $b(x)$ è una combinazione lineare di $\cos \alpha x$ e $\sin \alpha x$ con $\alpha = 1$ e dunque $i\alpha = i$ non è soluzione del polinomio caratteristico. In questo caso una soluzione particolare la ricerchiamo dello stesso tipo del dato, cioè

$$y_0(x) = a \cos x + b \sin x .$$

Si ha

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= -a \sin x + b \cos x \\ y_0''(x) &= -a \cos x - b \sin x . \end{aligned}$$

La sostituzione nell'equazione differenziale dà la relazione

$$(b - a) \cos x - (a + b) \sin x = \sin x - \cos x$$

quindi si ha il sistema lineare

$$\begin{cases} b - a = -1 \\ a + b = 1 \end{cases} \implies a = 0, b = -1 .$$

Pertanto $y_0(x) = -\sin x$. Infine le soluzioni dell'equazione differenziale data sono le funzioni $y \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} - \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Soluzione di (2). Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ con radici 1 e -1 per cui le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono le funzioni

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

La soluzione particolare è del tipo

$$y_0(x) = e^x (a \cos x + b \sin x) .$$

Derivando (cfr. (10.2)) e sostituendo nell'equazione differenziale si perviene alla relazione

$$(2b - a) \cos x - (2a + b) \sin x = \sin x$$

che dà il sistema

$$\begin{cases} 2b - a = 0 \\ -2a - b = 1 \end{cases} \implies a = \frac{2}{5}, b = -\frac{1}{5} .$$

Quindi

$$y_0(x) = \frac{1}{5} e^x (2 \cos x - \sin x)$$

avendo così le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y(x) = \frac{1}{5} e^x (2 \cos x - \sin x + c_1) + c_2 e^{-x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

■

Esercizio 10.10. *Risolvere le equazioni differenziali*

$$(1) \quad y'' - y = e^x + \sin x \quad , \quad (2) \quad y^{(2)} - 3y' + 2y = (2x - 1)e^{-x} .$$

■ *Soluzione di (1).* Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ le cui radici (semplici) sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Quindi le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono

$$u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y_0(x) = a_1 x e^x + a_2 \sin x + a_3 \cos x$$

somma delle soluzioni particolari dell'equazioni differenziali

$$y'' - y = e^x \quad , \quad y'' - y = \sin x .$$

Derivando si ottiene:

$$y'_0 = a_1 e^x + a_1 x e^x + a_2 \cos x - a_3 \sin x$$

$$y''_0 = 2a_1 e^x + a_1 x e^x - a_2 \sin x - a_3 \cos x$$

che sostituite nell'equazione differenziale $y'' - y = e^x + \sin x$ danno il sistema lineare

$$\begin{cases} 2a_1 = 1 \\ -2a_2 = 1 \\ -2a_3 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = 0$. Pertanto una soluzione particolare è $y_0(x) = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}\sin x$ e le soluzioni dell'equazione differenziale data sono

$$y(x) = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}\sin x + c_1e^{-x} + c_2e^x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Soluzione di (2). Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ le cui radici sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono

$$u(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Una soluzione particolare la cerchiamo del tipo

$$y_0(x) = (C_1x + C_0)e^{-x} .$$

Derivando

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= e^{-x}(-C_1x - C_0 + C_1) \\ y_0''(x) &= e^{-x}(C_1x + C_0 - 2C_1) . \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$6C_1x + 6C_0 - 5C_1 = 2x - 1$$

da cui il sistema lineare

$$\begin{cases} 6C_1 = 2 \\ 6C_0 - 5C_1 = -1 \end{cases} \implies C_0 = \frac{1}{9}, C_1 = \frac{1}{3} .$$

Perciò

$$y_0(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right)e^{-x}$$

e le soluzioni dell'equazione differenziale sono le funzioni

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right)e^{-x} + c_1e^x + c_2e^{2x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

■

Esercizio 10.11. *Risolvere le equazioni differenziali*

$$(1) \quad y'' - 2y' + y = e^x - x + \sin x \quad , \quad (2) \quad y''' + y'' - y' - y = (x + 1)e^{-x} .$$

■ *Soluzione di (1).* Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ che ha $\lambda = 1$ come radice doppia. Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono

$$u(x) = c_1e^x + c_2xe^x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Ricerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y_0(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2e^x + a_3\sin x + a_4\cos x$$

somma delle soluzioni particolari delle equazioni differenziali

$$y'' - 2y' + y = -x \quad , \quad y'' - 2y' + y = e^x \quad , \quad y'' - 2y' + y = \sin x .$$

Si ha

$$\begin{aligned}y_0' &= a_1 + a_2 x e^x (2 + x) + a_3 \cos x - a_4 \sin x, \\y_0'' &= a_2 e^x (2 + 4x + x^2) - a_3 \sin x - a_4 \cos x.\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases}2a_2 = 1 \\ a_1 = -1 \\ 2a_4 = 1 \\ -2a_3 = 0 \\ a_0 - 2a_1 = 0\end{cases}$$

che ha la soluzione $a_0 = -2$, $a_1 = -1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 0$, $a_4 = \frac{1}{2}$. Pertanto una soluzione particolare è

$$y_0 = -2 - x + \frac{1}{2} x^2 e^x + \frac{1}{2} \cos x$$

e le soluzioni dell'equazione differenziale data sono

$$y(x) = -2 - x + \frac{1}{2} x^2 e^x + \frac{1}{2} \cos x + c_1 e^x + c_2 x e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Soluzione di (2). Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$ che si decompone in $p(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$: ha quindi la radice semplice $\lambda_1 = 1$ e la radice doppia $\lambda_2 = -1$. Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono dunque

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x}.$$

Siccome il dato è $b(x) = (x + 1)e^{-x}$ (cioè prodotto di un polinomio per un'esponenziale e^{kx} con $k = -1$ che è radice doppia del polinomio caratteristico) cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y_0(x) = x^2(a_0 + a_1 x)e^{-x}.$$

Derivando successivamente si ha

$$\begin{aligned}y_0' &= (-a_1 x^3 + (3a_1 - a_0)x^2 + 2a_0 x) e^{-x}, \\y_0'' &= (a_1 x^3 - (6a_1 - a_0)x^2 + 2(3a_1 - 2a_0)x + 2a_0) e^{-x}, \\y_0''' &= (-a_1 x^3 + (9a_1 - a_0)x^2 - 2(9a_1 - 3a_0)x + 6a_1 - 6a_0) e^{-x}.\end{aligned}$$

Sostituite nell'equazione differenziale $y''' + y'' - y' - y = (x + 1)e^{-x}$ danno il sistema lineare

$$\begin{cases}-12a_1 = 1 \\ 6a_1 - 4a_0 = 1\end{cases}$$

la cui soluzione è $a_0 = -\frac{3}{8}$, $a_1 = -\frac{1}{12}$ ovvero $y_0(x) = -x^2 \left(\frac{1}{12} x + \frac{3}{8} \right) e^{-x}$. Le soluzioni dell'equazione differenziale proposta sono pertanto

$$y(x) = -x^2 \left(\frac{1}{12} x + \frac{3}{8} \right) e^{-x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

■

Esercizio 10.12. *Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali di ordine superiore al primo a coefficienti costanti:*

$$(1) \quad y^{(3)} + y^{(2)} = x^2 + 2x + e^x \quad , \quad (2) \quad y'' - 2y' + y = \cos x \quad , \\ (3) \quad y'' + y = \sin x \quad .$$

■ *Soluzione di (1).* L'equazione differenziale omogenea associata è $y^{(3)} + y^{(2)} = 0$ il cui polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda + 1)$. Le sue radici sono $\lambda_1 = 0$ (doppia) e $\lambda_2 = -1$ (semplice). Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata all'equazione differenziale data sono

$$u(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} \quad .$$

Poiché il dato $b(x) = x^2 + 2x + e^x$ è somma di un polinomio di II grado e di un'esponenziale e la prima derivata non nulla nell'equazione differenziale è la seconda, cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y_0(x) = x^2(a_2x^2 + a_1x + a_0) + a_3e^x$$

che è la somma delle due soluzioni particolari dell'equazioni differenziali

$$y^{(3)} + y^{(2)} = x^2 + 2x \quad , \quad y^{(3)} + y^{(2)} = e^x \quad .$$

Derivando successivamente si ha

$$y'_0 = 4a_2x^3 + 3a_1x^2 + 2a_0x + a_3e^x \quad , \\ y''_0 = 12a_2x^2 + 6a_1x + 2a_0 + a_3e^x \quad , \\ y'''_0 = 24a_2x + 6a_1 + a_3e^x \quad .$$

Quindi sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} 12a_2 = 1 \\ 12a_2 + 3a_1 = 1 \\ 3a_1 + a_0 = 0 \\ 2a_3 = 1 \end{cases}$$

che ha le soluzioni $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{12}$, $a_3 = \frac{1}{2}$. La soluzione particolare è

$$y_0(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}e^x$$

e quindi le soluzioni dell'equazione differenziale data sono

$$y(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}e^x + c_1 + c_2x + c_3e^{-x} \quad , \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \quad .$$

Soluzione di (2). Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ che ha $\lambda = 1$ come radice doppia. Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono allora

$$u(x) = c_1e^x + c_2xe^x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad .$$

Cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y_0(x) = a_1 \cos x + a_2 \sin x \quad , \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad .$$

Derivando si ha

$$y'_0 = -a_1 \sin x + a_2 \cos x$$

$$y''_0 = -a_1 \cos x - a_2 \sin x$$

che sostituite nell'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = \cos x$ dà

$$2a_1 \sin x - 2a_2 \cos x = \cos x$$

per cui è $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ e la soluzione particolare cercata risulta essere $y_0(x) = -\frac{1}{2} \sin x$.
Ne segue che le soluzioni dell'equazione differenziale data sono

$$y(x) = -\frac{1}{2} \sin x + c_1 e^x + c_2 x e^x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Soluzione di (3). Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ che ha le radici (semplici) complesse e coniugate $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono

$$u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

In questo caso per determinare una soluzione particolare useremo il *metodo della variazione delle costanti*. Sia dunque

$$y_0(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x .$$

Derivando

$$y'_0 = c'_1 \cos x + c'_2 \sin x - c_1 \sin x + c_2 \cos x \quad \text{con} \quad c'_1 \cos x + c'_2 \sin x = 0$$

$$y''_0 = -c'_1 \sin x + c'_2 \cos x - c_1 \cos x - c_2 \sin x$$

da cui, sostituendo nell'equazione differenziale $y'' + y = \sin x$ e tenendo conto della condizione imposta a $c'_1 \cos x + c'_2 \sin x$ si ottiene il sistema di equazioni differenziali del I ordine

$$\begin{cases} c'_1 \cos x + c'_2 \sin x = 0 \\ -c'_1 \sin x + c'_2 \cos x = \sin x . \end{cases}$$

Risolvendo si ha

$$\begin{cases} c'_1 = -\sin^2 x \\ c'_2 = \sin x \cos x \end{cases}$$

che integrate danno $c_1(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \sin x \cos x$, $c_2 = \frac{1}{2} \sin^2 x$.

La soluzione particolare risulta allora essere $y_0(x) = -\frac{1}{2}x \cos x + \frac{1}{2} \sin x$ e di conseguenza le soluzioni dell'equazione differenziale data sono

$$y(x) = -\frac{1}{2}x \cos x + c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(essendo $\frac{1}{2} \sin x$ già compresa in $c_2 \sin x$).



Esercizio 10.13. Usando il metodo della variazione delle costanti, determinare le soluzioni delle equazioni differenziali

$$(1) \quad y'' + 2y' + 5y = 2xe^{-x} \cos 2x \quad , \quad (2) \quad y'' - y = e^x \sin x \quad , \\ (3) \quad y'' - 2y' + y = (x - 1)^4 \cos x \quad .$$

■ *Soluzione di (1).* Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ le cui radici (complesse e semplici) sono $\lambda_1 = -1 + 2i$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -1 - 2i$. Allora le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono

$$u(x) = c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad .$$

Cerchiamo dunque una soluzione particolare del tipo

$$y_0(x) = e^{-x} (c_1(x) \cos 2x + c_2(x) \sin 2x) \quad .$$

Usando il metodo della variazione delle costanti si ha

$$y_0'(x) = e^{-x} [\sin 2x (-2c_1(x) - c_2(x)) + \cos 2x (-c_1(x) + 2c_2(x))]$$

con $e^{-x} [c_1'(x) \cos 2x + c_2'(x) \sin 2x] = 0$,

$$y_0''(x) = e^{-x} [\sin 2x (-2c_1'(x) - c_2'(x) + 4c_1(x) - 3c_2(x)) + \\ + \cos 2x (2c_2'(x) - c_1'(x) - 3c_1(x) - 4c_2(x))] \quad ;$$

sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$e^{-x} [c_1'(x)(-2 \sin 2x - \cos 2x) + c_2'(x)(2 \cos 2x - \sin 2x)] = 2xe^{-x} \cos 2x \quad .$$

Dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x) \cos 2x + c_2'(x) \sin 2x = 0 \\ -c_1'(x)(2 \sin 2x + \cos 2x) + c_2'(x)(2 \cos 2x - \sin 2x) = 2x \cos 2x \end{cases}$$

ovvero, per $\cos 2x \neq 0$,

$$\begin{cases} c_1'(x) = -(\tan 2x)c_2'(x) \\ c_2'(x)[(2 \sin 2x + \cos 2x) \tan 2x + (2 \cos 2x - \sin 2x)] = 2x \cos 2x \quad . \end{cases}$$

La seconda equazione differenziale del sistema si riscrive

$$c_2'(x)(2 \sin^2 2x + \sin 2x \cos 2x + 2 \cos^2 2x - \sin 2x \cos 2x) = 2x \cos^2 2x$$

che dà

$$c_2'(x) = x \cos^2 2x \quad .$$

Quindi si ha il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x) = -x \sin 2x \cos 2x \\ c_2'(x) = x \cos^2 2x \end{cases} \iff \begin{cases} c_1'(x) = -\frac{1}{2}x \sin 4x \\ c_2'(x) = x \cos^2 2x \quad . \end{cases}$$

Poiché

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int x \sin 4x \, dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x \cos 4x - \frac{1}{4} \int \cos 4x \, dx \right) = \\ &= \frac{1}{8} \left(x \cos 4x - \int \cos 4x \, dx \right) = \frac{1}{8} \left(x \cos 4x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + c \end{aligned}$$

allora

$$c_1(x) = \frac{1}{32}(4x \cos 4x - \sin 4x) .$$

Poiché

$$\begin{aligned} \int \cos^2 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int_{t=2x} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{4}(t + \sin t \cos t) + c = \frac{1}{4}(2x + \sin 2x \cos 2x) + c = \\ &= \frac{1}{8}(4x + \sin 4x) + c \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned} \int x \cos^2 2x \, dx &= \frac{1}{8} \left[x(4x + \sin 4x) - \int (4x + \sin 4x) \, dx \right] = \\ &= \frac{1}{8} \left[4x^2 + x \sin 4x - 2x^2 + \frac{1}{4} \cos 4x \right] + c = \frac{1}{32}(8x^2 + 4x \sin 4x + \cos 4x) + c \end{aligned}$$

per cui

$$c_2(x) = \frac{1}{32}(8x^2 + 4x \sin 4x + \cos 4x) .$$

Pertanto

$$y_0(x) = \frac{1}{32} e^{-x} [(4x \cos 4x - \sin 4x) \cos 2x + (8x^2 + 4x \sin 4x + \cos 4x) \sin 2x] .$$

Le soluzioni dell'equazione differenziale data sono

$$y(x) = \frac{1}{32} e^{-x} [(4x \cos 4x - \sin 4x + c_1) \cos 2x + (8x^2 + 4x \sin 4x + \cos 4x + c_2) \sin 2x] ,$$

per $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Soluzione di (2). Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ le cui radici sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ per cui le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata sono le funzioni

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Sia allora

$$y_0(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$$

una soluzione particolare dell'equazione differenziale data. Allora

$$\begin{aligned} y_0' &= c_1' e^x + c_2' e^{-x} + c_1 e^x - c_2 e^{-x} \quad \text{con} \quad c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0 \\ y_0'' &= c_1' e^x - c_2' e^{-x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x} \end{aligned}$$

e sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene il sistema di equazioni differenziali del I ordine

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0 \\ c_1' e^x - c_2' e^{-x} = e^x \sin x . \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ricava $2c_1' = \sin x$ che sostituito nella I equazione del sistema dà $2c_2' = -e^{2x} \sin x$, quindi

$$\begin{cases} c_1' = \frac{1}{2} \sin x \\ c_2' = -\frac{1}{2} e^{2x} \sin x . \end{cases}$$

Abbiamo

$$\int \frac{1}{2} \sin x \, dx = -\frac{1}{2} \cos x + C$$

mentre integrando per parti

$$\int -\frac{1}{2} e^{2x} \sin x \, dx = \frac{1}{10} e^{2x} (\cos x - 2 \sin x) + C .$$

Prendiamo allora

$$c_1(x) = -\frac{1}{2} \cos x \quad , \quad c_2(x) = \frac{1}{10} e^{2x} (\cos x - 2 \sin x)$$

per cui

$$y_0(x) = -\frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{10} e^x (\cos x - 2 \sin x) = \frac{1}{10} e^x (-5 \cos x + \cos x - 2 \sin x)$$

ovvero

$$y_0(x) = -\frac{1}{5} e^x (2 \cos x + \sin x)$$

Infine le soluzioni dell'equazione differenziale data sono le funzioni

$$y(x) = -\frac{1}{5} e^x (2 \cos x + \sin x + c_1) + c_2 e^{-x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Soluzione di (3). Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ che ha $\lambda = 1$ come radice doppia. Le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea sono

$$u(x) = c_1 x e^x + c_2 e^x \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Sia

$$y_0(x) = c_1(x) x e^x + c_2(x) e^x = [x c_1(x) + c_2(x)] e^x$$

abbiamo allora

$$y_0' = [x c_1' + c_2' + c_1 + x c_1 + c_2] e^x = [x c_1' + c_2' + (x+1)c_1 + c_2] e^x$$

con $x c_1' + c_2' = 0$,

$$y_0'' = [(x+1)c_1' + c_2' + c_1 + (x+1)c_1 + c_2] e^x$$

che sostituite nell'equazione differenziale assieme alla condizione imposta $x c_1' + c_2' = 0$ dà il sistema di equazioni differenziali del I ordine

$$\begin{cases} x c_1' + c_2' = 0 \\ [(x+1)c_1' + c_2'] e^x = (x-1)^4 \cos x \end{cases} \iff \begin{cases} c_1' = (x-1)^4 e^{-x} \cos x \\ c_2' = -x(x-1)^4 e^{-x} \cos x . \end{cases}$$

Per $n \in \mathbb{N}$ siano

$$I_n = \int (x-1)^n e^{-x} \cos x \, dx = F_n(x) + C ,$$

$$J_n = \int (x-1)^n e^{-x} \sin x \, dx$$

in modo che

$$\int (x-1)^4 e^{-x} \cos x \, dx = I_4 = F_4(x) + C$$

mentre notiamo che

$$\int -x(x-1)^4 e^{-x} \cos x \, dx = -x F_4(x) + \int F_4(x) \, dx = -x F_4(x) + F(x) + C .$$

Prendiamo allora

$$c_1(x) = F_4(x) \quad , \quad c_2(x) = -x F_4(x) + F(x)$$

cosicch 

$$x c_1(x) + c_2(x) = x F_4(x) - x F_4(x) + F(x) = F(x) \quad ,$$

dunque

$$y_0(x) = e^x F(x)$$

e le soluzioni dell'equazione differenziale sono le funzioni

$$y(x) = e^x [F(x) + c_1 x + c_2]$$

Dobbiamo ora determinare $F(x)$.   facile verificare che, per $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{1}{2}(x-1)^n e^{-x} (\sin x - \cos x) + \frac{n}{2} I_{n-1} - \frac{n}{2} J_{n-1} \quad ,$$

$$J_n = -\frac{1}{2}(x-1)^n e^{-x} (\sin x + \cos x) + \frac{n}{2} I_{n-1} + \frac{n}{2} J_{n-1} \quad ,$$

da cui si ricavano

$$I_n + J_n = -(x-1)^n e^{-x} \cos x + n I_{n-1} \quad , \quad I_n - J_n = (x-1)^n e^{-x} \sin x - n J_{n-1} \quad .$$

Inoltre

$$I_0 = \int e^{-x} \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C \quad ,$$

$$J_0 = \int e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + C \quad .$$

Le relazioni sopra scritte permettono di calcolare

$$F_4(x) = e^{-x} \sin x \left[\frac{1}{2}(x-1)^4 + 2(x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 3 \right] + \\ + e^{-x} \cos x \left[-\frac{1}{2}(x-1)^4 + 3(x-1)^2 + 6(x-1) + 3 \right]$$

e infine

$$F(x) + C = \int F_4(x) \, dx = e^{-x} \sin x \left[-\frac{1}{2}(x-1)^4 - 2(x-1)^3 + 12(x-1) + 15 \right] - \\ - (x-1)e^{-x} \cos x [2(x-1)^2 + 9(x-1) + 12] + C \quad .$$

■

Esercizio 10.14. *Risolvere le seguenti equazioni differenziali*

$$(1^*) \quad 2yy'' - 4y'^2 - y' = 0 \quad , \quad (2) \quad y'' - \sin y'' = 0 \quad ,$$

$$(3^*) \quad 27y'y'' - (1 + 9y'^2) \frac{y'''}{y''} = 0 \quad , \quad y'' \neq 0 \quad .$$

■ *Soluzione di (1*)*. Posto $t(y) = y'$ si ha $t(y(x)) = y'(x)$ da cui

$$y''(x) = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dx}t(y(x)) = \frac{dt}{dy}(y(x)) \frac{dy}{dx}(x) = t'(y(x))y'(x) = t'(y(x))t(y(x)).$$

Dunque $y'' = t'(y)t(y)$, cosicché l'equazione differenziale si riscrive come l'equazione differenziale nella variabile y

$$2ytt' - 4t^2 - t = 0 \iff t(2yt' - 4t - 1) = 0.$$

A $t = 0$ corrispondono le funzioni costanti $y = c$, $c \in \mathbb{R}$, soluzioni dunque dell'equazione differenziale (1*). Considerando l'equazione differenziale $2yt' - 4t - 1 = 0$ per $y \neq 0$, si è ricondotti all'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili

$$t' = \frac{1}{2y}(4t + 1).$$

Se $4t + 1 = 0$ è $y' = -\frac{1}{4}$ per cui le rette $y = -\frac{1}{4}x + c$ sono soluzioni della (1*).

Se $4t + 1 \neq 0$ le soluzioni sono

$$\log |4t + 1| = 2 \log |y| + c \iff |4t + 1| = Cy^2, \quad C > 0$$

da cui

$$4t + 1 = \pm Cy^2 \iff t = \frac{1}{4}(\pm Cy^2 - 1), \quad C > 0.$$

Abbiamo allora le equazioni differenziali (a variabili separabili) $y' = \frac{1}{4}(\pm Cy^2 - 1)$.

Posto $C = a^2$, $a \neq 0$, si hanno

$$y' = \frac{1}{4}(a^2y^2 - 1) \quad \text{e} \quad y' = -\frac{1}{4}(a^2y^2 + 1).$$

La prima equazione ha le soluzioni $y = \pm \frac{1}{a}$. Considerando $a^2y^2 - 1 \neq 0$ nella prima, risolviamo le equazioni differenziali

$$\frac{4}{a^2y^2 - 1}y' = 1 \quad \text{e} \quad \frac{4}{a^2y^2 + 1}y' = -1.$$

Integrando si ottengono le soluzioni

$$\frac{1}{a} \log \left(\frac{ay - 1}{ay + 1} \right)^2 = x + b \quad \text{e} \quad \frac{4}{a} \arctan ay = -x + b, \quad b \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\left(\frac{ay - 1}{ay + 1} \right)^2 = e^{a(x+b)} \quad \text{e} \quad ay = \tan \left[\frac{a}{4}(-x + b) \right].$$

La seconda dà le soluzioni

$$y = \frac{1}{a} \tan \left[\frac{a}{4}(-x + b) \right], \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Per la prima si ha

$$\left| \frac{ay - 1}{ay + 1} \right| = e^{a(x+b)/2} \iff \frac{ay - 1}{ay + 1} = \pm e^{a(x+b)/2}$$

Risolvendo rispetto a y si determinano le soluzioni

$$y = \frac{1}{a} \frac{1 \pm e^{a(x+b)/2}}{1 \mp e^{a(x+b)/2}} \iff y = \frac{1}{a} \frac{(1 \pm e^{a(x+b)/2})^2}{1 - e^{a(x+b)}} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 .$$

Soluzione di (2). Derivando si ottiene

$$y''' - y''' \cos y'' = 0 \iff y'''(1 - \cos y'') = 0 .$$

Se $y''' = 0$ allora $y = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$; se $\cos y'' = 1$ allora $y = a\pi x^2 + bx + c$ con $a \in \mathbb{Z}, b, c \in \mathbb{R}$.

Soluzione di (3).* Sia $t = y', t = t(x)$, allora $t' = y'', t'' = y'''$. L'equazione differenziale si riscrive

$$27tt' = (1 + 9y'^2)t'' = 0 .$$

Sia $z(t(x)) = t'(x)$ allora

$$t'' = z't' = z'z$$

dove $z' = \frac{dz}{dt}$, perciò l'equazione diventa

$$27tz - (1 + 9t^2)z' = 0 \iff z' = \frac{27t}{1 + 9t^2}z$$

ottenendo così un'equazione differenziale (in z) a variabili separabili. Integrando si ha

$$c_1 z = (1 + 9t^2)^{3/2} \quad , \quad c_1 \in \mathbb{R} .$$

Tuttavia $z = t'$ per cui questa è l'equazione a variabili separabili (in t)

$$c_1 t' = (1 + 9t^2)^{3/2}$$

la cui soluzione è data da

$$c_1 \int (1 + 9t^2)^{-3/2} dt = x + c_2 \quad , \quad c_2 \in \mathbb{R} .$$

Una soluzione dell'integrale (differenziale binomio¹⁴, cfr. (7.1)) è

$$\frac{t}{(1 + 9t^2)^{1/2}}$$

quindi si ha

$$c_1 \frac{t}{(1 + 9t^2)^{1/2}} = x + c_2 \iff c_1^2 t^2 = (x + c_2)^2 (1 + 9t^2) \iff [c_1^2 - 9(x + c_2)^2] t^2 = (x + c_2)^2$$

dalla quale si ricava

$$t = \pm \frac{x + c_2}{[c_1^2 - 9(x + c_2)^2]^{1/2}} .$$

Notiamo che, poichè $t = y'$, queste sono ancora equazioni differenziali a variabili separabili (in y)

$$y' = \pm \frac{x + c_2}{[c_1^2 - 9(x + c_2)^2]^{1/2}}$$

¹⁴ $m = 0, n = 2, p = -\frac{3}{2}$.

con soluzioni

$$y(x) + c_3 = \pm \int \frac{x + c_2}{[c_1^2 - 9(x + c_2)^2]^{1/2}} dx$$

i.e.

$$y(x) + c_3 = \mp \frac{1}{18} \int -18(x + c_2)[c_1^2 - 9(x + c_2)^2]^{-1/2} dx$$

da cui, integrando,

$$y(x) + c_3 = \mp \frac{1}{9} [c_1^2 - 9(x + c_2)^2]^{1/2} \iff [y(x) + c_3]^2 = \frac{1}{81} [c_1^2 - 9(x + c_2)^2],$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. In conclusione le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale **(3)** devono soddisfare alla relazione

$$9[y(x) + a]^2 + (x + b)^2 = c^2 \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R} .$$

■

11. APPENDICE

Esercizio 11.1. *Il limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n$$

non esiste.

■ *Soluzione.* Se fosse $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = +\infty$ allora per ogni $K \geq 2$ dovrebbe esistere $n_K \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > n_K$ sia $\cos n > K \geq 2$ e questo è assurdo.

In modo analogo non può essere $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = -\infty$. Supponiamo allora che sia $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = \ell$. In particolare sarebbe $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos 2n = \ell$ ovvero $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cos^2 n - 1) = \ell$ e questo equivarrebbe a $2 \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2 n = \ell + 1$. Per l'unicità del limite necessariamente

dovrebbe dunque essere $2\ell^2 = \ell + 1$. Pertanto

$$(11.1) \quad \ell = 1 \quad \text{o} \quad \ell = \frac{1}{2}.$$

D'altra parte sarebbe anche $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos 3n = \ell$ ovvero, poiché $\cos 3n = 4 \cos^3 n - 3 \cos n$, dovrebbe essere (sempre per l'unicità del limite) $4\ell^3 - 3\ell = \ell$. Questo, tenuto conto della (11.1), darebbe l'unica soluzione

$$(11.2) \quad \ell = 1.$$

Ora sarebbe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \cos^2 n) = 0$$

e quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esisterebbe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tale che per $n > n_\varepsilon$ si avrebbe $\sin^2 n < \varepsilon^2$ ovvero $|\sin n| < \varepsilon$. Dunque sarebbe $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = 0$. Siccome per la (11.2) sarebbe anche

$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n+1) = 1$, si avrebbe l'assurdo

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos 1 \cos n - \sin 1 \sin n) = \cos 1.$$

Ne segue allora che il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n$ non esiste. ■

• L'esercizio sopra implica che anche il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$$

non esiste.

Esercizio 11.2. *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n!}{n \log n}.$$

■ *Soluzione.* Poiché per $n \geq 2$

$$\log \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{n} \log n! - \log n = \log n \left(\frac{\log n!}{n \log n} - 1 \right)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \log \frac{1}{e} = -1$$

allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $n_\varepsilon \geq 2$, tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$ si abbia

$$\left| \log n \left(\frac{\log n!}{n \log n} - 1 \right) + 1 \right| < \varepsilon$$

cioè

$$-\varepsilon - 1 < \log n \left(\frac{\log n!}{n \log n} - 1 \right) < \varepsilon - 1$$

da cui

$$-\frac{\varepsilon + 1}{\log n} < \frac{\log n!}{n \log n} - 1 < \frac{\varepsilon - 1}{\log n}.$$

In particolare per $\varepsilon = 2$ esiste $n_2 \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n_2$ sia

$$-\frac{3}{\log n} < \frac{\log n!}{n \log n} - 1 < \frac{1}{\log n}.$$

Applicando il teorema dei due carabinieri si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n!}{n \log n} = 1.$$

■

Esercizio 11.3. *Dimostrare la seguente generalizzazione del Teorema di Rolle:*

Teorema 11.1. *Sia $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile in $(-\infty, a)$ e tale che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = f(a)$. Allora esiste $x_0 \in (-\infty, a)$ tale che $f'(x_0) = 0$.*

In modo analogo, se $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, derivabile in $[a, +\infty)$ e tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$, allora esiste $x_0 \in [a, +\infty)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

■ *Soluzione.* (1) Supponiamo che esista $x_1 < a$ per cui $f(x_1) = f(a)$: dal teorema di Rolle esisterebbe $x_0 \in (x_1, a)$ per cui $f'(x_0) = 0$ e questo concluderebbe la dimostrazione. (2) Se invece $f(x_1) \neq f(a)$ per ogni $x_1 < a$, poiché la funzione f ha minimo e massimo sul compatto $[x_1, a]$, si può supporre che essi cadano in x_1 e a , per ogni $x_1 < a$. Se ad esempio a è il punto di minimo e x_1 è il punto di massimo allora $f(a) < f(x_1)$. D'altra parte per ogni $x_2 < x_1$ i punti di estremo di f su $[x_2, a]$ sono x_2 e a . Se a fosse il punto di massimo allora per ogni $x \in [x_2, a]$ sarebbe $f(x) \leq f(a)$: in particolare sarebbe $f(x_1) \leq f(a)$ (perché $x_1 \in [x_2, a]$) che sarebbe dunque un assurdo. Pertanto per ogni $x_2 < x_1$, a è il punto di minimo e x_2 è il punto di massimo di f su $[x_2, a]$. Allora, poiché $f(x_2) \neq f(a)$, è $f(x_2) > f(a)$ e per ogni $x_2 < x_1$, $f(x_1) \leq f(x_2)$, cioè f è decrescente su $(-\infty, x_1]$ e di conseguenza

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sup_{x \in (-\infty, x_1]} f(x)$$

da cui l'assurdo $f(x_2) \leq f(a)$. In modo analogo si procede se a è il punto di massimo. In ogni caso dunque se per ogni $x_1 < a$ è $f(x_1) \neq f(a)$ allora esiste $x'_1 < a$ per cui almeno uno dei punti di estremo di f su $[x'_1, a]$ sia in (x'_1, a) : se x_0 è tale punto, si ha $f'(x_0) = 0$.

In modo analogo si procede se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$.

■

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. Barletta & S. Dragomir, *Lezioni di Analisi Matematica I*, Edizioni Ermes, Potenza, 1999.
- [2] E. Giusti, *Analisi Matematica I*, Bollati Boringhieri Ed., Torino, 1989.
- [3] E. Giusti, *Esercizi e complementi di Analisi matematica I*, Bollati Boringhieri Ed., Torino, 1991.